

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 6, Number 310 (2016), 144 – 158

K.B. Jakupov

Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan.

E-mail: jakupovKB@mail.ru

ABOUT $k - \varepsilon$, LES, REYNOLDS AND POWER MODEL

Annotation. Modelling of turbulent fluid flows Reynolds equations for unknown averaged velocities, pressure ripple, the continuation of which are infinite systems of equations of moments of high order Keller-Friedmann, and LES - method laid down in the impossibility of determining such a universal averaging period T in time, which is the only constant in all points of turbulent flow and is the same for all the dynamic functions. This fact has led to the use of nonphysical inherently absurd in design and semi-empirical mathematical models of turbulence, including those based on the ideas of Kolmogorov families of $k - \varepsilon$ models that are used to determine the nonphysical "effective coefficient of turbulent viscosity μ_T ". Models such $k - \varepsilon$ as action contrary to the forces of friction and kinetic energy transport equation, including the turbulent kinetic energy fluctuations. In this paper, for the simulation of viscous liquid and gas it is justified to use physical laws of friction $\vec{F}_{mp} = -k_m \vec{v}^m, m=1,3,5,7,9,\dots$, but with odd exponents, the choice of which depends on the component of the flow rate at a given point flow. Respectively, derived asymmetric stress tensor and the equation of dynamics. The thus obtained does not contain the model-physical constants. It is shown that the law of Newton and friction Navier viscous fluid dynamics emerge as a special case when the exponent is equal to one $m = 1$.

Keywords: liquid, turbulence, $k - \varepsilon$, LES, power model.

УДК 519.6, 532.516

К.Б. Джакупов

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

О $k - \varepsilon$, LES, РЕЙНОЛЬДС И СТЕПЕННЫХ МОДЕЛЯХ

Аннотация. Моделирование турбулентных течений несжимаемой жидкости уравнениями Рейнольдса для искомых осредненных скоростей, давления и произведений пульсаций, продолжением которых являются бесконечные системы уравнений моментов высоких порядков Келлера-Фридмана, а также LES - методом, заложены в невозможности определения такого универсального периода осреднения T во времени, который имеет единственное постоянное значение во всех точек турбулентного потока и одинаков для всех динамических функций. Данное обстоятельство привело к использованию нефизичных по своей сути и абсурдных по конструкции полуэмпирических математических моделей турбулентности, в том числе и основанных на идеях Колмогорова семейств $k - \varepsilon$ моделей, служащих для определения нефизичного "эффективного коэффициента турбулентной вязкости μ_T ". Модели типа $k - \varepsilon$ противоречат действию сил трения и уравнению переноса кинетической энергии, в том числе и турбулентной кинетической энергии пульсаций. В данной работе для моделирования течений вязких жидкости и газа обосновано использование физических законов трения $\vec{F}_{mp} = -k_m \vec{v}^m, m=1,3,5,7,9,\dots$, но с нечетными показателями степени, выбор которых зависит от компонент скорости течения в данной точке потока. Соответственно выведены

несимметричные тензоры напряжений и уравнения динамики. Полученные таким образом модели не содержат полуэмпирических констант. Показано, что закон трения Ньютона и уравнения Навье динамики вязкой жидкости вытекают как частный случай при показателе степени, равном единице $m = 1$.

Ключевые слова: жидкость, турбулентность, $k - \varepsilon$, LES, степенные модели.

1. О модели Рейнольдса. Открытие в 1882г. британским физиком Осборном Рейнольдсом двух режимов течения вязкой жидкости - ламинарного и турбулентного, в дальнейшем эксперименты подтвердили существование переходного режима или перемежающихся течений, положило начало поиску адекватной математической модели, в качестве которой Рейнольдс предложил модификацию уравнений Навье-Стокса

$$\rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}, \nabla) \vec{V} \right] + \nabla P = \rho \vec{F} + \mu \Delta \vec{V}, i=1,2,3, (\nabla, \vec{V}) = 0, \quad (1.1)$$

с представлением гидродинамических величин в виде $\vec{V} = \bar{\vec{v}} + \vec{v}'$, $P = \bar{p} + p'$ сумм осредненных во времени значений и пульсационных добавок:

$$\rho \left[\frac{\partial (\bar{\vec{v}} + \vec{v}')}{\partial t} + ((\bar{\vec{v}} + \vec{v}'), \nabla) (\bar{\vec{v}} + \vec{v}') \right] + \nabla (P + p') = \rho \vec{F} + \mu \Delta (\bar{\vec{v}} + \vec{v}'), (\nabla, \bar{\vec{v}} + \vec{v}') = 0, \quad (1.2)$$

откуда специфическим осреднением получаются уравнения Рейнольдса

$$\frac{d\bar{v}_i}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} = F_i + \nu \frac{\partial^2 \bar{v}_i}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_i \partial x_j}, i=1,2,3, \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.3)$$

В системе (1.3) Рейнольдса число неизвестных превышает число уравнений на 6 величин $\overline{v'_i v'_j}$, $i, j = 1, 2, 3$, что должно было обратить внимание на ошибочность и неэффективность осредненного подхода к моделированию турбулентных течений. Во-первых, парадоксальна сама идея осреднения системы уравнений (1.2), потому как уравнение динамики есть воплощение второго закона Ньютона, а уравнение неразрывности суть математического оформления закона сохранения массы, т.е. на самом деле осреднение проведено над законами Ньютона и сохранения массы. Но осреднение любого закона приводит к его искажению, что является источником недостоверных и неадекватных результатов. Во-вторых, формула осреднения по времени

$$f = \bar{f} + f', \bar{f} = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} f(x, y, z, \tau) d\tau, f' = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} f'(x, y, z, \tau) d\tau = 0$$

содержит 3 проблемы. Первая проблема заключается в пределах интегрирования $[t-T/2, t+T/2]$, T - период осреднения, t - текущее время. Получается, что предварительно нужно найти значения функций на будущие моменты времени $(t, t+T/2]$ и затем лишь проводить осреднения, что нереально. Второй парадокс состоит в том, что *периоды осреднения* пульсаций гидродинамических функций и произведений пульсаций на уже осредненные величины *не могут быть одинаковыми и постоянными*:

$$\frac{1}{T_p} \int_{t-T_p/2}^{t+T_p/2} p'(x, y, z, \tau) d\tau = 0, \frac{1}{T_i} \int_{t-T_i/2}^{t+T_i/2} v'_i(x, y, z, \tau) d\tau = 0, \frac{1}{T_{ij}} \int_{t-T_{ij}/2}^{t+T_{ij}/2} v'_i(x, y, z, \tau) \bar{v}_j(x, y, z, \tau) d\tau = 0, i, j = 1, 2, 3,$$

то есть периоды не могут быть равными между собой $T_p \neq T_i \neq T_{ij}, i, j = 1, 2, 3$, что подтверждается экспериментами [2]. Третий парадокс требует выполнения гипотетического постулата (см. [1]):

$$\overline{f\varphi} = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \overline{f}(x, y, z, \tau) \varphi(x, y, z, \tau) d\tau = \overline{f} \cdot \overline{\varphi} \quad (1.4)$$

благодаря чему уравнения Рейнольдса имеют вид (1.3). Отказ от данного постулата приводит к совершенно другому уравнению для осредненных величин, нежели уравнения Рейнольдса. Действительно, правая часть (1.4) по определению равна произведению интегралов

$$\overline{f} \cdot \overline{\varphi} = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} f(x, y, z, \tau) d\tau \cdot \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \varphi(x, y, z, \tau) d\tau,$$

а левая часть по тому же правилу осреднения представляется в виде

$$\overline{f\varphi} = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} f(x, y, z, \tau) \varphi(x, y, z, \tau) d\tau = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \left\{ \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} f(x, y, z, \tau) d\tau \right\} \varphi(x, y, z, \tau) d\tau,$$

следовательно, получается принудительное равенство (1.4), которое не может иметь места в нестационарных турбулентных течениях (огромное число экспериментов [2] подтверждают нестационарность турбулентных течений, гипотетическое предположение о стационарности противоречит физической сути явления турбулентности [2], [3], [4]):

$$\frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} \left\{ \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} f(x, y, z, \tau) d\tau \right\} \varphi(x, y, z, \tau) d\tau \neq \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} f(x, y, z, \tau) \varphi(x, y, z, \tau) d\tau, \quad \overline{f\varphi} \neq \overline{f} \cdot \overline{\varphi} !!!$$

Следовательно, считая постулат (1.4) невыполнимым, правильное написание уравнений Рейнольдса должно иметь вид:

$$\rho \left[\frac{\partial \overline{v}_i}{\partial t} + \overline{v}_j \frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} + \overline{v'_j} \frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_j} + \overline{v'_j} \frac{\partial \overline{v}'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{v}'_i v'_j}{\partial x_j} \right] + \frac{\partial \overline{p}}{\partial x_i} = \rho F_i + \mu \frac{\partial^2 \overline{v}_i}{\partial x_j \partial x_j}, \quad i=1,2,3, \quad \frac{\partial \overline{v}_i}{\partial x_i} = 0, \quad (1.5)$$

т.е. добавляется еще 18 неизвестных функций. Приведенных примеров достаточно для демонстрации абсурдности осреднения уравнений динамики вязкой жидкости, тем более для течений с переменной плотностью с уравнением неразрывности $\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\nabla, \rho \vec{v}) = 0$.

Очевидно, что в течениях вязкой жидкости период осреднения будет на самом деле функцией координат и текущего времени: $T = T(x, y, z, t)$. Существование такого постоянного значения периода осреднения T , которое было бы применимо во всех точках турбулентного потока и для всех пульсаций, в том числе и для их произведений на уже осредненные гидродинамические функции просто невероятно, что подтверждается известным фактом: ни в натуральных экспериментах, ни в теоретических моделях турбулентных течений не даны конкретные численные или аналитические сведения о времени осреднения T или хотя бы о границах его изменения, что подтверждает неравенства периодов $T_p \neq T_i \neq T_{ij}, i, j = 1, 2, 3$. Полное отсутствие каких-либо критериев определения периода осреднения T делает бессмысленными введение осредненных во времени гидродинамических переменных, следовательно, бессмысленны бесконечные цепочки уравнений для вторых, третьих и более высоких моментов, выведенные Келлером и Фридманом. Таким образом, уравнения типа Рейнольдса (1.3) и (1.5) являются мифическими.

2. Парадоксы определения коэффициента эффективной турбулентной вязкости в уравнениях Буссинеска в $k-\varepsilon$ моделях. Физическая бессмысленность системы уравнений

Рейнольдса, содержащей 6 неопределенных функций с неизвестным периодом осреднения, дали Буссинеску повод для поиска иной модели с тензором напряжений, в которой естественный коэффициент молекулярной вязкости суммируется с искусственным коэффициентом “эффективной турбулентной вязкости μ_T ”:

$$\pi_{(B)ji} = -p\delta_{ij} + (\mu + \mu_T)\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right), i, j = 1, 2, 3 \quad (2.1)$$

В (2.1) Буссинеск использовал симметричный тензор напряжений Стокса $\pi_{ji(c)} = -p\delta_{ij} + \mu\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$ [1]. Симметричный тензор Стокса, а также его аналог тензор Буссинеска, построены на искусственно образованном тензоре скоростей деформаций и противоречат несимметричному тензору напряжений Ньютона $\pi_{ji(e)} = -p\delta_{ij} + \mu \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$.

Несимметричный тензор Ньютона есть прямое следствие закона трения $\vec{F}_{mp} = -k\vec{v}$, доказательство дано ниже. Тензор напряжений Стокса, а также его аналог тензор Буссинеска, не соответствуют данному закону трения, поэтому они фальшивы.

В модели Буссинеска определение коэффициента эффективной турбулентной вязкости $\mu_T = \rho \nu_T$ основано на идее Колмогорова [5] применения искусственных уравнений переноса турбулентной кинетической энергии пульсаций и масштаба турбулентности. Скалярное умножение уравнения динамики (1.2) на вектор пульсационной скорости \vec{v}' с последующим осреднением по Рейнольдсу в предположении выполнения постулата (1.4)

$$\left(\rho \frac{\partial(\vec{V} + \vec{v}')}{\partial t} + ((\vec{V} + \vec{v}'), \nabla)(\vec{V} + \vec{v}')\right) \cdot \vec{v}' + (\nabla(P + p'), \vec{v}') = (\rho \vec{F}, \vec{v}') + (\mu \Delta(\vec{V} + \vec{v}'), \vec{v}'), \quad (2.2)$$

совершенно строго приводит к уравнениям переноса турбулентной кинетической энергии пульсаций $e = \frac{1}{2} \sum_i \overline{v'_i v'_i}$ (см. [1], [6]) следующего вида:

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \bar{v}_k \frac{\partial e}{\partial x_k} + \overline{\rho v'_i v'_k} \frac{\partial \bar{v}_i}{\partial x_k} + \overline{v'_i} \frac{\partial \bar{p}'}{\partial x_i} = -\frac{\rho \overline{\partial v'_i v'_j v'_k}}{2 \partial x_k} + \frac{\mu}{\rho} \Delta e - \mu \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_k}\right) \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_k}\right) \quad (2.3)$$

(двойное применение индекса означает суммирование). На основании логично выведенного уравнения (2.3) справедливо утверждение, да это и очевидно, что уравнения математика (не механика) Колмогорова

$$U \frac{\partial e}{\partial x} + V \frac{\partial e}{\partial y} = \frac{1}{\sigma_e} \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{1/2} l_k \frac{\partial e}{\partial y} \right) + e^{1/2} l_k \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \frac{C_D e^{1/2}}{l_k}, \quad (2.4)$$

$$U \frac{\partial e l_k}{\partial x} + V \frac{\partial e l_k}{\partial y} = \frac{1}{\sigma_e} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{e^{3/2} l_k}{\sigma_1} \frac{\partial l_k}{\partial y} + \frac{e^{1/2} l_k^2}{\sigma_2} \frac{\partial e}{\partial y} \right) + C_p e^{1/2} l_k^2 \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - C_M e^{3/2}$$

носят искусственный и надуманный характер [6], не имеют физического обоснования, потому как в корне отличаются от строго выведенного уравнения кинетической энергии пульсаций (2.3).

Более того противоречат физике явления, а именно силы вязкого трения « $-\mu \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \right)$ » в (2.3) уменьшают кинетическую энергию пульсаций, тогда как в уравнении Колмогорова (2.4) силы вязкого трения $e^{1/2} l_k \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2$, вписанные в систему (2.4), наоборот, увеличивают кинетическую энергию пульсаций! При отрицательных значениях e корни $e^{1/2}$, $e^{3/2}$ не будут действительными числами. Далее при отрицательных значениях «масштаб турбулентности» l_k теряет физический смысл *длины*. По этим причинам в дальнейшем предпочтение было отдано моделям переноса кинетической энергии пульсаций (Прандтль-Колмогоров, Нг и Сполдинг, Роди и Сполдинг, Лаундер и Морзе, Ханжалик и Лаундер и др. [3]), среди них наиболее распространенными являются уравнения типа $k - \varepsilon$ - моделей (более 90). Для преодоления указанных парадоксов во второй модели Прандтля-Колмогорова для вычисления коэффициента турбулентной вязкости $\mu_T = \rho \nu_T$ в уравнениях Буссинеска была использована система, где уже нет радикалов типа $e^{1/2}$:

$$\begin{aligned} \rho U \frac{\partial e}{\partial x} + \rho V \frac{\partial e}{\partial y} &= \frac{1}{y^\alpha} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho \nu_T y^\alpha}{\sigma_k} \frac{\partial e}{\partial y} \right) + \rho \nu_T \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - \rho \varepsilon, \\ \rho U \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \rho V \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} &= \frac{1}{y^\alpha} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\rho \nu_T y^\alpha}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial y} \right) + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{e} \rho \nu_T \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 - C_{\varepsilon 2} \frac{\rho \varepsilon^2}{e}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

Система (2.5) тоже входит в противоречие с уравнением (2.3), потому как в уравнении (2.5) силы вязкого трения $\rho \nu_T \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2$ увеличивают кинетическую энергию пульсаций. В системе уравнений Буссинеска

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\mu + \mu_T) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right], i=1,2,3, \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.6)$$

“эффективная турбулентная вязкость” определяется формулой: $\mu_T = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon}$, числитель и знаменатель которой являются переменными функциями и вычисляются из искусственно созданных уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial k}{\partial t} + v_j \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{(\mu + \mu_T)}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + \mu_T F_k - \rho \varepsilon, \\ \rho \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + v_j \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{(\mu + \mu_T)}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{\varepsilon}{k} [C_1 \mu_T F_k - C_2 \rho \varepsilon (1 - C_\varepsilon R)], F_k = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)^2, \end{aligned} \quad (2.7)$$

решения которых зависят от краевых условий. Поэтому функция ε вполне может быть знакопеременной и принимать в точках потока нулевые $\varepsilon = 0$ или отрицательные значения $\varepsilon < 0$, следовательно, в таких точках искусственная вязкость будет неограниченной $\mu_T = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} \rightarrow \infty$ или отрицательной $\mu_T = C_\mu \rho \frac{k^2}{\varepsilon} < 0$, что приводит в численных расчетах к фальшивым результатам.

Из скалярного произведения уравнения Навье на вектор скорости

$$\rho \left(\frac{d\vec{v}}{dt}, \vec{v} \right) + (\nabla p, \vec{v}) = \mu (\Delta \vec{v}, \vec{v}) + \rho (\vec{F}, \vec{v})$$

вытекает для кинетической энергии $e = \rho v^2 / 2$ уравнение

$$\frac{\partial e}{\partial t} + v_k \frac{\partial e}{\partial x_k} + (\nabla p, \vec{v}) = \frac{\mu}{\rho} \Delta e - \mu \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k}, \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_k} \right) + \rho (\vec{F}, \vec{v}),$$

сходство которого с (2.3) очевидное. Следовательно, в $k-\varepsilon$ моделях уравнение турбулентной кинетической энергии (2.7) противоречит (2.3) и данному уравнению. Модели типа $k-\varepsilon$, основанные на идеях основателя теории вероятностей Колмогорова [5], с нефизическими и надуманными уравнениями для кинетической энергии и масштаба турбулентности, **противоречат** доказанному факту в (2.3), что силы трения $-\mu \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \right) \left(\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \right)$ уменьшают кинетическую

энергию, тогда как в уравнении (2.7) член с коэффициентом вязкости $\mu_T F_k$ увеличивает кинетическую энергию k !

Заключение. Осреднение по Рейнольдсу приводит к абсурдным уравнениям типа (1.3), (1.5) и к бесконечной цепочке уравнений Келлера-Фридмана для различных, не имеющих физического смысла моментов $\overline{v'_i v'_j}$, $\overline{v'_i v'_j v'_k}$, $\overline{v'_i v'_j v'_k v'_m}$, а также формулам типа Миллионщикова

связи 4-х и 2-х моментов $\overline{v'_i v'_j v'_k v'_m} = \overline{v'_i v'_j} * \overline{v'_m v'_k} + \overline{v'_i v'_k} * \overline{v'_j v'_m} + \overline{v'_i v'_j} * \overline{v'_i v'_m}$. В силу вышеприведенных

фактов применение в численных расчетах турбулентных течений любых осредненных уравнений типа Рейнольдса, Буссинеска, LES и $k-\varepsilon$ моделей и других аналогичных модификаций, которым несть числа, дает фальшивые результаты. Кроме этого, в разностных схемах аппроксимации конвективных членов должны быть выполнены на пятиточечных (в каждом направлении) шаблонах во избежание влияния “схемной диффузии”. “Схемной диффузией” или “аппроксимационной вязкостью” обладают трехточечные аппроксимации (против потока) Булеева-Петрищева и забывает истинную физическую вязкость (или теплопроводность, диффузию и т.д.). Без правильного вычисления давления из уравнения неразрывности численные результаты являются недостоверными, ошибочными. Особенно неприемлемы в численных расчетах разнесенные сетки и дивергентная форма, впервые введенные Харлоу и Уэлчем для уравнений Навье-Стокса. Все эти вопросы подробно рассмотрены в монографии [18].

3. О парадоксах LES – метода. Аналогичные проблемы содержатся в уравнениях LES – метода с подсеточными напряжениями и фильтрами Смагоринского [11], предложенных как альтернатива $k-\varepsilon$ модели:

$$\frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial (\widehat{u}_i \widehat{u}_j)}{\partial x_j} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \widehat{p}}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 \widehat{u}_i}{\partial x_j \partial x_j} - \frac{\partial \widehat{T}_{ij}}{\partial x_j} \quad (3.1)$$

Подобие данного уравнения LES-метода уравнению Рейнольдса (1.3) очевидно, только пульсационные рейнольдсовы напряжения $\frac{\partial^2 \overline{v'_i v'_j}}{\partial x_i \partial x_j}$ заменены на $\frac{\partial \widehat{T}_{ij}}{\partial x_j}$, где задается подсеточное напряжение $\widehat{T}_{ij} = \overline{u_i u_j} - \overline{u_i} \overline{u_j}$ с осреднениями по времени и по пространству:

$$\overline{\Phi}(x, t) = \frac{1}{\Delta x} \int_{x-0,5\Delta x}^{x+0,5\Delta x} \Phi(\xi, t) d\xi,$$

$$\widehat{u}_{I,J,K} = \frac{1}{8} (\overline{u}_{I-1/2,J-1/2,K-1/2} + \overline{u}_{I+1/2,J-1/2,K-1/2} + \overline{u}_{I-1/2,J+1/2,K-1/2} + \overline{u}_{I+1/2,J+1/2,K-1/2} + \overline{u}_{I-1/2,J-1/2,K+1/2} + \overline{u}_{I+1/2,J-1/2,K+1/2} + \overline{u}_{I-1/2,J+1/2,K+1/2} + \overline{u}_{I+1/2,J+1/2,K+1/2}),$$

с уравнением для турбулентной кинетической энергии k_{sgs} :

$$\frac{\partial k_{sgs}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u}_j k_{sgs}) = \frac{\partial}{\partial x_j} [(v + v_{sgs}) \frac{\partial k_{sgs}}{\partial x_j}] + P_{k_{sgs}} - C_\varepsilon \frac{k_{sgs}^{3/2}}{\Delta},$$

$$v_{sgs} = c_k \Delta k_{sgs}^{1/2}, P_{k_{sgs}} = 2v_{sgs} \overline{s}_{ij} \overline{s}_{ij}, \overline{s}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (3.2)$$

Данное уравнение Смагоринского типа $k - \varepsilon$ модели, здесь одинаковые проблемы, потому как в основном используются идеи Колмогорова [5].

Физическая абсурдность LES моделей состоит, аналогично $k - \varepsilon$ -модели, в том, что силы трения уменьшают кинетическую энергию k_{sgs} , тогда как в уравнении (3.1) член с искусственным коэффициентом вязкости $P_{k_{sgs}} = 2v_{sgs} \overline{s}_{ij} \overline{s}_{ij}$ увеличивает кинетическую энергию k_{sgs} !

В (3.1) входят корни в формуле «эффективной турбулентной вязкости» $v_{sgs} = c_k \Delta k_{sgs}^{1/2}$ и в $C_\varepsilon k_{sgs}^{3/2} / \Delta$, которые при отрицательных значениях $k_{sgs} < 0$ не могут быть вычислены. Где гарантия того, что решение начально-краевой задачи для нелинейного дивергентного уравнения (3.2) будет положительным? Во-первых, дифференциальное уравнение турбулентной кинетической энергии (3.2) не удовлетворяет принципу максимума. Кроме того, в уравнения Смагоринского входят константы, не имеющие физического смысла. Используются значения функции $\overline{u}_{I+1/2,J-1/2,K+1/2}$ на разнесенных сетках, неприемлемость которых доказана в [18]. Кроме того,

используются компоненты симметричного тензора напряжений Стокса $\overline{s}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u}_j}{\partial x_i} \right)$, тогда как тензор напряжений сплошной среды несимметричен [10], [18].

Используется дивергентная форма записи конвективного переноса $\frac{\partial (\widehat{u}_i \widehat{u}_j)}{\partial x_j} = \widehat{u}_j \frac{\partial \widehat{u}_i}{\partial x_j} + \widehat{u}_i \frac{\partial \widehat{u}_j}{\partial x_j}$.

Такая форма записи предполагает абсолютно точное выполнение уравнения неразрывности $\frac{\partial \widehat{u}_j}{\partial x_j} = 0$, что в разностных схемах требует адекватно точного вычисления давления. Так как данное обстоятельство в разностных и итерационных алгоритмах недостижимо, то приближенное выполнение уравнения неразрывности в разностной схеме с сеточной погрешностью $O(h^\alpha)$, $\alpha > 0$ и итерационной погрешностью $O(\varepsilon)$ вносит неисправимую долю погрешностей $\frac{\partial \widehat{u}_j}{\partial x_j} = O(h^\alpha) + O(\varepsilon)$ в численное решение любого уравнения.

4. Фальсификации применения в численных методах уравнений переноса в дивергентной форме. Дивергентная форма записи конвективных членов применяется в 99% уравнений

переноса субстанций. С целью показать ошибочность применения дивергентных уравнений остановимся на уравнениях динамики сплошной среды в напряжениях и притока тепла:

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}, i = 1, 2, 3, \quad \rho c_v \frac{dT}{dt} = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + \tau_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Стало общепринятым применение в численных расчетах данных уравнений переноса в дивергентной форме (иное псевдонаучное название: в форме «законов сохранения»)

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \text{div}(\rho v_i \vec{v}) = \rho F_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}, i = 1, 2, 3, \quad c_v \left[\frac{\partial \rho T}{\partial t} + \text{div}(\rho T \vec{v}) \right] = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + \tau_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

и т.д., что априори предполагает абсолютно точное выполнение уравнения неразрывности $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{v} = 0$. В разностных методах давление вычисляется из сеточного аналога данного уравнения неразрывности неточно, с той или иной степенью приближения по итерационным алгоритмам, поэтому сеточное уравнение неразрывности выполняется, во-первых с аппроксимационной погрешностью $O(h^\alpha), \alpha > 0$, во-вторых, с итерационной погрешностью $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \rho \vec{v} = O(h^\alpha) + O(\varepsilon)$,

что вносит неисправимые искажения в численное решение уравнений переноса, и эти искажения забывают вклад диффузионных членов, то есть, в дивергентных уравнениях на самом деле получаются численные решения неадекватных уравнений типов

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + v_i [O(h^\alpha) + O(\varepsilon)] = \rho F_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}, i = 1, 2, 3,$$

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + c_v T [O(h^\alpha) + O(\varepsilon)] = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + \tau_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

Аналогичное обстоятельство и с другими дивергентными уравнениями переноса.

Теорема. Численные решения любых уравнений переноса в дивергентной форме являются фальшивыми.

Действительно, в численных расчетах преобладание погрешностей $v_i [O(h^\alpha) + O(\varepsilon)]$, $c_v T [O(h^\alpha) + O(\varepsilon)]$ над диффузионными членам типа $\frac{1}{\text{Re}} \Delta \vec{v}$, $\frac{1}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \Delta T$ не вызывает никаких сомнений.

Поэтому необходимо в численных методах применение уравнений только в естественном *недивергентном* виде:

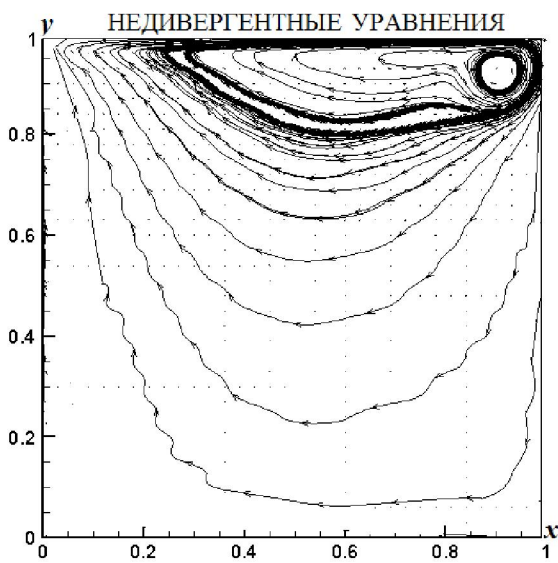
$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho F_i + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}, i = 1, 2, 3, \quad \rho c_v \frac{dT}{dt} = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + \tau_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j},$$

$$\rho c_v \frac{dT}{dt} + \rho \frac{d|\vec{v}|^2}{dt} = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + \frac{\partial \tau_{ji} v_i}{\partial x_j} + \rho(\vec{F}, \vec{v})$$

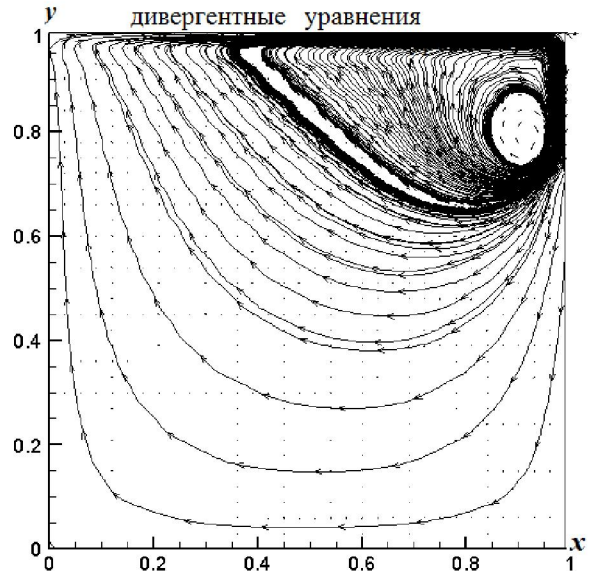
Расчеты течений, выполненные дивергентными уравнениями переноса, являются фальшивыми, поэтому не могут быть приняты во внимание!

Естественные *недивергентные* уравнения переноса являются математическими моделями одного конкретного закона физики. Например, 2-го закона Ньютона или закона сохранения энергии и т.д. Естественный *дивергентный* вид имеет уравнение неразрывности, являющееся законом сохранения массы.

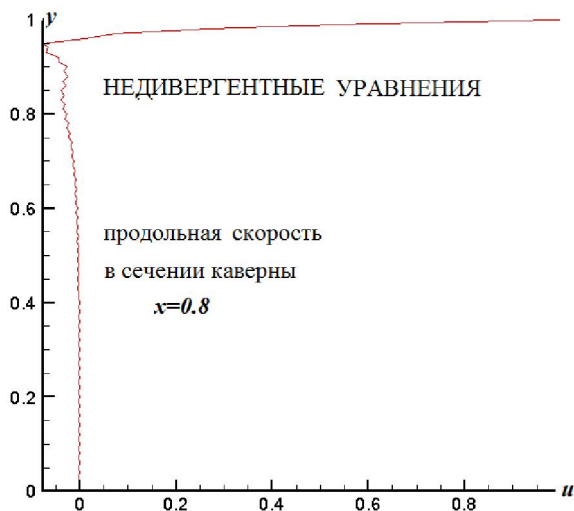
Дивергентные уравнения переноса есть смешения естественных законов физики с законом сохранения массы, т.е. искусственные гибриды двух законов физики. Смешение законов недопустимо в численных расчетах!



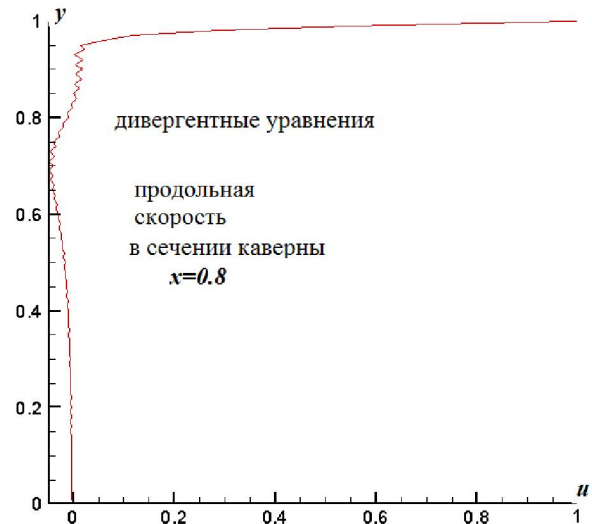
Фигура 1



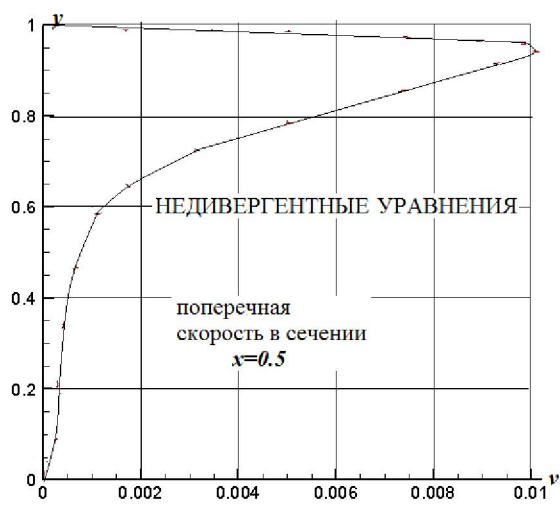
Фигура 2



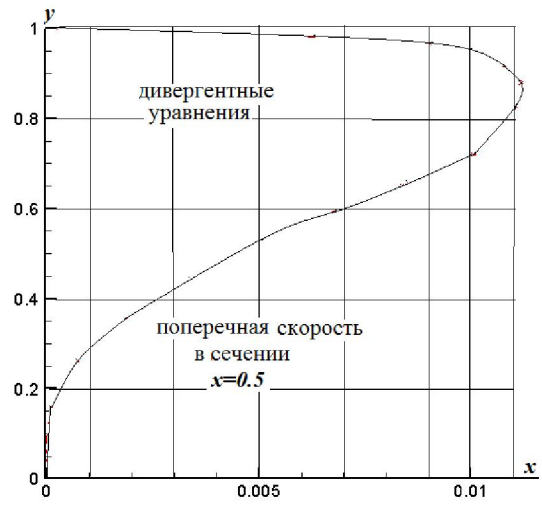
Фигура 3



Фигура 4



Фигура 5



Фигура 6

На фигурах 1,3,5 представлены картины течения в каверне с верхней движущейся стороной, полученные численным решением **недивергентных** уравнений вязкой несжимаемой жидкости в переменных скорость-давление.

На фигурах 2,4,5 представлены картины течения в той же каверне, полученные численным решением **дивергентных** уравнений вязкой несжимаемой жидкости в переменных скорость-давление. Расчеты проведены на одной и той же сетке 100x100 с шагом по времени 0.0005 при числе $Re=10^4$, итерационная точность вычисления давления из разностного аналога уравнения неразрывности $\varepsilon = 10^{-3}$. Различие в рисунках подтверждает фальшивость результатов, полученных по дивергентным уравнениям.

5. Уравнения динамики и теплопроводности степенных законов трения.

Установленный в [9], [10], [18] факт несимметричности тензора напряжений в сплошной среде создает широкие возможности для конструирования новых реологических законов, из которых можно выбирать подходящие модели соответственно скорости течения и физическим свойствам среды.

На частицу m_i действует сила трения $\vec{F}_{imp} = -k\vec{v}_i$, $k > 0$, в индивидуальном объеме $\delta\tau$ с среднемассовой скоростью $\vec{v} = \sum_i m_i \vec{v}_i / \sum_i m_i$ сила трения равна $\vec{F}_{mp} = \sum_i m_i \vec{F}_{imp} / \sum_i m_i = -\sum_i m_i k \vec{v}_i / \sum_i m_i = -k\vec{v}$, $\vec{F}_{mp} = -k\vec{v}$. Данная формула используется для малых скоростей (см.[13]), для больших скоростей предложена квадратичная зависимость силы трения от скорости $\vec{F}_{mp} = -k'v^2\vec{e}_v$, $v = |\vec{v}|$, \vec{e}_v - орт вектора скорости \vec{v} .

Обобщение данной формулы на более высокие степени зависимости с нечетными целыми положительными значениями показателя степени $\vec{F}_{mp} = -k_m v^m \vec{e}_v$, $m = 1,2,3,\dots$ дает удовлетворительное совпадение с экспериментальными измерениями осредненной скорости турбулентного течения в трубе круглого сечения.

Выведем формулы касательных напряжений, соответствующих данным степенным законам трения $\vec{F}_{mp} = -k_{m_u} u^{m_u} \vec{i} - k_{m_v} v^{m_v} \vec{j} - k_{m_w} w^{m_w} \vec{k}$.

Пусть $u > 0, v > 0, w > 0$. Проекция на ось x равны: $\vec{F}_1 = -k_{m_u} u_1^{m_u} \vec{i}$ на плоскости y_1 , $\vec{F}_2 = -k_{m_u} u_2^{m_u} \vec{i}$ на плоскости y_2 , разности $\delta\vec{F} = \vec{F}_2 - \vec{F}_1 = -k_{m_u} u_2^{m_u} \vec{i} + k_{m_u} u_1^{m_u} \vec{i} = -k_{m_u} \delta u^{m_u} \vec{i}$, $\delta\vec{F} \uparrow \downarrow \vec{i}$. По определению среднее касательное напряжение равно $\vec{\pi}_{yxcp} = \frac{\delta\vec{F}}{\delta x \delta z}$. Линейная плотность силы трения $\vec{f} = \frac{\delta\vec{F}}{\delta y}$ пропорциональна касательному напряжению $\vec{f} = k' \vec{\pi}_{yxcp}$, результатом чего являются равенства

$$-k' \pi_{yxcp} \delta y = -k \delta u^{m_u}, \quad \pi_{yxcp} = \mu_{m_u} \frac{\delta u^{m_u}}{\delta y}, \quad \mu_{m_u} = \frac{k}{k'}$$

которые в пределе дают формулы касательных напряжений:

$$\pi_{yx} = \lim_{\delta y \rightarrow 0} \mu_{m_u} \frac{\delta u^{m_u}}{\delta y} = \mu_{m_u} \frac{\partial u^{m_u}}{\partial y} = \mu_{m_u} m_u u^{m_u-1} \frac{\partial u}{\partial y},$$

$$\pi_{xy} = \mu_{m_v} \frac{\partial v^{m_v}}{\partial x} = \mu_{m_v} m_v v^{m_v-1} \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \pi_{zy} = \mu_{m_v} \frac{\partial v^{m_v}}{\partial z} = \mu_{m_v} m_v v^{m_v-1} \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\pi_{yz} = \mu_{m_w} \frac{\partial w^{m_w}}{\partial y} = \mu_{m_w} m_w w^{m_w-1} \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \pi_{zx} = \mu_{m_u} \frac{\partial u^{m_u}}{\partial z} = \mu_{m_u} m_u u^{m_u-1} \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\pi_{xz} = \mu_{m_w} \frac{\partial w^{m_w}}{\partial x} = \mu_{m_w} m_w w^{m_w-1} \frac{\partial w}{\partial x}$$

Формулы выведены для $u > 0, v > 0, w > 0$ и нечетных показателей степени $m = 1; 3; 5; 7; 9 \dots$. Для нечетных m и $u \leq 0, v \leq 0, w \leq 0$ получается такой же результат. Для нормальных напряжений с учетом давления получаются

$$\pi_{xx} = -p + \mu_{m_u} \frac{\partial u^{m_u}}{\partial x} = -p + \mu_{m_u} m_u u^{m_u-1} \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\pi_{yy} = -p + \mu_{m_v} \frac{\partial v^{m_v}}{\partial y} = -p + \mu_{m_v} m_v v^{m_v-1} \frac{\partial v}{\partial y},$$

$$\pi_{zz} = -p + \mu_{m_w} \frac{\partial w^{m_w}}{\partial z} = -p + \mu_{m_w} m_w w^{m_w-1} \frac{\partial w}{\partial z}$$

Очевидно, при показателях степени равных 1, получается закон трения Ньютона. Соответственно компонентам несимметричных тензоров напряжений уравнения динамики и теплопроводности в декартовых координатах:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \rho F_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_{m_i} \frac{\partial v_i^{m_i}}{\partial x_j} \right), \quad i=1,2,3, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0,$$

$$\rho c_v \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - p \operatorname{div} \vec{v} + \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \mu_{m_i} \frac{\partial v_i^{m_i}}{\partial x_j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \rho Q,$$

Связь коэффициентов $\mu_{m_i}, i=1,2,3$ с ньютоновским коэффициентом вязкости μ установлен в [12] в виде $\mu_{m_i} = m_i^{1-m_i} \mu, i=1,2,3$, где показатель степени $m_i, i=1,2,3$ есть функция данной компоненты скорости $v_i, i=1,2,3$ и выбирается дискретно из интервала, соответствующего значению компоненты скорости:

$$U(j-1)/9 \leq |v_i| \leq U(j+1)/9 \quad m_i = j+1, \quad j=0,2,4,6,8,\dots; \quad i=1,2,3,$$

U есть характерная величина скорости в моделируемом течении вязкой жидкости. В общем случае сжимаемой теплопроводной жидкости или газа вводятся масштабы: плотности ρ^* , температуры T^* , коэффициента теплопроводности λ^* , плотности массовой силы g , времени $t_* = L/U$, давления p^* . Для безразмерных переменных употреблены прежние обозначения:

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + Eu \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\rho}{Fr} F_i + \frac{1}{\operatorname{Re}} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu m_i K s_{m_i} v_i^{m_i-1} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right), \quad i=1,2,3, \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \rho v_i}{\partial x_i} = 0, \rho \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \sum_{j=1}^3 v_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) = \frac{k}{\text{Re} \cdot \text{Pr}} \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) -$$

$$-Eu \cdot M^2 k(k-1) p \text{div} \vec{v} + \frac{1}{\text{Re}} M^2 k(k-1) \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 \mu m_i K s_{m_i} v_i^{m_i-1} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right)^2 + \rho Q$$

К данной системе добавляются конкретные зависимости от температуры $\lambda = \lambda(T), \mu = \mu(T)$ - ньютоновская вязкость с масштабом μ_* и безразмерное уравнение состояния $p = \frac{1}{\kappa Eu M^2} \rho T, \kappa = \frac{c_p}{c_v}$. В безразмерных переменных образуются комплексы

$$\frac{1}{\text{Re}_{m_i}} = \frac{1}{\text{Re}} K s_{m_i}, \text{Re} = \frac{\rho_* U L}{\mu_*} - \text{число Рейнольдса}, K s_{m_i} = \left(\alpha \frac{U}{m_i} \right)^{m_i-1}, \alpha = 1 - \frac{c}{M},$$

$$Eu = \frac{P_*}{\rho_* U^2}, \text{Pr} = \frac{c_p \mu_*}{\lambda_*}, Fr = \frac{U^2}{gL}, M = \frac{U}{a} - \text{безразмерные числа Эйлера, Прандтля, Фруда, Маха.}$$

Показатели степеней m_i должны быть нечетными целыми положительными числами из заданных безразмерных интервалов

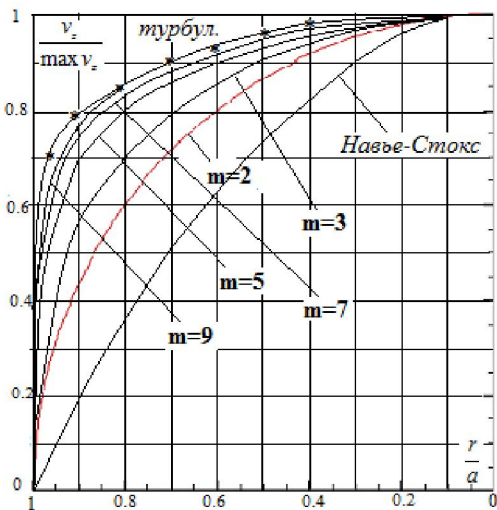
$$(j-1)/9 \leq |v_i| \leq (j+1)/9 \quad m_i = j+1, \quad j = 0, 2, 4, 6, 8, \dots; \quad i = 1, 2, 3$$

На фиг.7 представлены профили осевой скорости течения вязкой жидкости в трубе круглого сечения радиуса "а", насчитанные из краевой задачи для показателей степени $m = 1; 3; 5; 7; 9$.

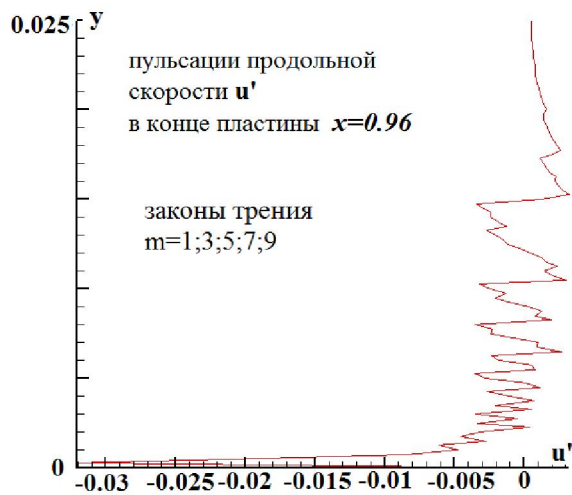
$$\frac{dp}{dz} = \frac{\mu_m}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV_z^m}{dr} \right), V_r = 0, V_\varphi = 0, \frac{dp}{dz} = \text{const} < 0,$$

Решение данной задачи получается в виде

$$V_z^m = -\frac{1}{4\mu_m} \frac{dp}{dz} (a^2 - r^2), V_r = 0, V_\varphi = 0, \frac{V_z}{\max V_z} = \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{m}}$$



Фигура 7



Фигура 8

Степень $m = 1$ соответствует уравнению Навье-Стокса, т.е. закону трения Ньютона. Профиль осевой скорости при степени $m = 9$ почти сливается с экспериментальным профилем, который отмечен точками.

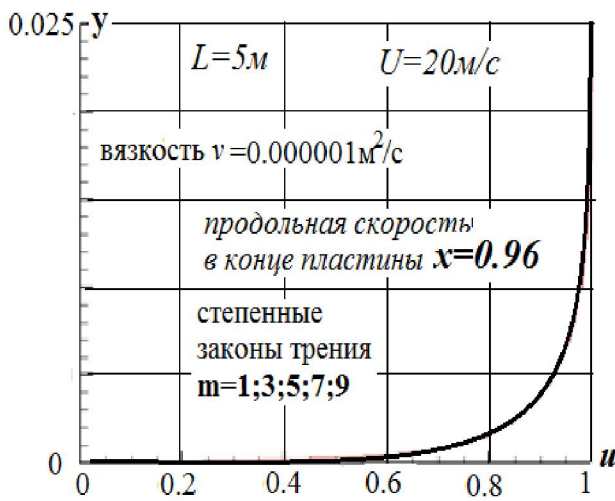
На фиг. 8, 9, 10 приведены расчеты на сетке 200x150 продольного обтекания пластины. На фиг. 2 приведено распределение пульсаций продольной скорости в конце пластины, рассчитанное

по формуле $u_{ij}^m = u_{ij}^n - \bar{u}_{ij}^n$, где $\bar{u}_{ij}^n = (\sum_{k=n_0}^n u_{ij}^k) / (n - n_0)$ - осредненная продольная скорость

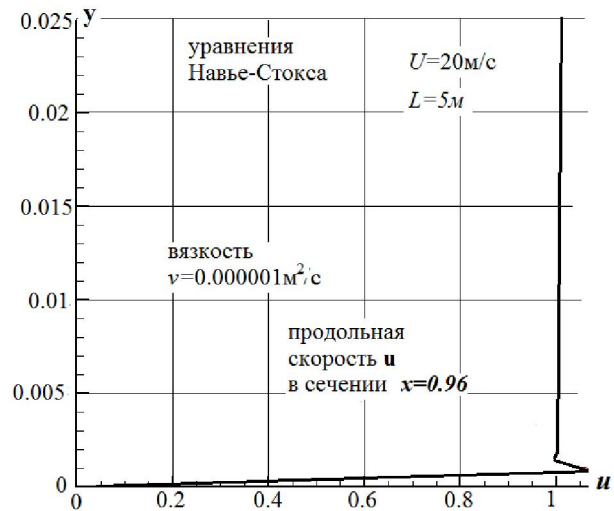
на момент времени $t_n = 0.0001n, n - n_0 = 10^5, n_0 = 1502590$.

На фиг. 9 представлена продольная скорость в конце пластины, полученная численным решением уравнений динамики со степенными законами трения (5.1). При тех же параметрах получено решение уравнений Навье.

Профиль продольной скорости в конце пластины на фиг.10, полученный численным решением уравнений Навье с законом трения Ньютона $m = 1$, разительно отличается от профиля фиг. 9. Тем самым численно подтверждается эффективность степенных законов трения.

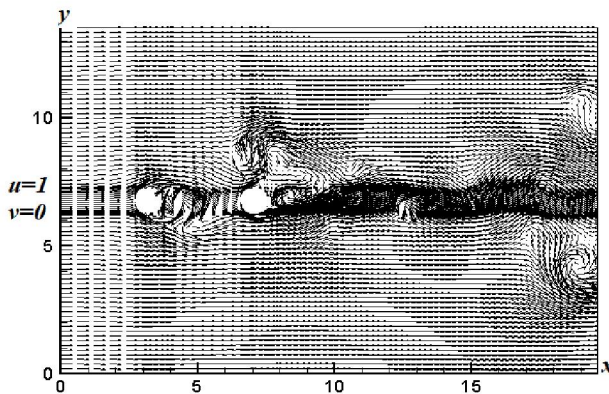


Фигура 9

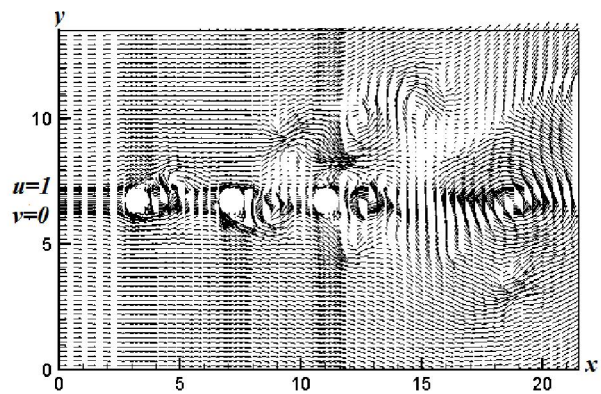


Фигура 10

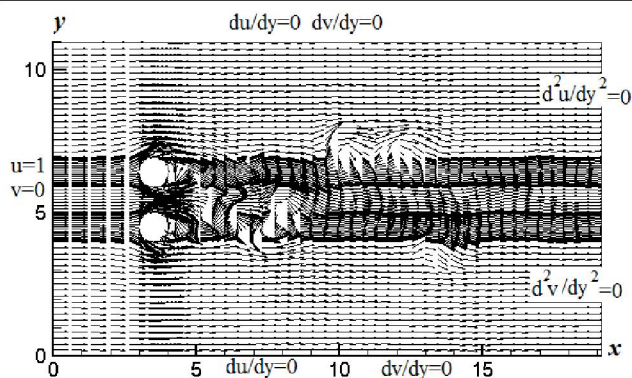
На фиг. 5.11,6.12,7.13,8.14 представлены поля вектора скоростей обтекания вязкой несжимаемой жидкостью цилиндров, полученные на сетках 400x200 в декартовой системе координат, потому как полярная система здесь абсолютно неприменима. Диаметры цилиндров равны $L=1$ м, кинематическая вязкость $\nu = 1.06 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, скорость набегающего потока $U=10$ м/с.



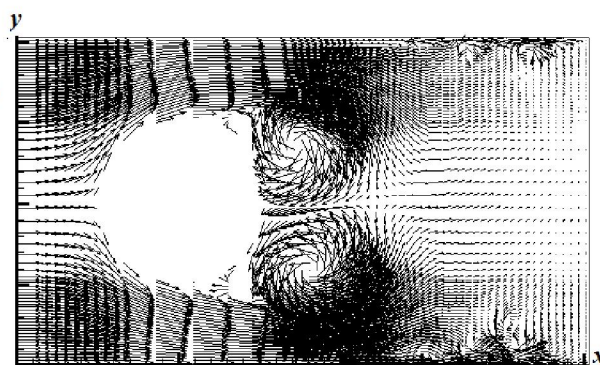
Фигура 5.11



Фигура 6.12



Фигура 7.13



Фигура 8.14

Численные расчеты проведены по недивергентным безразмерным уравнениям (4.1) для несжимаемой жидкости по полуявной схеме без «аппроксимационной вязкости» (эквивалентный термин - без «схемной диффузии»). Постановка граничных условий для всех цилиндров, как горизонтальных так и вертикальных, указаны на фиг. 7.13 обтекания 2-х вертикальных цилиндров. В начальный момент времени жидкость покоится.

На фиг. 8.14 представлено образование пары вихрей за цилиндром в начальные моменты времени. С развитием потока вихри за цилиндрами образуются цепочки вихрей, причем не стационарность течения сохраняется, несмотря на установившийся режим скорости внешнего потока $u=1$.

Выводы

Уравнения со степенными законами трения показали удовлетворительное совпадение с известными экспериментальными результатами. Очевидными достоинствами данных уравнений является их естественный вывод из законов физики и полное отсутствие каких-либо полуэмпирических констант, коих изобилие в полуэмпирических моделях. Теоретически и экспериментально доказана неприменимость в численных расчетах любых уравнений динамики жидкости и газа в искусственной *дивергентной* записи, потому как они имеют естественную *не дивергентную* форму при выводе из законов физики.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. -М.: «Наука», 1973г.
- [2] Устименко Б.П., В.Н.Змейков, А.А.Пишкин. Термоанемометрические методы исследования турбулентности в газовых потоках и факелах. - Алма-Ата: Изд-во «Наука» КазССР, 1983.С.179.
- [3] Турбулентность (принципы и применения).- М.:Мир,1980.С.585.
- [4] Устименко Б.П., Джакупов К.Б., Кроль В.О. Численное моделирование аэродинамики и горения в топочных и технологических устройствах. - Алма-Ата: изд-во «Наука»,1986. С.280.
- [5] Колмогоров А.Н. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости // Изв.АН СССР, сер.физ., (1942),6, №1-2.с.56-58
- [6] Лыков А.В.Тепломассобмен. - М.: «Энергия»,1972г. С.560.
- [7] Джакупов К.Б. Численный расчет турбулентного обтекания пластины с применением уравнений для пульсаций // Известия СО АН СССР, сер.техн.н., вып.1, 1985г., с.61-67.
- [8] Джакупов К.Б. Численное моделирование влияния пульсаций на вихревые следы за пластинами // Вестник Томского Гос. Универ., матем. и механ., №4(20), 2012г.
- [9] Jakupov K.B. RHEOLOGICAL LAWS OF VISCOUS FLUID DYNAMICS // Известия НАН РК, сер.физ.-мат.,1(293). 2014.с.51-55.
- [10] Джакупов К.Б. О гипотезе Стокса и реологических законах. -Алматы: «Гылым ордасы», 2014г. С.172.
- [11] U.Piomelli. Large-eddy simulation: achievements and challenges // Progress in Aerospace Sciences 35 (1999) 335-362.
- [12] Spalart P. R.: Strategies for turbulence modelling and simulations, Int. J. Heat Fluid Flow, 21, pp. 2, (2000).
- [13] Strelets, M.: Detached Eddy Simulation of massively separated flows. AIAA Paper 2001-879, (2001).
- [14] Menter, F.R., Egorov, Y, (2010): The Scale-Adaptive Simulation Method for Unsteady Turbulent Flow Predictions. Part 1: Theory and Model Description, J. Flow Turbulence and Combustion, Vol. 85, No. 1
- [15] Egorov, Y, Menter, F.R. and Cokljat D.: Scale-Adaptive Simulation Method for Unsteady Flow Predictions. Part 2: Application to Aerodynamic Flows, companion paper, J. Flow Turbulence and Combustion, Vol. 85, No. 1.
- [16] Rotta J. C.: *Turbulente Strömungen*. BG Teubner Stuttgart, (1972).

[17] Fröhlich J. and von Terzi, D.: Hybrid LES/RANS methods for simulation of turbulent flows, Progress in Aerospace Sciences, Vol.44, Issue 5, pp 349-377, 2008.

[18] Джакупов К.Б. Коррекции теоретических парадоксов механики сплошной среды. – Алматы: «Гылым ордасы», 2016г. С.417.

[19] Савельев И.В. Курс общей физики. - Т.1. М.: "Наука", 1977г. С.414.

[20] Аскарлова А.С., Болегенова С.А., Максимов В.Ю., Максутханова А.М., Шортанбаева Ж.К., Мукашева Г.К., Рахимбаева Н.Б., Конакбаев Б.О. Численное моделирование характеристик угольных теплостанций // Известия НАН РК, сер. физ.- мат., 1 (287), январь-февраль 2013.с.10-14.

REFERENCES

- [1] Loitsyanskii LG Fluid Mechanics. TH.: "SCIENCE" 1973.
- [2] Ustimenko B.P., Zmeykov V.N., Shishkin A.A. Hot-wire methods for studying turbulent of gas streams and fakelah.- Alma-Ata: "Science" of the Kazakh SSR, 1983.p.179.
- [3] Turbulence (Principles and Applications) - Wiley, 1980.S.585. [4]. Ustimenko B.P., Jakupov K.B., Kroll V.O. Numeral design aerodynamics and burning in fire-box and technological device.- Alma-Ata: "Science" of the Kazakh SSR, 1986. p.280.
- [5] Kolmogorov Equations of turbulent motion of an incompressible fluid // Izv.An USSR ser.fiz., (1942), 6, №1-2.s.56-58.
- [6] Lykov A.V. Teplomassobmen. - M.: "Energy", 1972. S.560.
- [7] Jakupov K.B. Numerical calculation of turbulent flow over a plate with the equations for pulsations // Bulletin SB RAS, ser.tehn.n., Issue 1, 1985., S.61-67.
- [8] Jakupov K.B. Numerical simulation of the effect of fluctuations on the vortices behind the plate // Westnick Tomsk University. Univer., Mathematics and Mechanics, №4 (20), 2012., S.80-87.
- [9] Jakupov K.B. RHEOLOGICAL LAWS OF VISCOUS FLUID DYNAMICS // Proceedings of the National Academy of Sciences of Kazakhstan, ser.fiz.- mat. 1(293). In 2014.p.51-55.
- [10] Jakupov K.B. About gipotese of Stokes and rheological laws. -Almaty "Gylym Ordasy", P.172.
- [11] U.Piomelli. Large-eddy simulation: achievements and challenges // Progress in Aerospace Sciences 35 (1999) 335-362.
- [12] Spalart P. R.: Strategies for turbulence modelling and simulations, Int.J. Heat Fluid Flow, 21, pp. 2, (2000).
- [13] Strelets, M.: Detached Eddy Simulation of massively separated flows. AIAA Paper 2001-879, (2001).
- [14] Menter, F.R., Egorov, Y, (2010): The Scale-Adaptive Simulation Method for Unsteady Turbulent Flow Predictions. Part 1: Theory and Model Description, J. Flow Turbulence and Combustion, Vol. 85, No. 1
- [15] Egorov, Y, Menter, F.R. and Cokljat D.: Scale-Adaptive Simulation Method for Unsteady Flow Predictions. Part 2: Application to Aerodynamic Flows, companion paper, J. Flow Turbulence and Combustion, Vol. 85, No. 1.
- [16] Rotta J. C.: *Turbulente Strömungen*. BG Teubner Stuttgart, (1972).
- [17] Fröhlich J. and von Terzi, D.: Hybrid LES/RANS methods for simulation of turbulent flows, Progress in Aerospace Sciences, Vol.44, Issue 5, pp 349-377, 2008.
- [18] Jakupov K.B. Correction of continuum mechanics theoretical paradoxes.- Almaty "Gylym Ordasy", 2016. P.417.
- [19] Saveliev I.V. Course general physics.- T.I. M.: "Nauka", 1977. P.414.
- [20] Askarova A.S. Bolegenova S.A., Maksimov V.U., Maksutchanova A.M., Shortanbaeva J.K., Mukasheva G.K., Рахимбаева Rachimbaeva N.B., Konaqbaev B.O. // Chislennoe modelirovanie karakteristik ugolnich teplostanci // Proceedings of the National Academy of Sciences of Kazakhstan, ser.fiz.- mat. 1(287). In 2013.p.10-14

К. Б. Жақып-тегі

ҚР БҒМ Математика және математикалық моделдеу институты, Алматы, Қазақстан

$k - \varepsilon$, LES, РЕЙНОЛЬДС ЖӘНЕ ДӘРЕЖЕЛІ МОДЕЛДЕР ТУРАЛЫ

Аннотация. Турбуленттік ағыстарды тұйықталмаған Рейнольдс теңдеулерімен және жоғарғы текті моменттерге Келлер-Фридман жасаған шектелмеген теңдеулермен немесе LES – әдіспен модельдеудің жалғандығы уақыт бойынша орталандыратын период T сондай барлық турбулент ағыстың нүктелеріне және барлық гидродинамика функцияларына тұрақты болып табымайтындығында тұр. Осы жағдай физикалық мәні жоқ және құрастырылуы абсурд жартылай эмпирикалық математикалық модельдерге әкеліп соқты. Оның ішінде аталмаш тиімді турбуленттік тұтқырлықтың еселеуінің μ_T Колмогоровтың идеясына негізделген $k - \varepsilon$ ұйялығы да бар. « $k - \varepsilon$ » әдістемелерінің қателігі үйкеліс күштерінің әсерлігімен және кинетикалық жігерді тасымалдау теңдеуімен қайшыланғаны, олармен қатар пульсациялардың турбуленттік кинетикалық жігерінің теңдеуімен қайшыланғаны. Осы мақалада тұтқырлы сұйықтықтар мен газдардың ағыстарын модельдеу үшін физикалық үйкеліс заңдарын $\vec{F}_{np} = -k_m \vec{v}^m, m=1,3,5,7,9, \dots$ пайдалану қажет екені негізделін-ген. Бірақта дәрежелер көрсеткіштері дақ сандар болу керек. Олар осы нүктедегі жылдамдықтың компоненттерінен тәуелді. Осыған сәйкес беттеспеген кернеулер тензоры құрылған және қозғалыс теңдеулері. Осылай жасалынған модельдерде жартылай эмпирикалық константалар жоқ. Ньютон үйкеліс заңы және Навье теңдеулері жеке жағдай ретінде шыға береді, көрсеткіш бірге тең болғанда $m = 1$.

Тірек сөздер: сұйықтық, пульсация, ламинарлық, турбуленттік.