N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 6, Number 310 (2016), 83 – 90

B.S. Kalmurzayev

Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
birzhan.kalmurzayev@gmail.com

ON ASSESSMENTS OF EBMEDDABILITY L_m^0 IN ROGERS SEMILATTICE OF TWO-ELEMENT FAMILIES OF SETS IN THE HIERARCHY OF ERSHOV

Abstract. It is well known that the structure of computable enumerable m-degrees with respect to m-reducibility is very complicated. It forms an upper semilattice which has a universal degree, an infinite chain and anti-chain. And we know that cardinality of this semilattice is infinite. This paper presents the assessments of embeddability the semilattice of computable enumerable m-degrees into Rogers semilattice of two-element families of sets of finite levels in the hierarchy of Ershov. Also, using the examples of families with one-element Rogers semilattice, whose evaluation at any level lower than our assessments, it is proved that these assessments are not improvable.

Key words. Semilattice of computably enumerable m degrees, Rogers semilattice, hierarchy of Ershov, computably enumerable sets, decidable numbering.

УДК 510.54

Б.С. Калмурзаев

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан
birzhan.kalmurzayev@gmail.com

ОБ ОЦЕНКАХ ВЛОЖИМОСТИ L_m^0 В ПОЛУРЕШЕТКУ РОДЖЕРСА ДВУХЭЛЕМЕНТНЫХ СЕМЕЙСТВ МНОЖЕСТВ ИЕРАРХИИ ЕРШОВА

Аннотация. Хорошо известно, что структура вычислимо перечислимых m-степеней относительно m-сводимости очень сложная. Она образует верхнюю полурешетку, которая имеет универсальную степень, бесконечную цепь и анти-цепь. И известно, что мощность этой полурешетки бесконечна. В данной работе приведены оценки вложимости полурешетки вычислимо перечислимых m-степеней в полурешетку Роджерса двухэлементных семейств множеств конечных уровней иерархии Ершова. Также с помощью примеров семейств с одноэлементной полурешеткой Роджерса, оценки которых на любом уровне ниже, чем наши оценки, доказано, что эти оценки являются неулучшаемыми.

Ключевые слова. Полурешетка, полурешетка Роджерса, иерархия Ершова, вычислимо перечислимые множества, разрешимая нумерация.

Исследование вычислимых семейств множеств иерархии Ершова было инициировано работами [1], [2], в которых был предложен общий подход к введению понятия вычислимой нумерации для широкого класса семейств конструктивных объектов и сформулирована программа их изучения в терминах свойств так называемых полурешеток Роджерса.

Полученные к настоящему времени результаты о полурешетках вычислимых нумераций семейств множеств иерархии Ершова выявили новые феномены, не присущие классическим вычислимым нумерациям семейств вычислимо перечислимых (в.п.) множеств. В частности, было доказано существование семейств, состоящих из двух вложенных множеств, у которых полурешетка Роджерса является одноэлементной [3].

Приведем некоторые понятия из теории вычислимости, используемые в работе. Понятие n-вычислимо перечислимого (n-в.п.) множества было предложено C.J. Ash, J.F. Knight в индуктивной форме [4]:

Определение 1. 1-*в.п.* множества – это в точности в.п. множества, а каждое $(n+1)$-*в.п.* множество – это разность некоторого вычислимо перечислимого и некоторого n-в.п. множеств.

Таким образом, 2-в.п. множества имеют вид $R_1 \setminus R_2$, где R_1, R_2 – в.п. множества, поэтому их еще называют разностями в.п. множеств (кроме того, можно утверждать, что $R_1 \subseteq R_2$), 3-в.п. множества имеют вид $R_1 \setminus (R_2 \setminus R_3) = (R_1 \setminus R_2) \cup R_3$, где $R_1 \subseteq R_2 \subseteq R_3$ и R_1, R_2, R_3 – в.п. множества, и т.д. n-в.п. множества образуют уровень Σ_n^{-1} иерархии Ершова [5], о них также говорят как о Σ_n^{-1}-множествах.

Для определения бесконечных уровней иерархии Ершова, введенных в статье [6], мы используем подход, предложенный позже в монографии [4]. Пусть $\mathcal{O}$ – система ординальных обозначений Клини (подробности см. в [4], [7]). Для $a \in \mathcal{O}$ через $|a|_{\mathcal{O}}$ обозначается ординал, чьим обозначением является a. Ординальные обозначения используются для определения бесконечных уровней иерархии Ершова.

Определение 2. Пусть a является обозначением ненулевого вычислимого ординала. Говорят, что множество A принадлежит классу Σ_a^{-1} иерархии Ершова, если существуют вычислимые функции $f(z,t)$ и $h(z,t)$ такие, что для всех $z, t \in \omega$ выполняются следующие условия:

1) $A(z) = \lim_t f(z,t)$, причем $f(z,0) = 0$;
2) $h(z,0) = a \;\&\; h(z,t+1) \leq_{\mathcal{O}} h(z,t)$;
3) $f(z,t+1) \neq f(z,t) \Rightarrow h(z,t+1) \neq h(z,t)$.

Функцию g назовем функцией перемен для A относительно f. Σ_a^{-1}-аппроксимацией Σ_a^{-1}-множества A называется пара функций $\langle f, h\rangle$, удовлетворяющих условиям 1)-3) выше.

Хорошо известно, что для конечных ординалов их Клиневские обозначения однозначно определены, в частности, для ординала n

$$\Big|\underbrace{2^{2^{\cdots^{2}}}}_{n-раз}\Big|_{\mathcal{O}} = n.$$

Для множеств конечного уровня иерархии Ершова будем использовать аналог определения 2, заменив значения функции h на ординалы.

Приведем некоторые понятия из теории нумераций. Сюръективное отображение α множества натуральных чисел ω на непустое множество $\mathcal{A}$ называется нумерацией множества $\mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{A}$ – семейство множеств из класса Σ_n^{-1}, $n \geq 1$, иерархии Ершова. Нумерация $\alpha: \omega \to \mathcal{A}$ называется Σ_n^{-1}-*вычислимой*, если

$$\{\langle x, n\rangle \mid x \in \alpha(n)\} \in \Sigma_n^{-1}.$$

Следовательно, α является Σ_n^{-1}-вычислимой нумерацией семейства $\mathcal{A}$, если существует Σ_n^{-1}-аппроксимация множества $\{\langle n, x\rangle : x \in \alpha(n)\}$, т.е. вычислимые функции $f(n,x,t)$ и $h(n,x,t)$ такие, что

$$\alpha(n)(x) = \lim_t f(n,x,t)\,,\, f(n,x,0) = 0$$

для всех $n, x \in \omega$, а $h(n,x,t)$ является функцией перемен для универсального множества $\{\langle x, n\rangle \mid x \in \alpha(n)\}$ нумерации α относительно f.

Понятие Σ_1^{-1}-вычислимой нумерации совпадает с классическим понятием вычислимой нумерации семейства рекурсивно перечислимых множеств [4]. Множество всех Σ_n^{-1}-вычислимых нумераций семейства $\mathcal{A}$ обозначим через $\mathrm{Com}_n^{-1}(\mathcal{A})$. Нумерация α семейства $\mathcal{A}$ *сводится* к нумерации β этого семейства ($\alpha \leq \beta$), если существует рекурсивная функция f, для которой $\alpha(x) = \beta(f(x))$ для всех $x \in \omega$. Если $\alpha \leq \beta$ и $\beta \leq \alpha$, то нумерации α и β называются эквивалентными ($\alpha \equiv \beta$). Обозначим через $\deg(\alpha)$ *степень нумерации* α, т.е. совокупность нумерации $\{\beta | \beta \equiv \alpha\}$. Отношение сводимости нумерации является предпорядком на $\mathrm{Com}_n^{-1}(\mathcal{A})$ и индуцирует отношение частичного порядка на множестве степеней нумерации из $\mathrm{Com}_n^{-1}(\mathcal{A})$, которое также будем обозначать через $\leq$. Частично упорядоченное множество

$$\mathcal{R}_n^{-1}(\mathcal{A}) \rightleftharpoons \langle \{\deg(\alpha) | \alpha \in \mathrm{Com}_n^{-1}(\mathcal{A})\}, \leq \rangle$$

является верхней полурешеткой, которая называется полурешеткой Роджерса семейства $\mathcal{A}$.

Пусть A, B – произвольные множества, а R – собственное подмножество множества ω. Определим нумерацию ν_R семейства $S = \{A, B\}$, полагая

$$\nu_R(x) = \begin{cases} A, \text{если } x \in R; \\ B, \text{если } x \notin R, \end{cases}$$

для каждого $x \in \omega$. $\nu_R \leq \nu_Q$ для любых множеств R, Q тогда и только тогда, когда $R \leq_m Q$. Кроме того, $\nu_R \oplus \nu_Q \equiv \nu_{R \oplus Q}$. Таким образом, отображение $R \mapsto \nu_R$ индуцирует изоморфизм верхней полурешетки m-степеней L_m и полурешетки всех нумераций семейства S. В случае, когда множества A, B, R являются в.п. множествами, причем $B \subset A$, нумерация ν_R является Σ_1^{-1}-вычислимой и отображение $R \mapsto \nu_R$ индуцирует изоморфизм верхней полурешетки вычислимо перечислимых m-степеней L_m^0 и полурешетки Роджерса $\mathcal{R}_1^{-1}(S)$ семейства S [8].

Предложение. *Для любого $n \geq 1$ и для любых Σ_n^{-1}-множеств A, B нумерация ν_R является Σ_{2n}^{-1}-вычислимой, если число n – четное и Σ_{2n+1}^{-1}-вычислимой, если число n – нечетное.*

Доказательство. Пусть число n – четное. Пусть R – произвольное несобственное в.п. множество и пусть $\langle f_A, h_A \rangle, \langle f_B, h_A \rangle$ – аппроксимационные функции для множеств A, B соответственно. Строим аппроксимационные функции $\langle f_{\nu_R}, h_{\nu_R} \rangle$ для нумерации ν_R следующим образом: для любых $x, z, t \in \omega$ если $x \notin R^t$, то пусть

$$f_{\nu_R}(x, z, t) = f_B(z, t),$$
$$h_{\nu_R}(x, z, t) = n + h_B(z, t).$$

и, если $x \in R^t$, то пусть

$$f_{\nu_R}(x, z, t) = f_A(z, t),$$
$$h_{\nu_R}(x, z, t) = h_A(z, t).$$

Покажем, что пара функций $\langle f_{\nu_R}, h_{\nu_R} \rangle$ удовлетворяет условиям 1)-3) в определении. Для любых $x, z \in \omega$:

1) $f_{\nu_R}(x, z, 0) = f_B(z, 0) = 0$.

2) $h_{\nu_R}(x, z, 0) = n + h_B(z, 0) = n + n = 2n$.

Если $x \notin R^{t+1}$, то $h_{\nu_R}(x, z, t+1) = n + h_B(z, t+1) \leq n + h_B(z, t) = h_{\nu_R}(x, z, t)$.

Если $x \in R^{t+1}$ и $x \notin R^t$, то $h_{\nu_R}(x, z, t+1) = h_A(z, t+1) \leq n \leq n + h_B(z, t) = h_{\nu_R}(x, z, t)$.

Если $x \in R^t$, то $h_{\nu_R}(x, z, t+1) = h_A(z, t+1) \leq h_A(z, t) = h_{\nu_R}(x, z, t)$.

3) Пусть $f_{\nu_R}(x, z, t+1) \neq f_{\nu_R}(x, z, t)$. Покажем, что $h_{\nu_R}(x, z, t+1) \neq h_{\nu_R}(x, z, t)$.

Если $x \notin R^{t+1}$, то $f_{\nu_R}(x, z, t+1) = f_B(z, t+1)$ & $f_{\nu_R}(x, z, t) = f_B(z, t+1) \Rightarrow f_B(z, t+1) \neq f_B(z, t) \Rightarrow h_B(z, t+1) \neq h_B(z, t) \Rightarrow h_{\nu_R}(x, z, t+1) \neq h_{\nu_R}(x, z, t)$.

Если $x \in R^{t+1}$ и $x \notin R^t$, то $f_{\nu_R}(x, z, t+1) = f_A(z, t+1)$ & $f_{\nu_R}(x, z, t) = f_B(z, t)$ & $h_{\nu_R}(x, z, t+1) = h_A(z, t+1)$ & $h_{\nu_R}(x, z, t) = h_B(z, t) \Rightarrow f_A(z, t+1) \neq f_B(z, t)$. Рассмотрим 2 случая: первый случай $h_B(z, t) > 0$. В этом случае $h_{\nu_R}(x, z, t) = n + h_B(z, t) > n$ и $h_{\nu_R}(x, z, t+1) = h_A(z, t+1) \leq n$ и отсюда следует, что $h_{\nu_R}(x, z, t+1) \neq h_{\nu_R}(x, z, t)$.

Второй случай $h_B(z, t) = 0$. В этом случае n – четное число, следовательно, $f_B(z, t) = 0$. Это означает, что $f_B(z, t) \neq f_A(z, t+1) = 1$. Следовательно, $h_A(z, t+1) < n$. Значит, $h_{\nu_R}(x, z, t+1) = h_A(z, t+1) < n$ и $h_{\nu_R}(x, z, t) = n + h_B(z, t) = n$. Следовательно, $h_{\nu_R}(x, z, t+1) \neq h_{\nu_R}(x, z, t)$.

Если $x \in R^t$, то $f_{\nu_R}(x,z,t+1) = f_A(z,t+1)$ & $f_{\nu_R}(x,z,t) = f_A(z,t+1) \Rightarrow f_A(z,t+1) \neq f_A(z,t) \Rightarrow h_A(z,t+1) \neq h_A(z,t) \Rightarrow h_{\nu_R}(x,z,t+1) \neq h_{\nu_R}(x,z,t)$.

Пусть теперь n – четное число. Также пусть R – произвольное несобственное в.п. множество и пусть $\langle f_A, h_A\rangle, \langle f_B, h_A\rangle$ – аппроксимационные функции для множеств A, B соответственно. Строим аппроксимационные функции $\langle f_{\nu_R}, h_{\nu_R}\rangle$ для нумерации ν_R следующим образом: для любых $x, z, t \in \omega$ если $x \notin R^t$, то пусть

$$f_{\nu_R}(x,z,t) = f_B(z,t),$$
$$h_{\nu_R}(x,z,t) = n + 1 + h_B(z,t),$$

И, если $x \in R^t$, то пусть

$$f_{\nu_R}(x,z,t) = f_A(z,t),$$
$$h_{\nu_R}(x,z,t) = h_A(z,t).$$

Покажем, что пара функций $\langle f_{\nu_R}, h_{\nu_R}\rangle$ удовлетворяет условиям 1)-3) в определении. Для любых $x, z \in \omega$:

4) $f_{\nu_R}(x,z,0) = f_B(z,0) = 0$.

5) $h_{\nu_R}(x,z,0) = n + h_B(z,0) = n + 1 + n = 2n + 1$.

Если $x \notin R^{t+1}$, то $h_{\nu_R}(x,z,t+1) = n + 1 + h_B(z,t+1) \leq n + 1 + h_B(z,t) = h_{\nu_R}(x,z,t)$.

Если $x \in R^{t+1}$ и $x \notin R^t$, то $h_{\nu_R}(x,z,t+1) = h_A(z,t+1) \leq n < n + 1 + h_B(z,t) = h_{\nu_R}(x,z,t)$.

Если $x \in R^t$, то $h_{\nu_R}(x,z,t+1) = h_A(z,t+1) \leq h_A(z,t) = h_{\nu_R}(x,z,t)$.

6) Пусть $f_{\nu_R}(x,z,t+1) \neq f_{\nu_R}(x,z,t)$. Покажем, что $h_{\nu_R}(x,z,t+1) \neq h_{\nu_R}(x,z,t)$.

Если $x \notin R^{t+1}$, то $f_{\nu_R}(x,z,t+1) = f_B(z,t+1)$ & $f_{\nu_R}(x,z,t) = f_B(z,t+1) \Rightarrow f_B(z,t+1) \neq f_B(z,t) \Rightarrow h_B(z,t+1) \neq h_B(z,t) \Rightarrow h_{\nu_R}(x,z,t+1) \neq h_{\nu_R}(x,z,t)$.

Если $x \in R^{t+1}$ и $x \notin R^t$, то $f_{\nu_R}(x,z,t+1) = f_A(z,t+1)$ & $f_{\nu_R}(x,z,t) = f_B(z,t)$ & $h_{\nu_R}(x,z,t+1) = h_A(z,t+1) \leq n$ & $h_{\nu_R}(x,z,t) = n + 1 + h_B(z,t) > n \Rightarrow h_A(z,t+1) \neq h_B(z,t)$.

Если $x \in R^t$, то $f_{\nu_R}(x,z,t+1) = f_A(z,t+1)$ & $f_{\nu_R}(x,z,t) = f_A(z,t+1) \Rightarrow f_A(z,t+1) \neq f_A(z,t) \Rightarrow h_A(z,t+1) \neq h_A(z,t) \Rightarrow h_{\nu_R}(x,z,t+1) \neq h_{\nu_R}(x,z,t)$.

Учитывая предложение, можно сказать, что для любого двухэлементного семейства Σ_n^{-1}-множеств $S = \{A, B\}$ полурешетка L_m^0 изоморфно вложится в полурешетку Роджерса $\mathcal{R}_{2n+1}^{-1}(S)$. А если n – четное, то вложимость верна и для полурешетки Роджерса $\mathcal{R}_{2n}^{-1}(S)$. Покажем, что оценки вложимости полурешетки L_m^0 в полурешетку Роджерса не улучшаются.

Теорема. *Для любого* $n \geq 1$ *найдется двухэлементное семейство* Σ_n^{-1}*-множеств* $S = \{A, B\}$ *такое, что*

$$|\mathcal{R}_n^{-1}(S)| = |\mathcal{R}_{n+1}^{-1}(S)| = \cdots = |\mathcal{R}_{2n-1}^{-1}(S)| = 1$$

Доказательство. Строим разрешимую Σ_n^{-1}-вычислимую нумерацию α следующим образом: $\alpha(0) = A$ и $\alpha(x) = B$ для всех $x \geq 1$. Пусть π_k – все Σ_{2n-1}^{-1}-вычислимые нумерации всех Σ_{2n-1}^{-1}-вычислимых семейств. Пусть $a(k,x,i)$ – произвольная 1 – 1-вычислимая функция. Будем строить аппроксимационные функции f_A, h_A, f_B, h_B для множеств A и B соответственно и функции g_k ($k \in \omega$), удовлетворяющие следующему требованию: Если π_k – Σ_{2n-1}^{-1}-вычислимая нумерация семейства S, то g_k всюду определена и сводит π_k к α.

Стратегия для g_k.

Определяем $f_A(a(k,x,0),t) = 1$, $h_A(a(k,x,0),t) = n - 1$, $f_B(a(k,x,1),t) = 1$, $h_B(a(k,x,1),t) = n - 1$. Ждём, пока $f_{\pi_k}(x, a(k,x,0),t)$ или $f_{\pi_k}(x, a(k,x,1),t)$ не поменяют свои значения.

<u>Случай 1.</u> Если $g_k(x)$ не определена, $f_{\pi_k}(x, a(k,x,0), t+1) = f_A(a(k,x,0),t)$ и $h_A(a(k,x,0),t) \neq 0$, то пусть $f_A(a(k,x,0),t+1) = \overline{sg}(f_A(a(k,x,0),t))$ и $h_A(a(k,x,0),t+1) =$

$h_A(a(k,x,0),t)-1$. А если $g_k(x)$ не определена, $f_{\pi_k}(x,a(k,x,1),t+1)=f_B(a(k,x,1),t)$ и $h_B(a(k,x,1),t)\neq 0$, то пусть $f_B(a(k,x,1),t+1)=\overline{sg}(f_B(a(k,x,1),t))$ и $h_B(a(k,x,1),t+1)=h_B(a(k,x,1),t)-1$.

Случай 2. Если g_k не определена, $f_{\pi_k}(x,a(k,x,0),t+1)=f_A(a(k,x,0),t)$ и $h_A(a(k,x,0),t)=0$, то пусть $g_k(x)=0$. А если g_k не определена, $f_{\pi_k}(x,a(k,x,1),t+1)=f_B(a(k,x,1),t)$ и $h_B(a(k,x,1),t)=0$, то пусть $g_k(x)=1$.

Случай 3. Если $g_k(x)$ определена и $g_k(x)=1$, то пусть $f_A(a(k,x,1),t+1)=\overline{sg}\left(f_{\pi_k}(x,a(k,x,1),t+1)\right)$ и $h_A(a(k,x,1),t+1)=h_{\pi_k}(x,a(k,x,1),t+1)$. Если $g_k(x)$ определена и $g_k(x)=0$, то пусть $f_B(a(k,x,0),t+1)=\overline{sg}\left(f_{\pi_k}(x,a(k,x,0),t+1)\right)$ и $h_B(a(k,x,0),t+1)=h_{\pi_k}(x,a(k,x,0),t+1)$.

Конструкция стратегии

Шаг 0. Пусть $f_A(x,0)=0$, $h_A(x,0)=n$, $f_B(x,0)=0$, $h_B(x,0)=n$ для всех $x\in\omega$. И $g_k^0(x)$ не определена для всех $k,x\in\omega$. И пусть $f_\alpha(x,y,0)=0$, $h_\alpha(x,y,0)=n$ для всех $x,y\in\omega$. Переходим к следующему шагу.

Шаг t+1. Пусть $m=l(t)$, $k=l(m)$, $x=r(m)$ и выполняем инструкции следующих случаев.

Случай 1. Если t наименьший номер такой, что $l(t)=m$, то пусть $f_A(a(k,x,0),t+1)=1$, $h_A(a(k,x,0),t+1)=n-1$ и $f_B(a(k,x,1),t+1)=1$, $h_B(a(k,x,1),t+1)=n-1$. Переходим в конец шага.

Случай 2. Если найдется $t'<t$ такой, что $l(t')=l(t)=m$ и $g_k^t(x)$ не определена, то выполняем инструкции следующих подслучаев.

Подслучай 2.1. Если $h_A(a(k,x,0),t)\neq 0$ и $h_B(a(k,x,1),t)\neq 0$, то пусть

$$f_A(a(k,x,0),t+1)=\overline{sg}\left(f_{\pi_k}(x,a(k,x,0),t+1)\right),$$

$$h_A(a(k,x,0),t+1)=h_A(a(k,x,0),t)-\overline{sg}\left|f_{\pi_k}(x,a(k,x,0),t+1)-f_A(a(k,x,0),t)\right|,$$

$$f_B(a(k,x,1),t+1)=\overline{sg}\left(f_{\pi_k}(x,a(k,x,1),t+1)\right),$$

$$h_B(a(k,x,1),t+1)=h_B(a(k,x,1),t)-\overline{sg}\left|f_{\pi_k}(x,a(k,x,1),t+1)-f_B(a(k,x,1),t)\right|.$$

Переходим в конец шага.

Подслучай 2.2. Если $h_A(a(k,x,0),t)=0$ и $f_A(a(k,x,0),t)=f_{\pi_k}(x,a(k,x,0),t+1)$, то пусть $g_k^{t+1}(x)=0$. Переходим в конец шага.

Подслучай 2.3. Если подслучай 2.2. не выполняется, $h_B(a(k,x,1),t)=0$ и $f_{\pi_k}(x,a(k,x,1),t+1)=f_B(a(k,x,1),t)$, то пусть $g_k^{t+1}=1$. Переходим в конец шага.

Подслучай 2.4. Если подслучаи 2.1.-2.3. не выполняются, то пусть $f_A(a(k,x,0),t+1)=f_A(a(k,x,0),t)$, $h_A(a(k,x,0),t+1)=h_A(a(k,x,0),t)$, $f_B(a(k,x,1),t+1)=f_B(a(k,x,1),t)$, $h_B(a(k,x,1),t+1)=h_B(a(k,x,1),t)$. Переходим в конец шага.

Случай 3. Если $g_k^t(x)$ определена, то выполняем инструкции следующих подслучаев.

Подслучай 3.1. Если $g_k^t(x)=0$, то пусть

$$f_B(a(k,x,0),t+1)=\overline{sg}\left(f_{\pi_k}(x,a(k,x,0),t+1)\right),$$

$$h_B(a(k,x,0),t+1)=h_{\pi_k}(x,a(k,x,0),t+1).$$

Переходим в конец шага.

Подслучай 3.2. Если $g_k^t(x)=1$, то пусть

$$f_A(a(k,x,1),t+1)=\overline{sg}\left(f_{\pi_k}(x,a(k,x,1),t+1)\right),$$

$$h_A(a(k,x,1),t+1)=h_{\pi_k}(x,a(k,x,1),t+1).$$

Переходим в конец шага.

Конец шага. Для всех $m, y \in \omega$, если $g_m^t(y)$ определена, то пусть $g_m^{t+1}(y) = g_m^t(y)$. Для всех s таких, что $s \neq a(k,x,0)$ и $s \neq a(k,x,1)$ пусть $f_A(s,t+1) = f_A(s,t)$, $h_A(s,t+1) = h_A(s,t)$, $f_B(s,t+1) = f_B(s,t)$, $h_B(s,t+1) = h_B(s,t)$. Для всех $x \geq 1$ и y пусть $f_\alpha(0,y,t+1) = f_A(y,t+1)$, $h_\alpha(0,y,t+1) = h_A(y,t+1)$, $f_\alpha(x,y,t+1) = f_B(y,t+1)$, $h_\alpha(0,y,t+1) = h_B(y,t+1)$. Переходим к следующему шагу.

Свойства конструкции

1. Для всех $i \geq 1$ $\alpha(i) = \alpha(1)$. В частности, $S = \{\alpha(1), \alpha(1)\}$.

2. Для каждого $y \in \alpha(0) \cup \alpha(1)$ найдется $i \leq 1$ и $k, x \in \omega$ такие, что $y = a(k,x,i)$.

3. Для всех $k, x, t \in \omega$, если $g_k^t(x)$ определена, тогда $g_k^s(x)$ определена и $g_k^t(x) = g_k^s(x)$ для всех $s \geq t$. В частности, каждая g_k является частично рекурсивной функцией.

4. Для каждого k, если π_k — нумерация семейства S, тогда g_k всюдуопределена.

Свойства 1-4 очевидны.

5. $S \subseteq \Sigma_n^{-1}$ и α является Σ_n^{-1}-вычислимой нумерацией семейства S.

Доказательство. В наших множествах все элементы вида $a(k,x,0)$ или $a(k,x,1)$ (по свойству 2.) Для доказательства этого свойства нам достаточно показать, что функции h_A и h_B корректно определены. По конструкции в нулевом шаге для всех x $h_A(x,0) = h_B(x,0) = n$.

Для h_A по конструкции видно, что для элементов вида $a(k,x,0)$ функция h_A корректно определена , т.е. для любого t:

1) $h_A(a(k,x,0),0) = n$,

2) $f_A(a(k,x,0),t+1) \neq f_A(a(k,x,0),t) \Rightarrow h_A(a(k,x,0),t+1) \neq h_A(a(k,x,0),t)$,

3) $h_A(a(k,x,0),t+1) \leq h_A(a(k,x,0),t)$.

А для элементов вида $a(k,x,1)$ ясно, что $h_A(a(k,x,1),0) = n$. По конструкции $f_A(a(k,x,1),t)$ меняет своё значение лишь тогда, когда $g_k^t(x) = 1$. Пусть t_0 — наименьший шаг, когда $g_k^t(x)$ определился и $g_k^t(x) = 1$. По подслучаю 2.3. $f_{\pi_k}(x, a(k,x,1), t_0) = f_B(a(k,x,1), t_0 - 1) = 1$ и $f_A(a(k,x,1),t_0) = \overline{sg}\left(f_{\pi_k}(x,a(k,x,1),t_0)\right) = 0 = f_A(a(k,x,1),s)$ для любых $s \leq t_0$. Значит, для $t \leq t_0$ второе условие выполняется. А для $t > t_0$ очевидно по подслучаю 3.2. По конструкции видно то, чтобы функция $g_k(x)$ определилась и равнялась 1, $\pi_k(x)$ должен как минимум n колебаний истратить. Значит, $h_{\pi_k}(x,a(k,x,1),t_0) \leq 2n - 1 - n = n - 1$. Так как $f_A(a(k,x,1),s) = n$ для всех $s \leq t_0$, монотонность функции сохраняется.

А корректность h_B доказывается точно так же.

6. Для любого $k \in \omega$, если π_k – нумерация семейства S, то $\pi_k(x) = \alpha\big(g_k(x)\big)$ для всех $x \in \omega$.

Доказательство. Пусть π_k – нумерация семейства S и пусть x – произвольное число. По свойству 4 функция g_k всюду определена и по конструкции $g_k(x) = 0$ или $g_k(x) = 1$.

Рассмотрим случай, когда $g_k(x) = 0$. Докажем, что $\pi_k(x) = \alpha(0) = A$. Пусть t_0 – такой наименьший шаг, что $g_k^t(x)$ определена. Пойдем от противного, пусть $\pi_k(x) = B$. Так как $g_k(x) = 0$ в конструкции, начиная с момента t_0, всегда будет срабатывать подслучай 3.1., и в пределе

$$lim_t\big(f_B(a(k,x,0),t)\big) = lim_t\left(\overline{sg}\left(f_{\pi_k}(x,a(k,x,0),t)\right)\right) \Rightarrow$$
$$lim_t\big(f_B(a(k,x,0),t)\big) \neq lim_t\left(f_{\pi_k}(x,a(k,x,0),t)\right).$$

Это противоречит нашему предположению $\pi_k(x) = B$.

А случай, когда $g_k(x) = 1$ доказывается аналогично.

7. $|\mathcal{R}_n^{-1}(S)| = |\mathcal{R}_{n+1}^{-1}(S)| = \cdots = |\mathcal{R}_{2n}^{-1}(S)| = 1.$

Доказательство. По сути, нам достаточно доказать, что $|\mathcal{R}_{2n-1}^{-1}(S)| = 1$. Если бы для некоторого $n \leq m < 2n - 1$ была бы $|\mathcal{R}_m^{-1}(S)| > 1$, то $|\mathcal{R}_{2n}^{-1}(S)| > 1$, так как полурешетка Роджерса некоторого уровня содержит все нумерации и их структуры полурешеток меньших уровней. Так как π_k – все Σ_{2n-1}^{-1}-вычислимые нумерации всех Σ_{2n-1}^{-1}-вычислимы семейств, то если π_k нумерация -нумерация нашего семейства, то по свойству 6, π_k сводится к разрешимой Σ_n^{-1}-вычислимой нумерации α через функцию g_k. Отсюда следует, что $|\mathcal{R}_{2n-1}^{-1}(S)| = 1$.

Следствие. Для нечетных n найдется двухэлементное семейство Σ_n^{-1}-множеств $S = \{A, B\}$ такое, что $\left|\mathcal{R}_{2n}^{-1}(S)\right| = 1$.

Доказательство. Строим разрешимую Σ_n^{-1}-вычислимую нумерацию α следующим образом: $\alpha(0) = A$ и $\alpha(x) = B$ для всех $x \geq 1$. Пусть π_k – все Σ_{2n}^{-1}-вычислимые нумерации всех Σ_{2n}^{-1}-вычислимых семейств. Пусть $a(k, x, i)$ – произвольная 1 – 1-вычислимая функция. Будем строить аппроксимационные функции f_A, h_A, f_B, h_B для множеств A и B соответственно и функции g_k $(k \in \omega)$, удовлетворяющие следующему требованию: Если $\pi_k - \Sigma_{2n}^{-1}$-вычислимая нумерация семейства S, тогда g_k всюдуопределена и сводит π_k к α.

Стратегия и конструкция будут такими же, как в теореме. Все свойства теоремы тоже выполняются и доказаваются также, за исключением свойства 5.

Доказательство сойста 5. В наших множествах все элементы вида $a(k, x, 0)$ или $a(k, x, 1)$ (по свойству 2.) Для доказательства этого свойства, нам достаточно показать, что функции h_A и h_B корректно определены. По конструкции, в нулевом шаге для всех x $h_A(x, 0) = h_B(x, 0) = n$.

Для h_A. По конструкции видно, что для элементов вида $a(k, x, 0)$ функция h_A корректно определены, т.е. для любого t:

1) $h_A(a(k, x, 0), 0) = n$,

2) $f_A(a(k, x, 0), t + 1) \neq f_A(a(k, x, 0), t) \Rightarrow h_A(a(k, x, 0), t + 1) \neq h_A(a(k, x, 0), t)$,

3) $h_A(a(k, x, 0), t + 1) \leq h_A(a(k, x, 0), t)$.

По конструкции видно: чтобы функция $g_k(x)$ определилась и равнялась 1, $\pi_k(x)$ должен истратить как минимум n колебаний. Значит, $h_{\pi_k}(x, a(k, x, 1), t_0) \leq 2n - n = n$. Так как $h_A(a(k, x, 1), s) = n$ для всех $s \leq t_0$, монотонность функции сохраняется.

А для элементов вида $a(k, x, 1)$ ясно, что $h_A(a(k, x, 1), 0) = n$. По конструкции, $f_A(a(k, x, 1), t)$ меняет своё значение лишь тогда, когда $g_k^t(x) = 1$. Пусть t_0 – наименьший шаг, в котором $g_k^t(x)$ определился и $g_k^t(x) = 1$. По подслучаю 2.3. $f_{\pi_k}(x, a(k, x, 1), t_0) = f_B(a(k, x, 1), t_0 - 1) = 1$ и $f_A(a(k, x, 1), t_0) = \overline{sg}\left(f_{\pi_k}(x, a(k, x, 1), t_0)\right) = 0 = f_A(a(k, x, 1), s)$ для любых $s \leq t_0$. Значит, для $t \leq t_0$ второе условие выполняется. Из $h_{\pi_k}(x, a(k, x, 1), s) = n$ следует, что $f_{\pi_k}(x, a(k, x, 1), s) = 1$. Значит, когда сработает подслучай 3.2 при $h_{\pi_k}(x, a(k, x, 1), s) = n$, функция $f_A(x, a(k, x, 1), s)$ свое значение не поменяет, и это значит 2 условия не рушится. А для $t > t_0$ очевидно по подслучаю 3.2.

А корректность h_B доказывается точно также.

Замечание. При четных n доказательство свойства 5 не проходит.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Гончаров С.С., Сорби А. Обобщенные вычислимые нумерации и нетривиальные полурешетки Роджерса // Алгебра и логика – 1997. Т. 36 - №6. – С. 621-641.

[2] Badaev S.A., Goncharov S.S. Theory of numberings: open problems // Computability theory and its applications – 2000. P. Cholack (ed.) et al. (Contemp. Math. – T. 257), Providence, RI, Am. Math. Soc., - C. 23-38.

[3] Badaev S.A., Talasbaeva Zh.T. Computable numberings in the hierarchy of Ershov // Concharov S.S., (ed.) et al., Mathematical logic in Asia. Proceedings of the 9th Asian logic conference (Novosibirks, Russia, August 16-19, 2005). – 2006. NJ. World Scientific. –C. 17-30.

[4] Ash C.J., Knight J.F. Computable structure and the hyperarithmetical hierarchy, (Stud. Logic Found. Math., -T. 144), Amsterdam etc., Elsiver Sci. B.V., -2000. -346 p.

[5] Ершов Ю.Л., Об одной иерархии множеств // Алгебра и логика. – 1968. – Т. 7, - №1, – С. 47-74.

[6] Ершов Ю.Л., Об одной иерархии множеств // Алгебра и логика. – 1968. – Т. 7, - №4, - С. 15-47.

[7] Rodgers H. Theory of recursive functions and effective computability. – New York: McGraw-Hill, 1967. – 482 p. (имеется русский перевод: Роджерс Х. Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. – Москва: Мир, 1972. – 624 с.)

[8] Ершов Ю.Л. Теория нумераций. – Москва: Наука, 1977. – 416 с.

REFERENCES

[1] Goncharov S.S., Sorbi A. Obobshhennye vychislimye numeracii i netrivial'nye polureshetki Rodzhersa // Algebra i logika. **1997.** T. 36. №6. S. 621-641.

[2] Badaev S.A., Goncharov S.S. Theory of numberings: open problems // Computability theory and its applications – **2000.** P. Cholack (ed.) et al. (Contemp. Math. T. 257), Providence, RI, Am. Math. Soc., C. 23-38.
[3] Badaev S.A., Talasbaeva Zh.T. Computable numberings in the hierarchy of Ershov // Concharov S.S., (ed.) et al., Mathematical logic in Asia. Proceedings of the 9th Asian logic conference (Novosibirks, Russia, August 16-19, 2005). **2006**. NJ. World Scientific. C. 17-30.
[4] Ash C.J., Knight J.F. Computable structure and the hyperarithmetical hierarchy, (Stud. Logic Found. Math., -T. 144), Amsterdam etc., Elsiver Sci. B.V., **2000.** 346 p.
[5] Ershov Ju.L., Ob odnoj ierarhii mnozhestv // Algebra i logika. **1968.** T. 7, №1, S. 47-74.
[6] Ershov Ju.L., Ob odnoj ierarhii mnozhestv // Algebra i logika. **1968**. T. 7, №4, S. 15-47.
[7] Rodgers H. Theory of recursive functions and effective computability. New York: McGraw-Hill, **1967.** 482 p. (imeetsja russkij perevod: Rodzhers H. Teorija rekursivnyh funkcij i jeffektivnaja vychislimost'. Moskva: Mir, **1972**. 624 s.)
[8] Ershov Ju.L. Teorija numeracij. Moskva: Nauka, **1977**. 416 s.

ӘОЖ: 510.54

Б.С. Калмурзаев

Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан
E-mail: birzhan.kalmurzayev@gmail.com

L_m^0 ЖАРТЫТОРЫНЫҢ ЕКІ ЭЛЕМЕНТІ ЕРШОВ ИЕРАРХИЯСЫНЫҢ ЖИЫНДАР ҮЙІРІНІҢ РОДЖЕРС ЖАРТЫТОРЫНА ЕНУІНІҢ БАҒАЛАУЛАРЫ ЖАЙЛЫ

Аннотация. Рекурсив саналымды m деңгейлердің құрылымы өте күрделі екендігі жақсы белгілі. Ол универсалды деңгейі, шексіз тізбе және анти-тізбесі бар жоғарғы жартыторды құрайды. Және де ол жартытордың қауты шексіз екендігі белгілі. Бұл жұмыста рекерсив саналымды m деңгейлер жартыторының екі элементті Ершов иерархиясының ақырлы деңгейіндегі жиындар үйірінің Роджерс жартыторына енуінің бағалаулары берілген. Және де бір элементті Роджерс жартыторларының мысалдардың көмегімен біздің бағалаулардан кез келген төмен деңгейдегі бағалаулары жақсартылмайтындығы дәлелденген.

Түйін сөздер: рекурсив саналымды m деңгейлерінің жартыторы, Роджерс жартыторы, Ершов иерархиясы, рекурсив саналымды жиындар, шешілімді нөмірлеулер.