N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 6, Number 310 (2016), 164 – 172

UDC 517.929

M.B. Saprunova[1], M. Akylbayev[2], A. Sh. Shaldanbayev[3]

[1]Southern Kazakhstan state pharmaceutical academy;
[2]Southern Kazakhstan pedagogical university;
[3]Southern Kazakhstan state university
shaldanbaev51@mail.ru

ABOUT ONE WAY OF PROTECTION OF INFORMATION TRANSFER

Abstract. In this work, with the help of the spectral theory of a functional differential equation, it is studied an advance of waves on a periodic wave guide, in particular, the way of creation of a white noise for the nepryatelsky receiver is shown.
Keywords: wave guide, functional differential equation, range, basis of Riesz, periodic task.

ӘОЖ 517.929

М.Б. Сапрунова[1], М.И. Ақылбаев[2], А.Ш. Шалданбаев[3]

[1]Южно-Казахстанская государственная фармацевтическая академия;
[2]Оңтүстік-Қазақстан педагогикалық университеті;
[3]Оңтүстік-Қазақстан мемлекеттік университеті

ЖЕЛІДЕГІ АҚПАРЛАРДЫ ҚОРҒАУДЫҢ БІР ТӘСІЛІ ТУРАЛЫ

Аннотация. Бұл еңбекте функционал-дифференциал теңдеулердің спектрәлді теориясы арқылы периодты толқынөт арқылы тарайтын толқындардың қасиеттері зерттелді, нәтиежесінде, қарсыластың қабылдауышын залалсыздандыру жолы табылды.
Түйін сөздер:толқынөт, функционал-дифференциал теңдеулер, спектр, Рисстің базисі, периодты есеп.

1. Кіріспе.Ақпарларды дыбыс түрінде, сурет түрінде және электромагниттік толқындар түрінде тарайды. Бұл толқындар Джеймс Максвеллдің теңдеулері арқылы өрнектеледі. Қазіргі заманда қажетті ақпарлар құнды тауарға айналды, сондықтан оны дер кезінде әрі сапалы етіп тұтынушыға жеткізу аса маңызды шаруа болып саналады. Байлық жүрген жерде ұрлық бірге жүретіні бұрыннан белгілі нәрсе, дайын асқа тік қасық демекші, керекті мәліметтерді желілерден ұрлаушылар да пайда болды. Оларды қазіргі заман тілімен айтсақ «хаккерлер» дейді. Ньютонның заңы бойынша, әрбір әсерге қарсы әсер табылады, сондықтан, ақпарды қорғаушылар да пайда болды. Ақпарды әр түрлі жолмен қорғауға болады. Оның ең қарапайым үлгісі криптография болса керек, жасырын жазу жолдары ертедегі Египеттіктерге де белгілі болған дейді.

Біз желідегі ақпарларды қорғау жолдарын қарастырмақпыз. Электромагнитті толқындарды таратытын желілерді, орысша айтқанда, «волновод» деп айтады, ал осы толқындарды таратушы құралдардың жұмыстарының математикалық моделі шекаралық есептер болады. Шекаралық шарттар құралға енген толқын мен онан шыққан толқынның айырмашылығын білдіреді.

Жиі кездесетін волноводтардың бір түрін «периодический волновод» деп атайды. Мұндай волноводқа енген толқын мен онан шыққан толқынның амплитудасы бірдей болуы керек, тек жиілігі мен фазасы өзгеруі мүмкін. Бұл құрал ақпарды қабылдап, оны бізге басқа жиілікпен және басқа фазамен береді. Егер біздің бәсекелестеріміз бұл құралды білмесе, онда олар өздерінің қабылдаған ақпарларын оқи алмайды. Мәселенің мән – жайы міне осында.

Келесі, шекаралық есепті периодты волновод дейді:

$$y'(x) = \lambda y(\alpha - x), \tag{1.1}$$

$$y(0) = y(2\pi), \tag{1.2}$$

мұндағы α- дегеніміз $0 \ll \alpha < 2\pi$ аралығында жатқан кез-келген нақты сан, ал λ- спектрәлді параметр.

Зерттеуіміз көрсеткендей, (1.1) – (1.2) есептің $L^2(0,2\pi)$ кеңістігінде толымды векторлар системасы бар, сонымен бірге, қосалқы меншікті векторлары бар екен, олар әлгі кеңістікте толымды емес. Бізге керекті ақпарлар негізгі толымды система арқылы арқылы жеткізіледі, ал екінші система арнаны қорғаушының қызметін атқарады. Ол арнада гуілдеген толқындар таратып, жаудың берекесін қашырады.Біздің таратушының сырын білетін достарымыз бұл екі толқындарды ажыратып, өздеріне керекті ақпарларды сүзгіштен өткізіп тазалап ала- алады.

Енді жоғарыдағы (1.1) – (1.2) шекаралық есептің мән – жайына үңілейік. Бірінші толқындардың теңдеуі, ал екіншісі шекаралық шартты білдіреді. Толқындар $(0,2\pi)$ аралығында өзгеріске ұшырайды, оның себепшісі α шамасы, ол бізге белгілі, ал жауға белгісіз. Таратушыға енген толқынды өзгертуші де дәл осы шама. Біз оны толқынөттің кілті деп атайық.Толқынөттің спектрәлді теориясымен [1] еңбек арқылы танысуға болады,функционал-дифференциал теңдеудің спектрәлті теориясының алғашқы нәтиежелері [2] еңбекте көрініс берді.Операторлардың спектрәлді теориясы туралы мәліметтерді [3-15] еңбектерден табуға болады.Соңғы кездері функционал-дифференциал теңдеулер әртүрлі [16-23] салаларда қолданылып жүр.

2.Зерттеу әдісі

Анықтама 2.1. Егер Гильберттің H кеңістігінің әрбір $x \in H$ элементі осы кеңістікте жинақталатынын мынадай:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k.$$

қатарға таратылатын болса, онда $\{\varphi_k\}$, $k = 1,2, \ldots$ системасын осы H кеңістігінің базисі деп атаймыз, мұндағы c_k - дегеніміз белгілі бір сандар, ал қатар осы H кеңістігінің нормасы бойынша жинақталады.

Дәл осы сәтте,

$$(\varphi_m, \varphi_n) = \delta_{mn}, m, n = 1,2, \ldots$$

теңдіктері орындалса, онда $\{\varphi_k\}$ бұл базисті ортонормаланған дейміз, кейде ортонормәлді деп те атайды.

Тригонометриялық система:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2t, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2t, \ldots$$

$L^2(0,2\pi)$ кеңістігінде ортонормаланған система болып табылады.

$\{\varphi_k\}$ $(k = 1,2, \ldots)$ - дегеніміз H кеңістігінің кез – келген ортонормаланған базисі болсын делік, ал T - дегеніміз осы кеңістікте анықталған қайтымды шектеулі сызықтық оператор болсын делік. Онда H кеңістігінің кез – келген $f \in H$ векторы үшін:

$$T^{-1}f = \sum_{k=1}^{\infty}(T^{-1}f, \varphi_k) \cdot \varphi_k = \sum_{k=1}^{\infty}(f, (T^{-1})^{*}\varphi_k) \cdot \varphi_k,$$

және дәл осы себепті

$$f = \sum_{k=1}^{\infty}(f, \theta_k) \cdot \psi_k,$$

болады, мұндағы

$$\psi_k = T\varphi_k, \theta_k = (T^{-1})^{*}\varphi_k, (k = 1,2, \ldots).$$

Сонымен бірге

$$(\varphi_m,\varphi_n)=\delta_{mn},\ (m,n=1,2,...).$$

болатыны айдан анық, сондықтан, егер:

$$f=\sum_{k=1}^{\infty}c_k\psi_k, \tag{2.1}$$

болса, онда

$$c_k=(f,\theta_k),$$

яғни (2.1) таралымы бірегей.

Сонымен, кез – келген шектеулі қайтымды оператор кез – келген ортонормаланған базисті осы H кеңістігінің басқа бір базисіне аударады. Ортонормаланған базистен осындай жолмен алынған $\{\varphi_k\}$, $k=1,2,...$ базисін ортонормаланған базиске эквивалентті базис немесе Рисстің базисі деп атайды [4].

Лемма 2.1. Егер $0\le\alpha\le 2\pi$ болса, онда мына,

$$\varphi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\cos n\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)+\sin n\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\right],$$
$$n=0,\pm1,\pm2,...$$

функциялар системасы $L^2(0,2\pi)$ кеңістігінде ортонормаланған базис құрайды.

Дәлелі.

(а) Ортонормаланғандығы.

$$(\varphi_n,\varphi_m)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\cos n\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)+\sin n\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\right]\left[\cos m\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)+\sin m\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[\cos(n-m)\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)+\sin(n+m)\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\right]dx=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{\sin(n-m)\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)}{n-m}-\frac{\cos(n+m)\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)}{n+m}\right]\Bigg|_0^{2\pi}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{-\sin\left[(n-m)2\pi-(n-m)\frac{\alpha}{2}\right]+\sin(n-m)\frac{\alpha}{2}}{n-m}\right.$$
$$\left.-\frac{\cos\left[(n+m)2\pi-(n+m)\frac{\alpha}{2}\right]-\cos(n+m)\frac{\alpha}{2}}{n+m}\right]=$$

$$=\begin{cases}1)\ 0,\quad m\neq\pm n;\\ 2)\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos 2\pi\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)dx=\frac{1}{2\pi}\frac{\sin 2n\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)}{2n}\Bigg|_0^{2\pi}=\\ =\dfrac{1}{4n\pi}[\sin(4n\pi-n\alpha)+\sin n\alpha]=0,=>\ m=-n,\qquad n\neq 0;\\ 3)\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}[1+\sin 2n]\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)dx=\left(x-\frac{\cos 2n\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)}{2n}\right)\Bigg|_0^{2\pi}\cdot\frac{1}{2\pi}==\\ =\ \dfrac{1}{2\pi}\left(2\pi-\dfrac{\cos(4n\pi-n\alpha)-\cos n\alpha}{2n}\right)=1,m=n;\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0, & m\neq \pm n;\\ 0, & m=-n,\quad n\neq 0;\\ 1, & m=n,\quad n\neq 0.\end{cases}$$

$$(\varphi_0,\varphi_0)=\frac{1}{2\pi}.$$

б) Толымдылығы.

$L^2(0,2\pi)$ кеңістігінің әйтеуір бір $f(x)\in L^2(0,2\pi)$ элементі үшін мына, $\int_0^{2\pi} f(x)\varphi_n(x)dx = 0, n=0,\pm1,\pm2,\ldots$ теңдіктер орындалсын делік, онда

$$\int_0^{2\pi} f(x)\left[\cos n\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)+\sin n\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)\right]dx=0,\ \ n=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

немесе таратып жазсақ,

$$\int_0^{2\pi} f(x)\left[\cos nx\cos\frac{n\alpha}{2}+\sin nx\sin\frac{n\alpha}{2}+\sin nx\cos\frac{n\alpha}{2}-\cos nx\sin\frac{n\alpha}{2}\right]dx=$$

$$=\int_0^{2\pi} f(x)\left[\left(\cos\frac{n\alpha}{2}-\sin\frac{n\alpha}{2}\right)\cos nx+\left(\cos\frac{n\alpha}{2}+\sin\frac{n\alpha}{2}\right)\sin nx\right]dx=$$

$$=\left(\cos\frac{n\alpha}{2}-\sin\frac{n\alpha}{2}\right)\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx+\left(\cos\frac{n\alpha}{2}+\sin\frac{n\alpha}{2}\right)\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx=0.$$

Соңғы теңдеулерде n - ді $(-n)$ - мен алмастырсақ, онда $f(x)$ функциясының Фурье коэффициенттері үшін сызықтық теңдеулер системасын аламыз.

$$\begin{cases}\left(\cos\frac{n\alpha}{2}-\sin\frac{n\alpha}{2}\right)\cdot\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx+\left(\cos\frac{n\alpha}{2}+\sin\frac{n\alpha}{2}\right)\cdot\\ \qquad\cdot\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx=0,\\ \left(\cos\frac{n\alpha}{2}+\sin\frac{n\alpha}{2}\right)\cdot\int_0^{2\pi} f(x)\cos nxdx-\left(\cos\frac{n\alpha}{2}-\sin\frac{n\alpha}{2}\right)\cdot\\ \qquad\cdot\int_0^{2\pi} f(x)\sin nxdx=0.\end{cases}$$

Осы теңдеулер системасының анықтауышын есептейік:

$$\Delta=-\left(\cos\frac{n\alpha}{2}-\sin\frac{n\alpha}{2}\right)^2-\left(\cos\frac{n\alpha}{2}+\sin\frac{n\alpha}{2}\right)^2=-\left[cos^2\frac{n\alpha}{2}-\right.$$

$$\left.-2\cos\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}+sin^2\frac{n\alpha}{2}+cos^2\frac{n\alpha}{2}+2\cos\frac{n\alpha}{2}\sin\frac{n\alpha}{2}+sin^2\frac{n\alpha}{2}\right]=$$

$$=-2\neq 0.$$

Демек, мына:

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx=0,\ \int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx=0,\ \ n=0,1,2,\ldots$$

теңдіктер орындалады, онда тригонометриялық системаның толымдылығынан $f(x)=0$ теңдігін аламыз.

Лемма 2.2. Егер, мына

$$\varphi_m(2\pi-x)=\varphi_m(x), m=1,2,\ldots,$$

теңдіктері орындалса, $\{\varphi_m\}$ системасы $L^2(0,2\pi)$ кеңістігінде толымсыз болады.

Дәлелі.

Егер

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \ll x \ll \pi, \\ -1, & \pi < x \ll 2\pi, \end{cases}$$

болса, онда кез-келген $\varphi_m(x)$ $(m = 1,2, ...)$ функциясы үшін, мына

$$\int_0^{2\pi} f(x)\varphi_m(x)dx = \int_0^{\pi} f(x)\varphi_m(x)dx + \int_{\pi}^{2\pi} f(x)\varphi_m(x)dx,$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} f(x)\varphi_m(x)dx = \left|\begin{matrix} x = 2\pi - t \\ dx = -dt \end{matrix}\right| = -\int_{\pi}^{0} f(2\pi - t)\varphi_m(2\pi - t)dt = \int_{0}^{\pi} f(2\pi - t)\varphi_m(t)dt,$$

$$\int_0^{2\pi} f(x)\varphi_m(x)dx = \int_0^{\pi} [f(t) + f(2\pi - t)]\varphi_m(t)dt = 0.$$

3.Зерттеу нәтиежелері

Теорема 3.1.

(а) Егер $0 \ll \alpha \ll 2\pi$ болса, онда, мына,

$$y'(x) = \lambda y(\alpha - x) \ (3.1)$$

теңдеудің әрбір шешімі, мына,

$$-y''(x) = \lambda^2 y(x); \ (3.2)$$

Штурм – Лиувилл теңдеуінің шешімі болады.

(б) Жоғарыдағы (3.1) теңдеудің шешімдер кеңістігі бір салалы.

(в) Аталған (3.1) теңдеудің жалпы шешімі мынадай:

$$y(x) = A \cdot \left[\cos\lambda\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) + \sin\lambda\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)\right], \qquad (3.3)$$

болады, мұндағы A — кез-келген тұрақты шама.

Теорема 3.2.

Егер $0 \ll \alpha < 2\pi$ болса, онда мына:

$$y'(x) = \lambda y(\alpha - x), \qquad (3.4)$$

$$y(0) = y(2\pi), \qquad (3.5)$$

периодты шекаралық есептің меншікті мәндері нақты сандардан құралған екі сериядан тұрады. Олар, мыналар:

а) $\lambda_n = n, n = 0, \pm 1, \pm 2, ...,$

$$y_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\cos n\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) + \sin n\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)\right];$$

б) $\mu_m = \frac{2\pi}{2\pi - \alpha}\left(m + \frac{1}{4}\right), m = 0, \pm 1, \pm 2, ...,$

$$z_m(x) = \cos\frac{2\pi}{2\pi - \alpha}\left(m + \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) + \sin\frac{2\pi}{2\pi - \alpha}\left(m + \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Мұндағы $\{y_n(x)\}$ системасы $L^2(0,2\pi)$ кеңістігінде ортонормаланған базис құрайды, ал $\{z_m\}$ системасы бұл кеңістікте толымсыз система.

4.Талқысы

3.1.теореманың дәлелі

(а) Егер $y'(x) = \lambda y(\alpha - x)$ болса, онда теңдеудің екі жағын да дифференциалдасақ, онда

$$y''(x) = -\lambda y'(\alpha - x) = -\lambda \cdot \lambda \cdot y(x) = -\lambda^2 y(x), \Rightarrow -y''(x) = \lambda^2 y(x);$$

(б) Егер $u(x)$ пен $v(x)$ функциялары, мына,

$$u'(x) = \lambda u(\alpha - x) \text{ және } v'(x) = -\lambda v(\alpha - x),$$

теңдеудің нөлден өзгеше шешімдері болса, онда жоғарыдағы (а) тұжырымы бойынша, олардың екеуі де бір ғана (3.2) Штурм – Лиувилл теңдеуінің шешімі болады. Олардың $x = \frac{\alpha}{2}$ нүктесіндегі Вронскианын есептеп көрелік.

$W[u,v] = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u & v \\ \lambda u(\alpha - x) & -\lambda v(\alpha - x) \end{vmatrix} = -\lambda[u(x)v(\alpha - x) + v(x)u(\alpha - x)] = -2\lambda \cdot u\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot v\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

Егер $\lambda \neq 0$ сәтінде $u\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0$ болса, онда $u'\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0$ және $-u'' = \lambda^2 u$. Онда Коши есебінің шешімінің бірегейлігі туралы теорема бойынша, $u(x) \equiv 0$, ал мұнымыз жоруымызға қайшы. Демек, $u\left(\frac{\alpha}{2}\right) \neq 0$, сол сияқты $v\left(\frac{\alpha}{2}\right) \neq 0$. Сондықтан,

$$W[u,v] = 0$$

Теңдігі тек қана $\lambda = 0$ болған сәтте ғана орындалады.

Енді $z(x)$ функциясы (3.1) теңдеудің кез-келген шешімі болсын делік, онда

$$z(x) = Au(x) + Bv(x)$$

болады, мұндағы A, B — кез-келген тұрақты шамалар. Онда

$$z'(x) = Au' + Bv' = A\lambda u(\alpha - x) - B\lambda v(\alpha - x) = \lambda[Au(\alpha - x) - Bv(\alpha - x)] = \lambda z(\alpha - x) = \lambda[Au(\alpha - x) + Bv(\alpha - x)],$$

мұнан

$$\Rightarrow 2B \cdot v(\alpha - x) = 0, \Rightarrow B = 0, \Rightarrow z(x) = Au(x), A - const.$$

(в) Егер (3.3) өрнегін (3.1) теңдеуіне апарып қойсақ,

$$y'(x) = \lambda A\left[-\sin\lambda\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) + \cos\lambda\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)\right],$$

$$y(\alpha - x) = A\left[\cos\lambda\left(\alpha - x - \frac{\alpha}{2}\right) + \sin\lambda\left(\alpha - x - \frac{\alpha}{2}\right)\right] = A\left[\cos\lambda\left(\frac{\alpha}{2} - x\right) + \sin\lambda\left(\frac{\alpha}{2} - x\right)\right] = A\left[-\sin\lambda\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) + \cos\lambda\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)\right],$$

$$\lambda y(\alpha - x) = \lambda A\left[-\sin\lambda\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) + \cos\lambda\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)\right] = y'(x).$$

Дәлелденген теореманың жай – жапсарын аша түсу үшін, мына

$$u(x) = \cos\lambda\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) + \sin\lambda\left(x - \frac{\alpha}{2}\right),$$
$$v(x) = \cos\lambda\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) - \sin\lambda\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)$$

функциялардың Вронскианын есептейік, есептеу барысында олардың мына:

$$u'(x) = \lambda u(\alpha - x),$$
$$v'(x) = -\lambda v(\alpha - x),$$

теңдеулердің шешімдері екенін ескерейік.

$$W[u,v] = \begin{vmatrix} u & v \\ u' & v' \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \cos\lambda\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) + \sin\lambda\left(x - \frac{\alpha}{2}\right), & \cos\lambda\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) - \sin\lambda\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) \\ -\sin\lambda\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) + \cos\lambda\left(x - \frac{\alpha}{2}\right), & -\sin\lambda\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) - \cos\lambda\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) \end{vmatrix}$$

$$= \lambda\left\{-\left[\cos\lambda\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) + \sin\lambda\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)\right]^2 - \left[\cos\lambda\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) - \sin\lambda\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)\right]^2\right\} = -\lambda \cdot \left[\cos^2\lambda\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) + 2\cos\lambda\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\lambda\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\lambda\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) + \cos^2\lambda\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) - 2\cos\lambda\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)\sin\lambda\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) + \sin^2\lambda\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)\right] = -\lambda(1 + 1) = -2\lambda \neq 0,$$

$$(\lambda \neq 0 \text{ сәтінде}).$$

3.2.теореманың дәлелі. Жоғарыда дәлелденген (3.1) теоремасы бойынша (3.4) теңдеудің шешімі

$$y(x) = A \cdot \left[\cos\lambda\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) + \sin\lambda\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)\right], A - const,$$

болады, осы өрнекті (3.5) шекаралық шартына апарып қойсақ, онда характеристикалық теңдеу аламыз. Осы теңдеудің түбірлері (3.4) – (3.5) шекаралық есебінің меншікті мәндері болады.

$$A \cdot \left(\cos\frac{\lambda\alpha}{2} - \sin\frac{\lambda\alpha}{2}\right) = A \cdot \left[\cos\lambda\left(2\pi - \frac{\alpha}{2}\right) + \sin\lambda\left(2\pi - \frac{\alpha}{2}\right)\right],$$
$$A \cdot \left[\cos\frac{\lambda\alpha}{2} - \cos\lambda\left(2\pi - \frac{\alpha}{2}\right) - \sin\frac{\lambda\alpha}{2} - \sin\lambda\left(2\pi - \frac{\alpha}{2}\right)\right] = 0.$$

Мұнан $A \neq 0$ болғандықтан

$$\Delta(\lambda) = \cos\frac{\lambda\alpha}{2} - \cos\lambda\left(2\pi - \frac{\alpha}{2}\right) - \sin\frac{\lambda\alpha}{2} - \sin\lambda\left(2\pi - \frac{\alpha}{2}\right) = 0. \quad (3.6)$$

Мына,

$$\cos A - \cos B = 2\,sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2},$$
$$\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2},$$

формулалар арқылы (3.6) өрнекті түрлендірсек, мынадай

$$2\sin\frac{\frac{\lambda\alpha}{2} + 2\pi\lambda - \frac{\lambda\alpha}{2}}{2}\sin\frac{2\pi\lambda - \frac{\lambda\alpha}{2} - \frac{\lambda\alpha}{2}}{2} - 2\sin\frac{\frac{\lambda\alpha}{2} + 2\pi\lambda - \frac{\lambda\alpha}{2}}{2}\cos\frac{\frac{\lambda\alpha}{2} - 2\pi\lambda + \frac{\lambda\alpha}{2}}{2} = 0,$$
$$2\sin\lambda\pi\sin\left(\lambda\pi - \frac{\lambda\alpha}{2}\right) - 2\cos\left(\frac{\lambda\alpha}{2} - \pi\lambda\right)\sin\lambda\pi = 0,$$
$$2\sin\lambda\pi\,[\sin\left(\lambda\pi - \frac{\lambda\alpha}{2}\right) - \cos\left(\lambda\pi - \frac{\lambda\alpha}{2}\right)] = 0,$$

теңдіктерді аламыз. Демек, екі түрлі жағдай болуы мүмкін, не

а) $\sin\lambda\pi = 0$, онда $\lambda_n = n,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$

$$y_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\cos n\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) + \sin n\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)\right], n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots;$$

не

б) $\sin\left(\lambda\pi - \frac{\lambda\alpha}{2}\right) - \cos\left(\lambda\pi - \frac{\lambda\alpha}{2}\right) = 0$, онда

$$tg\lambda\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right) = 1, \lambda_m\left(\pi - \frac{\alpha}{2}\right) = m\pi + \frac{\pi}{4}, m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$
$$\mu_m = \frac{\pi}{\pi - \frac{\alpha}{2}}\left(m + \frac{1}{4}\right) = \frac{2\pi}{2\pi - \alpha}\left(m + \frac{1}{4}\right), m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Бірінші серияның меншікті мәндерімен шатастырмау үшін осындай белгілеу енгіздік. Жоғарыдағы лемма 1.2 лемма бойынша, $\{y_n(x)\}$ меншікті функциялар системасы $L^2(0,2\pi)$ кеңістігінде ортонормаланған базис құрайды, ал $\{z_m(x)\}$ меншікті функциялары периоды 2π - ге тең жұп функциялар. Шынында да,

$$z_m(2\pi - \alpha + x) = \cos\frac{2\pi}{2\pi - \alpha}\left(m + \frac{1}{4}\right)\left(2\pi - \alpha + x - \frac{\alpha}{2}\right) + \sin\frac{2\pi}{2\pi - \alpha}\left(m + \frac{1}{4}\right)\cdot$$
$$\left(2\pi - \alpha + x - \frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left[2\pi\left(m + \frac{1}{4}\right) + \frac{2\pi}{2\pi - \alpha}\cdot\left(m + \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)\right] +$$
$$+\sin\left[2\pi\left(m + \frac{1}{4}\right) + \frac{2\pi}{2\pi - \alpha}\left(m + \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)\right] = -\sin\frac{2\pi}{2\pi - \alpha}\cos\left(m + \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) +$$
$$+\cos\frac{2\pi}{2\pi - \alpha}\left(m + \frac{1}{4}\right)\left(x - \frac{\alpha}{2}\right) = z_m(\alpha - x).$$

Егер де $t = \alpha - x$ болсын десек, онда $z_m(2\pi - t) = z_m(t)$ боларын көреміз, демек 2.2 лемма бойынша $\{z_m(t)\}$ системасы $L^2(0,2\pi)$ кеңістігінде толымсыз. Бізге керегі де осы еді.

5.Қорытынды

Аргументі ауытқыған теңдеулерді желі ішіндегі ақпарларды қорғаудың математикалық мөделі ретінді ұсынуға болады.

ӘДЕБИЕТ

[1] Зильберглейт А.С.,Копилевич Ю.И.Спектральная теория регулярных волнолводов, Л.:изд.ФТИ им. А.Ф.Иоффе, 1983, 301.

[2] Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. К спектральной теории уравнений с отклоняющимися аргументами. Математический журнал, Алматы 2004, т 4, №3 (13), 41-48с.

[3] Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. – М.: Наука, 1966.-543с.

[4] Гохберг Н.Ц., Крейн М.Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.- М.: Наука, 1965.-448с.

[5] Бари Н.К. О базисах в гильбертовом пространстве. //ДАН, 54(1946), 383-386с.

[6] Рудин У. Основы математического анализа. – М.: Мир, 1966.

[7] Левитан Б.М., Саргсян Н.С. Введение в спектральную теорию. – М.: Наука, 1970. – 670 с.

[8] Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. – М.: Наука, 1969.

[9] Айнс Э.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – Харьков, 1939.

[10] Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1958.

[11] Карташов А.П., Рождественский Б.Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения и основы вариационного исчисления. – М.: Наука, 1976.

[12] Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. – М.: ГИФМЛ, 1958.

[13] Садыбеков М.А. Элементы теории линейных дифференциальных операторов. – Шымкент, 2007.

[14] Кальменов Т.Ш. Краевые задачи для линейных уравнений в частных производных гиперболического типа. – Шымкент: Ғылым, 1993.

[15] Шилов Г.Е. Математический анализ. – М.: Физматгиз, 1960.

[16] X. Mao, G. Marion, and E. Renshaw, "Environmental Brownian noise suppresses explosions in population dynamics," Stochastic Processes and their Applications, vol. 97, no. 1, pp. 95–110, 2002.

[17] A. Bahar and X. Mao, "Stochastic delay Lotka-Volterra model,"Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 292, no.2, pp. 364–380, 2004.

[18] A. Bahar and X. Mao, "Stochastic delay population dynamics,"International Journal of Pure and Applied Mathematics, vol. 11,no. 4, pp. 377–400, 2004.

[19] X. Mao, C. Yuan, and J. Zou, "Stochastic differential delay equations of population dynamics," Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 304, no. 1, pp. 296–320, 2005.

[20] S. Pang,F.Deng, andX.Mao, "Asymptoticproperties of stochastic population dynamics," Dynamics of Continuous, Discrete &Impulsive Systems A: Mathematical Analysis, vol. 15, no. 5, pp.603–620, 2008.

[21] F.Wu and Y. Xu, "Stochastic Lotka-Volterra population dynamics with infinite delay," SIAM Journal on Applied Mathematics,vol. 70, no. 3, pp. 641–657, 2009.

[22] Y.Hu, F. Wu, and C. Huang, "Stochastic Lotka-Volterramodelswith multiple delays," Journal of Mathematical Analysis andApplications, vol. 375, no. 1, pp. 42–57, 2011.

[23] Y.Hu and C.Huang, "Lasalle method and general decay stability of stochastic neural networks with mixed delays," Journal of Applied Mathematics and Computing, vol. 38, no. 1-2, pp. 257–278, 2012.

REFERENCES

[1] Зильберглейт Ampere-second., Kopilevich Ю.И.Спектральная theory of the regular volnolvod, L.:изд. FTI of A. F. Ioffe, **1983**, 301.

[2] Kalmenov T. Sh., Shaldanbayev A. Sh., Akhmetova S. T. To the spectral theory of the equations with the deviating arguments. Mathematical magazine, Almaty, **2004**, t 4, No. 3 (13), 41-48s.

[3] Akhiyezer N. I., Glazman I. M. The theory of the linear operators in a Hilbert space. M.: Science, **1966**. 543 pages.

[4] Gokhberg N. Ts., Crane M. G. Introduction to the theory of the linear self-conjugate operators in a Hilbert space. - M.: Science, **1965**. - 448 pages.

[5] Bari N. K. O bases in a Hilbert space.//It is GIVEN, 54 (**1946**), 383-386s.

[6] Rudin U. Calculus bases. M.: World, **1966**.

[7] Levitan B. M., Sargsyan N. S. Introduction to the spectral theory. M.: Science, **1970**. 670 pages.

[8] Naymark M. A. The linear differential operators. M.: Science, **1969**.

[9] Айнс E.L. Ordinary differential equations. Kharkiv, **1939**.

[10] Koddington E.A., Levinson N. Theory of ordinary differential equations. M.: OOZE, **1958.**

[11] Kartashov A. P., Christmas B. L. Ordinary differential equations and bases of a calculus of variations. M.: Science, **1976.**

[12] Stepanov V. V. Course of differential equations. M.: GIFML, **1958.**

[13] Sadybekov M. A. Elements of the theory of the linear differential operators. Shymkent, **2007.**

[14] Kalmenov T. Sh. Boundary value problems for the simple equations in partial derivatives of hyperbolic type. Shymkent: yly, 1993.

[15] Shilov G. E. Calculus. M.: Fizmatgiz, **1960.**

[16] X. Mao, G. Marion, and E. Renshaw, "Environmental Brownian noise suppresses explosions in population dynamics," Stochastic Processes and their Applications, vol. 97, no. 1, pp. 95–110, **2002.**

[17] A. Bahar and X. Mao, "Stochastic delay Lotka-Volterra model," Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 292, No. 2, pp. 364–380, **2004.**

[18] A. Bahar and X. Mao, "Stochastic delay population dynamics," International Journal of Pure and Applied Mathematics, vol. 11, no. 4, pp. 377–400, **2004.**

[19] X. Mao, C. Yuan, and J. Zou, "Stochastic differential delay equations of population dynamics," Journal of Mathematical Analysis and Applications, vol. 304, no. 1, pp. 296–320, **2005.**

[20] S. Pang, F.Deng, andX.Mao, "Asymptoticproperties of stochastic population dynamics," Dynamics of Continuous, Discrete & Impulsive Systems A: Mathematical Analysis, vol. 15, no. 5, pp.603–620, **2008.**

[21] F.Wu and Y. Xu, "Stochastic Lotka-Volterra population dynamics with infinite delay," SIAM Journal on Applied Mathematics, vol. 70, no. 3, pp. 641–657, **2009.**

[22] Y.Hu, F. Wu, and C. Huang, "Stochastic Lotka-Volterramodelswith multiple delays," Journal of Mathematical Analysis andApplications, vol. 375, no. 1, pp. 42–57, **2011.**

[23] Y.Hu and C.Huang, "Lasalle method and general decay stability of stochastic neural networks with mixed delays," Journal of Applied Mathematics and Computing, vol. 38, no. 1-2, pp. 257–278, **2012.**

УДК 517.929

М.Б. Сапрунова[1], М.И. Ақылбаев[2], А.Ш. Шалданбаев[3]

[1]Южно-Казахстанская государственная фармацептическая академия;
[2]Южно-Казахстанский педагогический университет;
[3]Южно-Казахстанский государственный университет

Об одном способе защиты передачи информации

Аннотация. В данной работе с помощью спектральной теории функционально-дифференциального уравнения изучено распространение волн по периодическому волноводу, в частности, показан способ создания белого шума для неприятельского приемника.

Ключевые слова: волновод, функционально-дифференциальное уравнение, спектр, базис Рисса, периодическая задача.