N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 6, Number 310 (2016), 127 – 136

UDC 629.195+531.1

M.D. Shinibaev[1], S.S. Dairbekov[2], S.A. Zholdasov[2], G.E. Myrzakasova[2], D.R. Aliaskarov[2], S.A. Shekerbekova[2], A.G.Sadybek[2]

[1]National Center of Space Researches and Technologies», Almaty, Kazakhstan;
[2] University of Syr-Daria, Zhetysai, Kazakhstan

USE OF THE NEW VERSION OF THE PROBLEM OF TWO CENTERS IN THE THREE-BODY PROBLEM

Abstract. For the first time, "a new version of the problem of two fixed centers" was introduced in 2016. The main difference between the "new version" of the "traditional problem of two fixed points" is as follows:

1. The gravitational field of two fixed mass approximated gravitational field axially symmetric oblate spheroid:

$$A = B = nC\ ,\ n \neq 0\ ,\ n > 0,$$

where A, B, C – the main central moments of inertia.

2. Version unlike other involves the use of this old problem to the theory of motion near Earth satellites.

It should be noted that the problem of motion of a particle under the influence of gravity of two fixed centers first appeared in the XIX century and has remained intact, as no one could find the corresponding analog in nature. Finally in 1961, through the work of E.A. Grebenikov, V.G. Demin and E.P. Aksenov it was revealed the possibility of the application of this problem to the theory of the motion of artificial satellites. So the old problem which was first posed and solved by L. Euler came into our lives. In the article "A new version of the problem of two fixed centers" is used to define new solutions of the restricted circular three-body problem, which is still relevant in the Space flight theory.

Key words: Earth satellite, the problem of two fixed centers, the gravitational field, three-body problem, test-body, the motion test body**,** restricted circular three-body problem.

УДК 629.195+531.1

М.Д.Шинибаев[1], С.С. Даирбеков[2], С.А.Жолдасов[2], Д.Р. Алиаскаров[2], Г.Е. Мырзакасова[2], С.А. Шекербекова[2], А.Ж.Садыбек[2]

[1]Национальный центр космических исследований и технологий, г. Алматы, Казахстан;
[2]Университет Сыр-Дария, г. Джетысай, Казахстан;
E-mail: shinibaev_maxsut@mail.ru

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ НОВОЙ ВЕРСИИ ЗАДАЧИ ДВУХ НЕПОДВИЖНЫХ ЦЕНТРОВ В ЗАДАЧЕ ТРЕХ ТЕЛ

Аннотация. Впервые «новая версия задачи о двух неподвижных центрах» была введена в 2016 году [1, с. 186-188]. Главное отличие «новой версии» от «традиционной задачи двух неподвижных центров» заключается в следующем:

1. Поле тяготения двух неподвижных масс аппроксимирована полем тяготения осесимметричного сжатого сфероида

$$A = B = nC\ ,\ n \neq 0\ ,\ n > 0,$$

где A, B, C – главные центральные моменты инерции тела.

2. Версия в отличие от остальных предполагает применение этой старой задачи к теории движения близких спутников.

Следует отметить, что задача о движении материальной точки под действием притяжения двух неподвижных центров впервые появилась XIX веке и оставалась неиспользованной, так как никто не мог найти соответствующий ей аналог в природе. Наконец, в 1961 году, благодаря работам Е.А.Гребеникова, В.Г. Демина и Е.П. Аксенова, выяснилась возможность приложения этой задачи к теории движения искусственных спутников Земли. Так, старая задача, которая впервые поставлена и решена Л.Эйлером, вошла в нашу жизнь.

В данной статье новая версия задачи двух неподвижных центров используется для определения нового решения ограниченной круговой задачи трех тел, которая по сей день актуальна в теории космического полета.

Ключевые слова: спутник Земли, задача двух неподвижных центров, гравитационное поле, задача трех тел, пробное тело, движение пробного тела, ограниченная круговая задача трех тел.

1. Введение

Пусть две точки m_1 и m_2 обращаются вокруг их общего центра масс O по круговым орбитам радиуса a и b (рис.1).

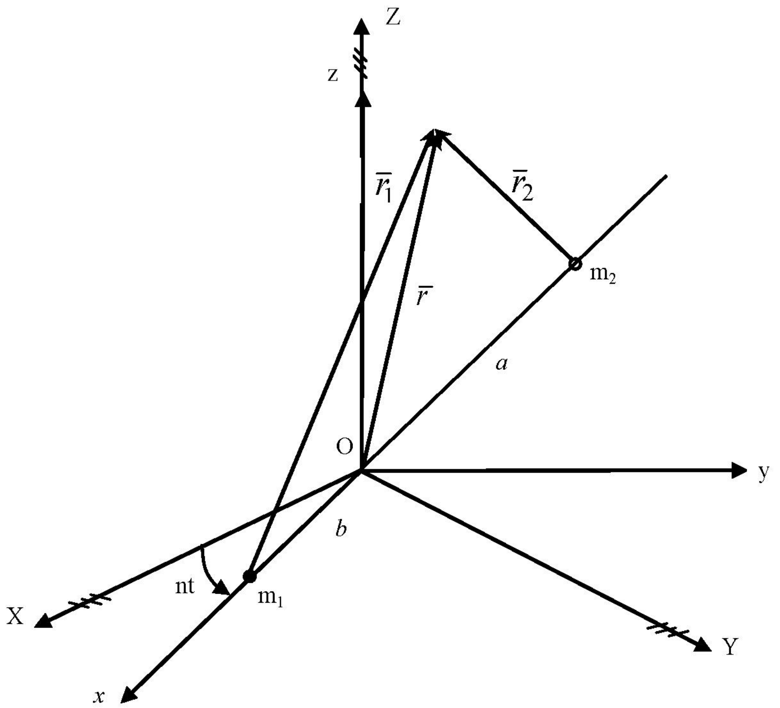

Рисунок 1 - Расположение масс относительно подвижной $Oxyz$ и неподвижной $OXYZ$ систем координат

На рис.1 массы $m_3 < m_2 < m_1$, причем $m_3 << m_1$ и $m_3 << m_2$.

Равновесие гравитационных и центробежных сил требует[2, с. 21]:

$$f\frac{m_1m_2}{\ell^2} = m_2a\alpha^2 = m_1b\alpha^2, \ \ell = a + b, \tag{1}$$

где f – гравитационная постоянная, n – общая угловая скорость вращения масс m_1 и m_2 относительно центра O.

Из (1) имеем

$$a = \frac{m_1 \ell}{M},\ b = \frac{m_2 b}{M},\ M = m_1 + m_2. \tag{2}$$

В силу вращения основных масс m_1 и m_2, силовая функция и гамильтониан задачи явно зависят от времени, поэтому задача в подвижной системе координат становится неинтегрируемой. Силовая функция задачи и соответственно гамильтониан не будут зависеть явно от времени системе координат, где массы m_1 и m_2 остаются неподвижными [1, с. 26]. Повернем подвижную систему координат $Oxyz$ относительно оси Zна угол (–nt), тогда m_1 и m_2 будут неподвижны (рис. 2)

$$\left.\begin{aligned} X &= x\cos nt + y\sin nt \\ Y &= -x\sin nt + y\cos nt, \\ Z &= z. \end{aligned}\right\}, \tag{3}$$

Если удастся проинтегрировать дифференциальные уравнения задачи в системе координат $OXYZ$, то это же решение можно получить в подвижной системе координат, так как, повернув на угол (nt), имеем

$$\left.\begin{aligned} X &= x\cos nt - y\sin nt \\ Y &= x\sin nt + y\cos nt, \\ Z &= z. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

отсюда находим

$$\left.\begin{aligned} x &= X\cos nt + Y\sin nt \\ y &= -X\sin nt + Y\cos nt, \\ z &= Z. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

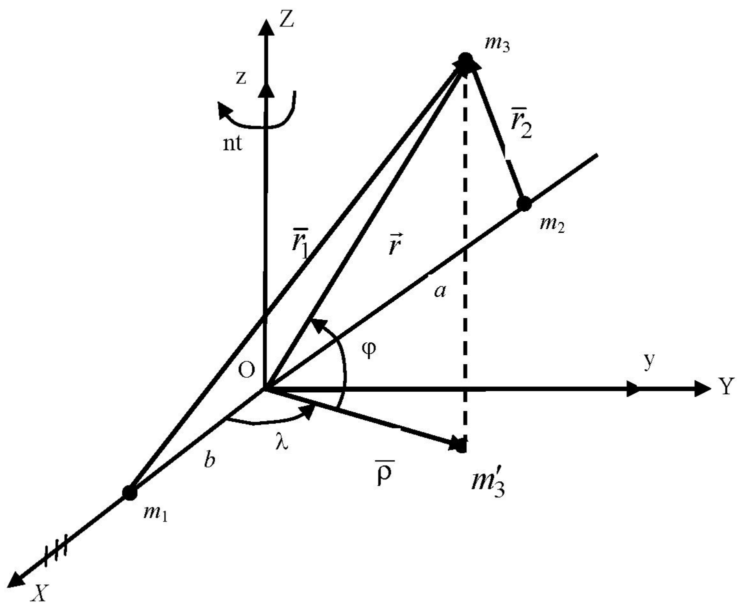

Рисунок 2 - Переход к неподвижной системе координат

Здесь в сферической системе координат имеем

$$X = r\cos\varphi\cos\lambda,\ Y = r\cos\varphi\sin\lambda,\ Z = r\sin\varphi, \tag{6}$$

$$r_1 = [(X-b)^2 + Y^2]^{1/2},\ r_2 = [(X+a)^2 + Y^2]^{1/2},$$

$$X_1 = b,\ Y_1 = 0,\ X_2 = -a,\ Y_2 = 0.$$

2. Новая версия задачи двух неподвижных центров и его применение

Аппроксимируем поле тяготения двух неподвижных центров полем тяготения «гипотетического тела», тогда (рис. 2) примет вид (рис. 3). Далее предположим, что:

1. «Гипотетическое тело» представляет собой сжатый сфероид

$$A = B = nC,\ n > 0,$$

где A, B, C – главные центральные моменты инерции.

2. Тело вращается вокруг оси динамической симметрии. Тогда силовая функция, учитывающая фигуру тела, имеет вид

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{\alpha_0}{r^3} - \frac{3}{2}\frac{\alpha_0}{r^3}\cos^2\varphi = \frac{\mu}{r} + \frac{\alpha_0}{r^3}\left(1 - \frac{3}{2}\cos^2\varphi\right). \tag{7}$$

где $\mu = f(m_1 + m_2),\ C = m_1 b^2 + m_2 a^2,\ \alpha_0 = fC(n-1)$

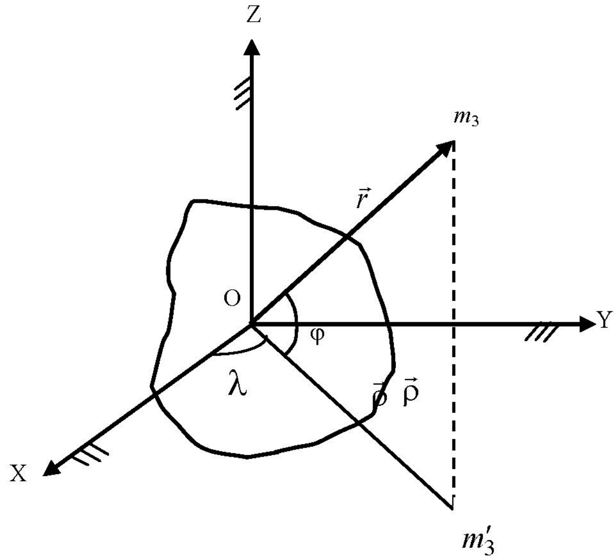

Рисунок 3 - «Гипотетическое тело» в сферической системе координат

В неподвижной системе координат гамильтониан задачи имеет вид

$$H = T - U = \frac{1}{2}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}p_\lambda^2 + \frac{1}{r^2}p_\varphi^2\right) - \frac{\mu}{r} - \frac{\alpha_0}{r^3}\left(1 - \frac{3}{2}\cos^2\varphi\right). \tag{8}$$

где T – кинетическая энергия, p_r, p_λ, p_φ – импульсы, определенные выражениями

$$p_r = \dot{r},\ p_\varphi = r^2\dot{\varphi},\ p_\lambda = r^2\dot{\lambda}\cos^2\varphi = \alpha_2 - \text{const}.$$

Уравнение Гамильтона-Якоби имеет вид

$$\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\varphi}\left(\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial V}{\partial \varphi}\right)^2 - \frac{2\mu}{r} - \frac{2\alpha_0}{r^3}\left(1 - \frac{3}{2}\cos^2\varphi\right) - 2\alpha_1 = 0, \tag{9}$$

так как $\dfrac{\partial H}{\partial t} = 0$. В (9) α_1 – постоянная интеграла энергии.

Полный интеграл (9) представим так

$$V = -\alpha_1 t + W_1(r) + W_2(\lambda) + W_3(\varphi). \qquad (10)$$

Перепишем (9) с учетом (10), умножив на r^2

$$\left(r\frac{dW_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{\cos^2\varphi}\alpha_2^2 + \left(\frac{dW_3}{\partial\varphi}\right)^2 - 2\mu r - \frac{2\alpha_0}{r} + \frac{3\alpha_0}{r}\cos^2\varphi - 2\alpha_1 r^2 = 0. \qquad (11)$$

Введем обозначение $\frac{dW^2}{d\lambda} = \alpha_2$, прибавим $\pm\alpha_3^2$

$$\left[\left(r\frac{dW_1}{\partial r}\right)^2 - \frac{2\alpha_0}{r} - 2\mu r - 2\alpha_1 r^2 + \alpha_3^2\right] + \left[\frac{\alpha_2^2}{\cos^2\varphi} + \left(\frac{dW_3}{\partial\varphi}\right)^2 + \frac{3\alpha_0}{r}\cos^2\varphi - \alpha_3^2\right] = 0. \qquad (12)$$

Исходя из (12), имеем

$$\frac{dW_2}{d\lambda} = \alpha_2,\; W_2 = \alpha_2\lambda,$$

$$\frac{dW_1}{dr} = \sqrt{\frac{2\alpha_0}{r^3} + \frac{2\mu}{r} + 2\alpha_1 - \frac{\alpha_3^2}{r^2}},$$

$$W_1 = \int\sqrt{\frac{2\alpha_1 r^3 + 2\mu r^2 - \alpha_3^2 r + 2\alpha_0}{r^3}}dr,$$

$$\frac{dW_3}{d\varphi} = \sqrt{\frac{3\alpha_0}{-r}\cos^2\varphi - \frac{\alpha_2^2}{\cos^2\varphi} + \alpha_3^2},$$

$$W_3 = \int\sqrt{\frac{3\alpha_0}{-r}\cos^4\varphi + \alpha_3^2\cos^2\varphi - \alpha_2^2}\,\frac{d\varphi}{\cos\varphi},$$

Перепишем (10)

$$V = -\alpha_1 t + \int\sqrt{\frac{2\alpha_1 r^3 + 2\mu r^2 - \alpha_3^2 r + 2\alpha_0}{r}}\,\frac{dr}{r} + \alpha_2\lambda +$$
$$+\int\sqrt{\frac{3\alpha_0}{-r}\cos^4\varphi + \alpha_3^2\cos^2\varphi - \alpha_2^2}\,\frac{d\varphi}{\cos\varphi}. \qquad (13)$$

В соответствии с теоремой Якоби имеем

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial V}{\partial\alpha_1} = \beta_1,\quad \frac{\partial V}{\partial\alpha_2} = \beta_2,\quad \frac{\partial V}{\partial\alpha_3} = \beta_3,\\ &\frac{\partial V}{\partial r} = p_r,\quad \frac{\partial V}{\partial\lambda} = p_\lambda,\quad \frac{\partial V}{\partial\varphi} = p_\varphi. \end{aligned}\right\} \qquad (14)$$

Используя (14), найдем явные выражения с учетом (13)

$$\beta_1 + t = \int\frac{r^{3/2}dr}{\sqrt{2\alpha_1 r^3 + 2\mu r^2 - \alpha_3^2 r + 2\alpha_0}}, \qquad (15)$$

$$\beta_2 = \lambda - \int\frac{\alpha_2}{\sqrt{\frac{3\alpha_0}{-r}\cos^4\varphi + \alpha_3^2\cos^2\varphi - \alpha_2^2}}\frac{d\varphi}{\cos\varphi}, \qquad (16)$$

$$\beta_3 = -\alpha_3 \int \frac{1}{\sqrt{2\alpha_1 r^3 + 2\mu r^2 - \alpha_3^2 r + 2\alpha_0}} \frac{dr}{\sqrt{r}} + \alpha_3 \int \frac{\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{\frac{3\alpha_0}{-r}\cos^4\varphi + \alpha_3^2\cos^2\varphi - \alpha_2^2}}, \tag{17}$$

$$\dot{r} = p_r,\ \alpha_2 = r^2\dot{\lambda}\cos^2\varphi,\ r^2\dot{\varphi} = p_\varphi. \tag{18}$$

а остальные три квадратуры служат для проверки выражений для импульсов.

Используя (15), исключим из (17) интеграл, содержащий r:

$$\frac{\beta_3}{\alpha_3} + \frac{(\beta_1 + t)}{r^2} = \int \frac{\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{\frac{3\alpha_0}{-r}\cos^4\varphi + \alpha_3^2\cos^2\varphi - \alpha_2^2}}, \tag{19}$$

с другой стороны, из (16) имеем

$$\left(\frac{\lambda - \beta_2}{\alpha_2}\right)\cos^2\varphi = \int \frac{\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{\frac{3\alpha_0}{-r}\cos^4\varphi + \alpha_3^2\cos^2\varphi - \alpha_2^2}}, \tag{20}$$

отсюда

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\beta_3}{\alpha_3} + \frac{(\beta_1 + t)}{r^2} - \left(\frac{\lambda - \beta_2}{\alpha_2}\right)\cos^2\varphi = 0, \\ &\alpha_2 = r^2\dot{\lambda}\cos^2\varphi. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Из (21) следует, что наличие выражения r сведет задачу к квадратурам.

Проинтегрируем (15) для случая эллиптического типа движения. В этом случае $\alpha_1 < 0$, поэтому (15) имеет вид

$$\beta_1 + t = \int \frac{\sqrt{r^3}dr}{\sqrt{-2\alpha_1 r^3 + 2\mu r^2 - \alpha_3^2 r - 2\alpha_0}},\ \mu > 0,\ \alpha_0 > 0. \tag{22}$$

По теореме Декарта в полиномах

$$G_4(r) = -2\alpha_1 r^3 + 2\mu r^2 - \alpha_3^2 r - 2\alpha_0, \tag{23}$$

$$G_4(-r) = 2\alpha_1 r^3 + 2\mu r^2 + \alpha_3^2 r - 2\alpha_0. \tag{24}$$

В (23) две смены знака, а в (24) - одна смена знака, следовательно, один отрицательный и два положительных корня. Пусть корни полинома расположены так:

$$d_1 > d_2 > d_3,$$

где d_1 и d_2 – положительные корни, d_3 – отрицательный корень.

Преобразуем (22) к следующему виду

$$\tau = \int \frac{\sqrt{r^3}dr}{\sqrt{-r^3 + a_1 r^2 + a_2 r + a_3}}, \tag{25}$$

где $\tau = \sqrt{2\alpha_1}(\beta_1 + t),\ a_1 = \frac{\mu}{\alpha_1},\ a_2 = -\frac{\alpha_3^2}{2\alpha_1},\ a_3 = -\frac{\alpha_0}{\alpha_1}.$

Полином $G_4(r)$ положителен на двух интервалах

$$d_2 \le r \le d_1,\ r \le d_3,$$

причем второй интервал выпадает, так как $r > 0$.

Перейдем от (25) к нормальной форме Лежандра [3, с. 647]

$$\tau = \mu_0 \int_0^{\psi} \frac{\sqrt{r^3}\,d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}},\ \text{где}\ \mu_0 = \frac{2}{\sqrt{d_{31}}},\ 0<k<1,\ k^2 = \frac{d_{21}}{d_{31}}, \tag{26}$$

$$r = \frac{d_2 d_{31} - d_3 d_{21}\sin^2\psi}{d_{31} - d_{21}\sin^2\psi},\ \text{при}\ \psi = 0\ r = d_2\ \text{и при}\ \psi = \frac{\pi}{2},\ r = d_1. \tag{27}$$

Преобразуем (27), оставляя в разложениях в ряд величины порядка $O(k^5)$:

$$r = d_2[(1+k^2 a_{02} + k^4 a_{04}) + (k^2 a_{12} + k^4 a_{14})\cos\psi + (k^2 a_{22} + k^4 a_{24})\cos 2\psi], \tag{28}$$

где

$$d_0 = \frac{d_3}{d_2},\ a_{02} = \frac{1}{2}(1-d_0),\ a_{04} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2} - d_0\right),\ a_{12} = \frac{1}{2}d_0,\ a_{14} = \frac{1}{8}d_0,$$

$$a_{22} = \frac{1}{2},\ a_{24} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}d_0 - 1\right).$$

Проинтегрировав (26) с учетом (28), принимая во внимание $\tau = \sqrt{2\alpha_1}(\beta_1 + t)$, имеем

$$t = \ell_0 + (\ell_{00} + k^2\ell_{02} + k^4\ell_{04})\psi + (k^2\ell_{12} + k^4\ell_{14})\sin\psi + (k^2\ell_{22} + k^4\ell_{24})\sin 2\psi, \tag{29}$$

где

$$\ell_0 = -\beta_1,\ \ell_{00} = \frac{\mu_0 d_2^{3/2}}{\sqrt{\alpha_1}},\ \ell_{02} = \frac{\ell_{00}}{2}(1+3a_{02}),\ \ell_{12} = \frac{3}{2}\ell_{00}a_{12},$$

$$\ell_{04} = \ell_{00}\left(\frac{3}{4}a_{02} + \frac{3}{4}a_{04} + \frac{27}{32}a_{02}^2 + \frac{27}{64}a_{12}^2 - \frac{21}{256}\right),\ \ell_{22} = \frac{3}{8}\ell_{00},$$

$$\ell_{14} = \ell_{00}\left(\frac{3}{2}a_{14} + \frac{27}{16}a_{02}a_{12} + \frac{51}{64}a_{12}\right),\ \ell_{24} = \left[\frac{3}{4}a_{24} + \frac{27}{128}(a_{12}^2 + a_{02}) - \frac{3}{16}\right].$$

Обратив ряд (29), имеем

$$\psi = (\gamma_0 + k^4\gamma_1) + (\gamma_2 + k^2\gamma_3 + k^4\gamma_4)t + (k^2\gamma_5 + k^4\gamma_6)\sin t + (k^2\gamma_7 + k^4\gamma_8)\sin 2t, \tag{30}$$

где

$$\gamma_0 = -\frac{\ell_0}{\ell_{00}},\ \gamma_1 = \frac{1}{2}\frac{\ell_{02}^2}{\ell_{00}},\ \gamma_2 = \frac{1}{\ell_{00}},\ \gamma_3 = \ell_{02}\gamma_2,\ \gamma_4 = \ell_{04}\gamma_2,\ \gamma_5 = \ell_{12}\gamma_2,$$

$$\gamma_6 = \gamma_2(\ell_{14} + \ell_{02}\ell_{12} - \ell_{12}\ell_{22}),\ \gamma_7 = \ell_{22}\gamma_2,\ \gamma_8 = \gamma_2\left(\ell_{24} + \frac{1}{2}\ell_{12}^2 + \ell_{02}\ell_{22}\right).$$

Теперь мы перепишем (19) в следующем виде

$$\int \frac{\cos\varphi d\varphi}{\sqrt{\frac{6\alpha_0}{r}\cos^4\varphi+\alpha_3^2\cos^2\varphi-\alpha_2^2}}=\frac{1}{\alpha_3}\beta_3+(\beta_1+t)\cdot\{(e_{00}+k^2e_{02}+k^4e_{04})+$$

$$+(k^2e_{12}+k^4e_{14})\cos\psi+(k^2e_{22}+k^4e_{24})\cos 2\psi+k^4e_{34}\cos 3\psi\}, \tag{31}$$

где

$$\psi\approx(\gamma_0+\gamma_2 t),\ e_{00}=d_2^{-2},\ e_{02}=-2e_{00}a_{02},\ e_{04}=e_{00}\left(\frac{3}{8}+\frac{3}{2}a_{12}^2+3a_{02}^2-2a_{04}\right),$$

$$e_{12}=-2e_{00}a_{12},\ e_{22}=-e_{00},\ e_{14}=e_{00}\left(\frac{3}{2}a_{12}+6a_{02}a_{12}-2a_{14}\right),$$

$$e_{24}=e_{00}\left(3a_{12}+\frac{3}{2}a_{12}^2-2a_{14}\right),\ e_{34}=\frac{3}{2}e_{00}a_{12}.$$

Если учесть (30), то из (28) мы имеем явную зависимость r от времени. Преобразуем (31), учитывая (20)

$$\left(\frac{\lambda-\beta_2}{\alpha_2}\right)\cos^2\varphi=\frac{\beta_3}{\alpha_3}+(\beta_1+t)\cdot\{(n_{00}+k^2n_{02}+k^4n_{04})+(k^2n_{12}+k^4n_{14})\cos\gamma_2 t+$$

$$+(k^2n_{22}+k^4n_{24})\cos 2\gamma_2 t+(k^3n_{32}+k^4n_{34})\sin\gamma_2 t+(k^2n_{42}+k^4n_{14})\sin 2\gamma_2 t\}, \tag{32}$$

где

$$n_{00}=e_{00},\ n_{02}=e_{02},\ n_{04}=e_{04},\ n_{12}=e_{12}\cos\gamma_0,\ n_{14}=e_{14}\cos\gamma_0,\ n_{22}=e_{22}\cos 2\gamma_0,$$

$$n_{24}=e_{24}\cos 2\gamma_0,\ n_{32}=-e_{12}\sin\gamma_0,\ n_{34}=e_{14}\sin\gamma_0,\ n_{42}=-e_{22}\sin 2\gamma_0,$$

$$n_{44}=-e_{24}\sin 2\gamma_0.$$

Рис. 2 соответствует рис. 1 при $t=0$, поэтому из (5) имеем

$$X^2+Y^2=\ell^2,$$

с другой стороны, из (21) и (6)

$$X^2+Y^2=(r\cos\varphi)^2,\ \frac{d\lambda}{dt}=\frac{\alpha_2}{(r\cos\varphi)^2}=\frac{\alpha_2}{\ell^2},\ \lambda=\frac{\alpha^2}{\ell^2}t+\lambda_0,$$

$\frac{\alpha^2}{\ell^2}\left[\frac{ì^2ñ^{-1}}{ì^2}\right]=n[ñ^{-1}]$, λ_0 – постоянная интегрирования, следовательно, имеем

$$\lambda=nt+\lambda_0,\ \dot{\lambda}=n.$$

Далее введем «золотое правило». Величины порядка $O(k^2)$ и $O(k^4)$ в угловых переменных можно не учитывать. На самом деле в технических расчетах $k^2\doteq 0{,}01$, исходя из этого, имеем, например,

$$\cos(45^0+0{,}01^0)=0{,}70698,\ \cos 45^0\approx 0{,}70711,$$

тогда предельная абсолютная погрешность равна

$$|\delta|=\frac{\alpha\cdot 100\%}{\cos 45{,}01^0}\approx 0{,}018\%.$$

Таким образом, не учитывая $O(k^2)$, допускаем ошибку всего лишь порядка 0,018%.

Далее мы, используя это правило, из (32) найдем

$$\cos\varphi = \sqrt{\frac{\alpha_2}{nt + (\lambda_0 - \beta_2)}\left[\frac{\beta_3}{\alpha_3} + (\beta_1 + t)n_{00}\right]}, \tag{34}$$

Общее решение ограниченной круговой задачи трех тел в соответствии с (5) и (6) имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\varphi\cos\lambda_0, \\ y &= r\cos\varphi\sin\lambda_0, \\ z &= r\sin\varphi, \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

где r и $\cos\varphi$ определяются соответственно выражениями (28), причем $\psi = \gamma_0 + \gamma_2 t$ и (34). Здесь λ_0 задается начальными условиями задачи.

3. Выводы и заключение

1. При $t = t_0$, $\lambda = \lambda_0$, $\varphi = \varphi_0$, $r = r_0$ пробное тело m_3 начинает движение эллиптического типа с точки $M_0(r_0, \varphi_0, \lambda_0)$, фокус «квазиэллипса» находится в центре масс сжатого сфероида O, далее с течением времени орбита на интервале $d_2 \le r \le d_1$, «деформируясь», равномерно вращается с угловой скоростью $n - \text{const}$ относительно оси Z, причем

$$\lambda_0 \le \lambda \le (nt_k + \lambda_0),\ t_0 \le t \le t_k,\ \cos\varphi_0 \le \varphi \le \cos\varphi_k,$$

где

$$t_0 = \ell_0,\ t_k = \ell_0 + (\ell_{00} + k^2\ell_{02} + k^4\ell_{04})\frac{\pi}{2},$$

$$\cos\varphi_0 = \sqrt{\frac{\alpha_2}{nt_0 + (\lambda_0 - \beta_2)}\left[\frac{\beta_3}{\alpha_3} + (\beta_1 + t_0)n_{00}\right]},$$

$$\cos\varphi_k = \sqrt{\frac{\alpha_2}{nt_k + (\lambda_0 - \beta_2)}\left[\frac{\beta_3}{\alpha_3} + (\beta_1 + t_k)n_{00}\right]}.$$

2. Введена новая версия задачи двух неподвижных центров, которая обладает следующими преимуществами:

– аппроксимирующие выражения просты;

– включает в себя часть возмущений ИСЗ от сжатия;

– задача допускает интегрирование в замкнутой форме;

– позволяет построить решение, которое ближе к истинной орбите, чем «кеплеров эллипс»;

– преодолен серьезный «барьер» метода разделения переменных, связанная с неоднородностью переменных;

– получено новое решение ограниченной круговой задачи трех тел в подвижной системе координат;

– введено новое «золотое правило», которое упрощает аналитические решения, записанные в угловых переменных.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Шинибаев М.Д., Беков А.А. и др. Новая версия задачи 2-х неподвижных центров //Тезисы докладов межд. конф. «Математические методы и современные космические технологии», посвященной 80-летию академика У.М.Султангазина.- Алматы, 2016, 4-5 октября.- С. 186-188.

[2] Себехей В. Теория орбит. Ограниченная задача трех тел.- М.: Наука, 1982.- 656 с.

[3] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров.- М.: Наука, 1968.- 720 с.

REFERENCES

[1] Shinibaev M.D., Bekov A.A. i dr. Novaja versija zadachi 2-h nepodvizhnyh centrov //Tezisy dokladov mezhd. konf. «Matematicheskie metody i sovremennye kosmicheskie tehnologii», posvjashhennoj 80-letiju akademika U.M.Sultangazina.- Almaty, **2016,** 4-5 oktjabrja. S. 186-188. (in Russ.).

[2] Sebehej V. Teorija orbit. Ogranichennaja zadacha treh tel. M.: Nauka, **1982.** 656 s. (in Russ.).

[3] Korn G., Korn T. Spravochnik po matematike dlja nauchnyh rabotnikov i inzhenerov. M.: Nauka, **1968.** 720 s. (in Russ.).

ӘОЖ: 629.195+531.1

М.Д. Шыныбаев[1], С.С. Даирбеков[2], С.А. Жолдасов[2], Д.Р. Алиасқаров[2], Г.Е. Мырзақасова[2], С.А. Шекербекова[2], А.Ж. Садыбек[2]

[1] «Ұлттық ғарыштық зерттеулер мен технологиялар орталығы» АҚ, Алматы қ., Қазақсатан;
[2] Сырдария университеті, Жетісай қ., Қазақстан

ЕКІ ЖЫЛЖЫМАЙТЫН НҮКТЕ ПРОБЛЕМАСЫНЫҢ ЖАҢА НҰСҚАСЫН ҮШ ДЕНЕ ЕСЕБІНДЕ ҚОЛДАНУ

Аннотация. «Жылжымайтын екі нүктелер есебінің жаңа нұсқасы» 2016 жылы енгізілді [1, б. 186-188]. Жаңа нұсқаның негізгі айрықшылығын белгілейік:

1. Екі жылжымайтын нүктелердің күш өрісін өске қатысты симметриялық қысылған сфероидтың күші өрісімен аппроксимацияланған

$$A = B = nC\ ,\ n \neq 0\ ,\ n > 0\ ,$$

мұнда A, B, C – дененің центрлік бас инерциялық моменттері.

2. Жаңа нұсқа басқалардан айрықшылығы, ол жақын орналасқан жасанды Жер серіктерінің қозғалыстарын зерттеуге бейімделген.

Алғашқы рет екі жылжымайтын нүктелер есебі XIX ғасырда пайда болды, бірақ қолданусыз қала берді, өйткені табиғатта оған аналог табылмайды. Тек 1961 жылы Е.А. Гребениковтың, В.Г. Деминнің және Е.П. Аксеновтың зерттеулерінің арқасында бұл ескі есепті жасанды Жер серігінің қозғалысын зерттеуге қолдануға болатындығы белгілі болды. Осылай Л.Эйлер қойған және алғаш рет шешімін алған есеп өміршең болды.

Біздің мақаламызда осы есептің жаңа нұсқасы шектелген шеңберлік үш дене есебінің шешімін табуға қолданылады, ол шешім осы күнде де ғарыштық қозғалысты зерттеу де өте қажет.

Тірек сөздер: жасанды Жер серігі, екі жылжымайтын нүктелер есебі, гравитациялық күш өрісі, үш дене есебі, сынақ денесі, сынақ денесінің қозғалысы, шектелген шеңберлік үш дене есебі.