N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 6, Number 310 (2016), 180 – 187

UDC 622.831.332

M.Ye.Yeskaliyev

Kazakh State women's Pedagogical University, Almaty,
Yeskaliyev@mail.ru

BOUNDARY ELEMENT METHOD FOR THE APPROXIMATE SOLUTION OF THE PROBLEM CAUSED BY THE ACTION OF A LOADED ELEMENT

Abstract. The essence of the boundary element method (BEM) is to reduce the boundary value problems for differential equations to integral equation on the boundary.

In this paper, the boundary element method is applied to the solution of the plane problem of the theory of anisotropic elasticity of the body. Using BEM was calculated tense-deformed condition of the vehicle near an array of cavities. Elastic constants are given for the case of plane strain, and elastic constants are expressed through the technical constant. We used the formula of transformation of the elastic constants at the turn of the coordinate system. The complex potential is obtained by integrating along the single element AB respective capacities for concentrated loads.

We consider the approximate solution of determining the stresses and displacements caused by the action of a single element in a loaded anisotropic body with a cylindrical cavity bounded by two closed curves.

According to the boundary element method (BEM) boundary of the body can be approximated by a broken line, called boundary elements. Performing outline conditions at the centers of these elements is achieved by applying to the boundary elements in a continuous plane of some dummy loads. Stresses and displacements at any point of the plane caused an element, expressed in terms of two complex building, as well as detail the mechanics and mathematical expressions of these potentials.

Key words: elasticity, plasticity, parameter, potential, cavity, algorithm, iterations, system.

УДК 622.831.332

М.Е.Ескалиев

Казахский государственный женский педагогический университет, город Алматы

МЕТОД ГРАНИЧНОГО ЭЛЕМЕНТА ДЛЯ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ, ВЫЗВАННОЙ ДЕЙСТВИЕМ НАГРУЖЕННОГО ЭЛЕМЕНТА

Аннотация. Суть метода граничных элементов (МГЭ) состоит в сведении краевой задачи для дифференциальных уравнений к интегральному уравнению по границе области,

В данной работе метод граничных элементов применен для решения плоской задачи теории упругости анизотропного тела. С использованием МГЭ был проведен расчет напряженно-деформированного состояния транстропного массива вблизи полости. Приведены упругие постоянные для случая плоской деформации, а упругие константы выражаются через технические константы. Использованы формулы преобразования упругих постоянных при повороте координатной систем. Комплексный.потенциал получается интегрированием вдоль одиночного элемента *AB* соответствующих потенциалов для сосредоточенных сил.

Рассматривается приближенное решение об определении напряжений и перемещений, вызванных действием одиночного нагруженного элемента в анизотропном теле с цилиндрической полостью, ограниченную двумя замкнутыми кривыми.

В соответствии с методом граничных элементов (МГЭ) граница тела аппроксимируется ломаной линией, называемых граничными элементами. Выполнение контурных условий в серединах указанных элементов достигается прикладыванием к граничным элементам в сплошной плоскости некоторых фиктивных нагрузок. Напряжения и перемещения в произвольной точке плоскости, вызываемые таким элементом, выражается через два комплексных потенциала, а также подробно представлены механико -математические выражения этих потенциалов.

Ключевые слова: упругость, пластичность, параметр, потенциал, полость алгоритм, система, элемент.

Введение. Метод граничных элементов (МГЭ) может с успехом применяться для решения разнообразных инженерных задач – плоских и пространственных, стационарных, нестационарных. С помощью этого метода рассматривались задачи, возникающие в теории упругости[1 , 2] и пластичности[3-4], в механике разрушения[5], в механике горных пород, в гидродинамике, в теории теплопроводности, в сплошных средах[6].

Следует отметить, что математический аппарат метода граничных интегральных уравнений является полностью классическим и достаточно сильным. Выдающийся вклад в его развитие внесли советские ученые Н.П.Векуа, В.Д.Купрадзе, С.Г.Михлин[7] , Н.И. Мусхелишвили[8] , Д.И.Шерман. Вариант МГЭ, используемый в данной статье, позволяет определить напряжения и перемещения, вызванные действием одиночного нагруженного элемента.

Методы исследования. При решении указанных проблем в статье будут использовано физическое, математическое и компьютерное моделирование, основанное на точных уравнениях теории упругости анизотропного тела[9], теории пластичности [3], полуобратный метод П.И.Перлина[10] теории разрушения твердых тел, а также на современных геолого-геофизических данных горного массива слоистой структуры. Будут использованы классические и современные методы механики деформируемого твердого тела, теории упругости, механики разрушения и вычислительной математики.

Результаты исследования. В данной работе рассматривается слоистое анизотропное тело с протяженной цилиндрической полостью, поперечное сечение которого находятся в условиях плоской деформации. Плоскость поперечного сечения занимает область Ω, ограниченную замкнутыми кривыми Г1 и Г2 (Рис.1). Напряженное состояние плоскости двухосное. На поверхности тела задаются условия, соответствующие корректно поставленной граничной задаче. Требуется определить напряжения и перемещения в плоскости при заданных условиях.

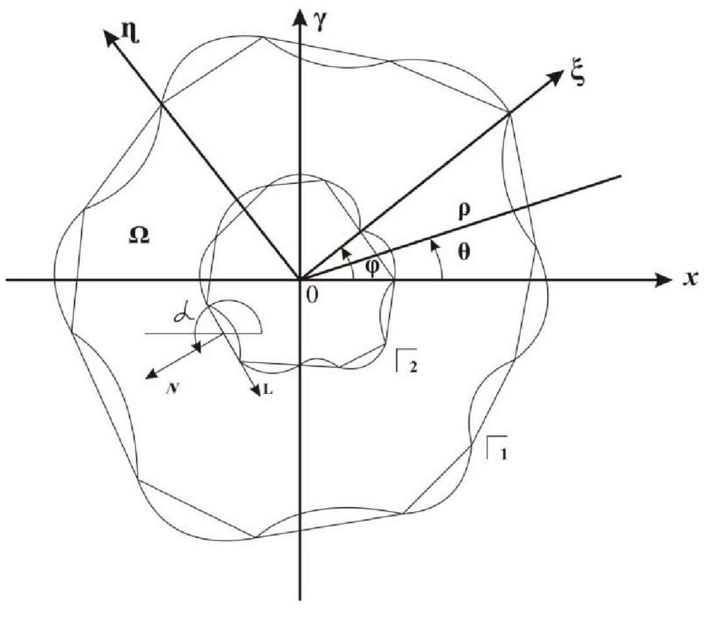


Рисунок 1

В соответствии с МГЭ граница тела аппроксимируется ломаной линией, состоящей из ***n*** прямых отрезков, называемых граничными элементами. Локальные оси каждого элемента (нормальная N и касательная L) проходят через середину элемента.

Пусть на элемент *AB* действует равномерно распределенная нагрузка $\bar{g}_z$, которая приводится к главному вектору $\vec{P}_z = |AB|\bar{g}_z$ с проекциями P_x и P_y на осях *Ox* и *Oy* соответственно(Рис.2).

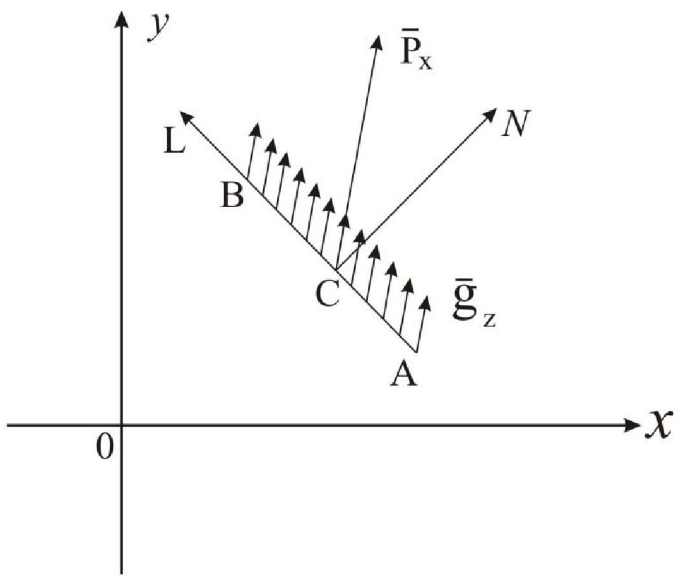


Рисунок 2

Длина отрезка с крайними точками $A(x_1, x_2)$ и $B(x_2, y_2)$ равна

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\ .$$

Напряжения и перемещения в произвольной точке плоскости *D (x,y)*, вызываемые таким элементом, выражаются через две комплексных потенциала С.Г.Лехницкого

$\Phi_j(z_j)$ $(j = 1{,}2)$ здесь $z_j = x + \mu_j y$, μ_j - корни характеристического уравнения четвертой степени [9, 15]

$$\beta_{11}\mu^4 - 2\beta_{16}\mu^3 + (2\beta_{12} + \beta_{66})\mu^2 - 2\beta_{26}\mu + \beta_{22} = 0 \qquad (1)$$

Все корни этого уравнения комплексные.

μ_1 и μ_2 - это корни с положительными мнимыми частями; $\beta_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{i3}a_{j3}}{a_{33}}$, *(i, j=1, 2, 4, 5, 6)*, - приведенные упругие постоянные для случая плоской деформации; a_{ij} – упругие постоянные выражаются через технические константы[9] E_i, G_{ki}, ν_{mn} *(i, j,k,l,m,n=1,2,3)*

Здесь использовались формулы преобразования упругих постоянных при повороте координатной системы, так как технические константы заданы в осях $\xi o \eta$ (см. Рис1), где φ - угол наклона плоскости изотропии к оси *Ox*, α - угол наклона элемента ***AB*** к оси *Ox*.

Потенциалы $\Phi_j(z_j)$ получаются интегрированием вдоль ***AB*** соответствующих потенциалов для сосредоточенных сил. Потенциалы же для для сосредоточенной силы, приложенной в начале координат сплошной бесконечной анизотропной плоскости, имеют вид $\Phi_j(z_j) = A_j \ln z_j$, ($j$=1, 2).

Обе эти функции для анизотропной плоскости являются инвариантными при параллельном переносе начала координат в новую точку . Поэтому, если сила приложена в произвольной точке с координатами (x_0, y_0), то $\Phi_j(z_j) = A_j \ln(z_j - z_{0j})$, где $z_{0j} = x_0 + \mu_j y_0$ - точки, соответствующие точке $z_0 = x_0 + iy_0$ приложения силы в физической плоскости.

Теперь, если интегрировать сосредоточенные силы вдоль отрезка ***AB***, то для комплексных потенциалов от равномерно распределенных сил на этом отрезке согласно работ[1]:

$$\Phi_j(z_j) = \frac{A_j|AB|}{z_{2j} - z_{1j}}\left[(z_j - z_{1j})(\ln(z_j - z_{1j}) - 1) - (z_j - z_{2j})(\ln(z_j - z_{2j}) - 1)\right], \quad (2)$$

здесь $z_{1j} = x_1 + \mu_1 y_1$, $z_{2j} = x_2 + \mu_3 y_2$, $j = 1, 2$,

(x_1 , y_1), (x_2 , y_2) – координаты крайних точек отрезка *AB*, коэффициенты A_j находятся из системы уравнений

$$\begin{aligned}
&A_1 + A_2 - \overline{A}_1 - \overline{A}_2 = \frac{P_y}{2\pi|AB|i},\\
&\mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 - \overline{\mu}_1\overline{A}_1 - \overline{\mu}_2\overline{A}_2 = -\frac{P_x}{2\pi|AB|i},\\
&\mu_1^2 A_1 + \mu_2^2 A_2 - \overline{\mu}_1^2\overline{A}_1 - \overline{\mu}_2^2\overline{A}_2 = -\left(\frac{\beta_{16}}{\beta_{11}}\frac{P_x}{2\pi i} + \frac{\beta_{12}}{\beta_{11}}\frac{P_y}{2\pi i}\right)\frac{1}{|AB|},\\
&\frac{1}{\mu_1}A_1 + \frac{1}{\mu_2}A_2 - \frac{1}{\overline{\mu}_1}\overline{A}_1 - \frac{1}{\overline{\mu}_2}\overline{A}_2 = \left(\frac{\beta_{12}}{\beta_{22}}\frac{P_x}{2\pi i} + \frac{\beta_{26}}{\beta_{22}}\frac{P_y}{2\pi i}\right)\frac{1}{|AB|}
\end{aligned} \quad (3)$$

Напряжения и перемещения в произвольной точке плоскости с координатами (x, y), вызываемые одиночным нагруженным элементом, выражаются формулами:

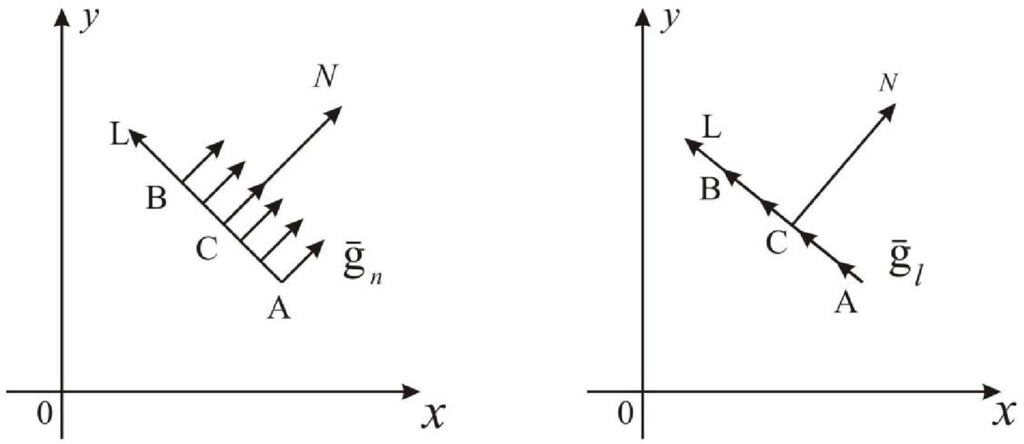
$$\begin{cases}
\sigma_x = 2\operatorname{Re}\left[\Phi_1'(z_1)\mu_1^2 + \Phi_2'(z_2)\mu_2^2\right],\\
\sigma_y = 2\operatorname{Re}\left[\Phi_1'(z_1) + \Phi_2(z_2)\right]\\
\tau_{xy} = -2\operatorname{Re}\left[\Phi_1'(z_1)\mu_1 + \Phi_2'(z_2)\mu_2\right],\\
u = 2\operatorname{Re}\left[\Phi_1(z_1)p_1 + \Phi_2(z_2)p_2\right],\\
\vartheta = 2\operatorname{Re}\left[\Phi_1(z_1)q_1 + \Phi_2(z_2)q_2\right]
\end{cases} \quad (4)$$

Здксь

$$\begin{cases} p_1 = \beta_{11}\mu_1^2 + \beta_{12} - \beta_{16}\mu_1, \\ p_2 = \beta_{11}\mu_2^2 + \beta_{12} - \beta_{16}\mu_2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_1 = \beta_{12}\mu_1 + \dfrac{\beta_{22}}{\mu_1} - \beta_{26}, \\ q_2 = \beta_{12}\mu_2 + \dfrac{\beta_{22}}{\mu_2} - \beta_{26} \end{cases}$$

Используя приведенные выше выражения, можно найти в локальной системе координат NCL напряжения и перемещения в любой точке бесконечной анизотропной плоскости для равномерно распределенных вдоль отрезка AB нормальной нагрузок $\bar{g}_n$ и $\bar{g}_l$ (Рис.3).



Сурет 3

Если точка, в которой нужно определить неизвестные величины, находятся на отрезке AB , (то есть это точка C), то при интегрировании коплексного потенциала для сосредоточенной силы возникает особенность. В этом случае интегрирование производится не по отрезку AB, а по ломаной $ADEFGB$ при $\varepsilon \to 0$, $\delta \to 0$ (здесь $\varepsilon = DC = CG$, $\delta = DE$),

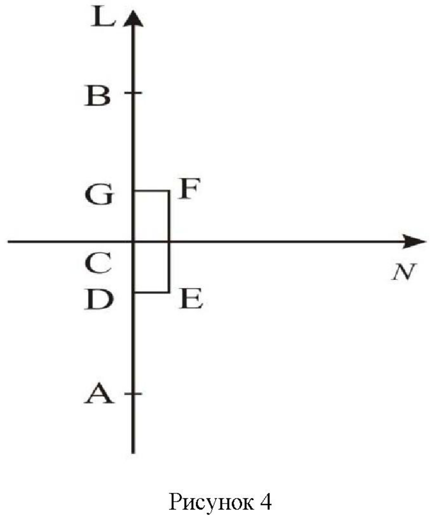


Рисунок 4

Исследования показали, что в этом случае можно формально применить выражение для комплексного потенциала в локальных осях *NCL*.

С использованием МГЭ в варианте работ[1] можно решить ряд задач о предельном равновесии транстропного массива с отверстием без наложения ограничения на степень упругой анизотропии в упругопластической постановке[11, 12], что качественно улучшает полуобратный метод П.И.Перлина[10] и работы других авторов[17-19] в подобных исследованиях.

Обсуждение результатов. Математический аппарат метода граничных интегральных уравнений (МГИУ) является полностью классическим и достаточно сильным. Выдающийся вклад в его развитие внесли советские ученые Н.П.Векуа, В.Д.Купрадзе, С.Г.Михлин, Н.И. Мусхелишвили [8] , Д.И.Шерман. Вариант МГЭ, используемый в данной статье, позволяет определить напряжения и перемещения, вызванные действием одиночного нагруженного элемента. В практическом применении к задачам механики и в разработке алгоритмов для его численной реализации принадлежит американским исследователям Т.А.Крузу, Ф.Дж.Риззо[13] и советским ученым А.Я.Александров у и В.К.Косенюку[14.].. В статье использована анизотропная модель [9, 15 -20], где учитываются все комплекты механико-геологические характеристики реального горного массива и их натурные структуры.

Выводы. Привлечение модели анизотропного породного массива к задачам механики горных пород само по себе не ново. Оно берет начало еще с работ Г.Н.Савина [20]. Затем С.Г.Лехницким [9] была рассмотрена вертикальная выработка (шахтный ствол) в массиве с горизонтальной плоскостью изотропии. Влияние угла этой плоскости на устойчивость ствола впервые изучено Ж.С.Ержановым и А.Я.Синяевым[16]. В статье дана обоснованная постановка МГЭ для решения задачи транстропного тела с цилиндрической полостью. Полученные научные результаты в некоторой степени может влиять на развитие прикладной геофизики, геомеханики, прикладной математики и на механику сплошных сред.

Источник финансирования исследований. Отдельные люди (авторы данной статьи).

ЛИТЕРАТУРА

[1] Айталиев Ш.М., Каюпов М.А. Метод граничного элемента для решения плоской задачи теории упругости анизотропного тела. Изв. АНКазССР, сер.физм-мат., 1980, №5, с.6-12.

[2] Александров А.Я. Решение основных задач теории упругости путем численной реализации метода интегральных уравненийю. Всб.: Успехи механики деформируемых сред, М, : Наука, 1975, с. 3-24.

[3] Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.. 1969, 360 с.

[4] Христианович С.А., Шемякин Е.И. К теории идеальной пластичности. Механика твердого тела. 1967 № 4, с. 11-18.

[5] Черепанов Г.П. О квазихрупком разрушении. Прикл. Математика и механика. 1968, т.33, вып, с.6, с. 1034- 1042.

[6] Седов Л.И. Введение в механику сплошной среды.

[7] Михлин С,Г. О приближенном решении односторонних вариационных задач. Изв. вузов Математика, 1980. .т. 31, с.45-58.

[8] Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966, 707с.

[9] Лехницкий С.Г. Теория упругости анизотропного тела. М.. 1977, 415с.

[10] Перлин П.И. Пибліженный метод решения упругопластических задач. Инженерный журнал, 1960, вып.28, с. 9-16.

[11] Ескалиев М.Е., Каюпов М.А., Масанов Ж.К. О решении упругопластической задачи для анизотропной среды с отверстием методом граничного элемента. //Изв.АНКазССР, сер.физм-мат. 1983, №1, с.15-20.

[12] Ескалиев М.Е., Кублашова Ж.С. Решение упругопластической задачи для массива со штреком. Труды научной конференции «Геодинамика и напряженное состояние недр Земли" . Новосибирск, 2006, с. 182-184.

[13] Risso F.J., Shippy D.J. A method for stress defermination in plan anisotropic elastic bodies. J. Composite Materials, 1970, vol.4 p. 36-61.

[14] Косенюк В.К. Решение плосеой задачи теории упругости для ортотропных тел при помощи численной реализации методаинтегральных уравнений. Изв. АН СССР, Механика твердого тела, 1980, № 6, с. 80-85.

[15] Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Масанов Ж.К. Устойчивость горизонтальных выработок в наклонно-слоистом массиве. Алма-Ата, Наука КазССР, 1971, 160с.

[16] Ержанов Ж.С., Синяев А.Я. Напряжения в анизотропном массиве, ослабленном вертикальной выработкой круглого сечения. Вестник АН КазССР, 1963, №10, с.19-24.

[17] Ескалиев М.Е., Каюпов М.А., Масанов Ж.К. О решении упругопластической задачи для анизотропной среды с отверстием методом граничных элементов. Изв. АН КазССР. Серия физ.-мат. 1983, № 1, с.15-20.

[18] Ескалиев М.Е., Масанов Ж.К. К упругопластическому состоянию анизотропного тела с отверстием. //В кн.: Механика тектонических процессов. Алма-Ата, Наука, 1983, с.152-166.

[19] Ескалиев М.Е. Влияние дилатансии пород на упругопластическое состояние выработки в транстропном массиве. Известия мин.науки –Академии наук РК. Серия физ.-мат, 1996, №3, с.72-78.

[20] Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев, Наукова думка, 1968, 887с.

REFERENCES

[1] Ajtaliev Sh.M., Kajupov M.A. Metod granichnogo jelementa dlja reshenija ploskoj zadachi teorii uprugosti anizotropnogo tela. Izv. ANKazSSR, ser.fizm-mat., 1980, №5, s.6-12.

[2] Aleksandrov A.Ja. Reshenie osnovnyh zadach teorii uprugosti putem chislennoj realizacii metoda integral'nyh uravnenijju. Vsb.: Uspehi mehaniki deformiruemyh sred, M, : Nauka, 1975, s. 3-24.

[3] Kachanov L.M. Osnovy teorii plastichnosti. M.. 1969, 360 s.

[4] Hristianovich S.A., Shemjakin E.I. K teorii ideal'noj plastichnosti. Mehanika tverdogo tela. 1967 № 4, s. 11-18.

[5] Cherepanov G.P. O kvazihrupkom razrushenii. Prikl. Matematika i mehanika. 1968, t.33, vyp, s.6, s. 1034- 1042.

[6] Sedov L.I. Vvedenie v mehaniku sploshnoj sredy.

[7] Mihlin S,G. O priblizhennom reshenii odnostoronnih variacionnyh zadach. Izv. vuzov Matematika, 1980. .t. 31, s.45-58.

[8] Mushelishvili N.I. Nekotorye osnovnye zadachi matematicheskoj teorii uprugosti. M.: Nauka, 1966, 707s.

[9] Lehnickij S.G. Teorija uprugosti anizotropnogo tela. M.. 1977, 415s.

[10] Perlin P.I. Piblizhennyj metod reshenija uprugoplasticheskih zadach. Inzhenernyj zhurnal, 1960, vyp.28, s. 9-16.

[11] Eskaliev M.E., Kajupov M.A., Masanov Zh.K. O reshenii uprugoplasticheskoj zadachi dlja anizotropnoj sredy s otverstiem metodom granichnogo jelementa. //Izv.ANKazSSR, ser.fizm-mat. 1983, №1, s.15-20.

[12] Eskaliev M.E., Kublashova Zh.S. Reshenie uprugoplasticheskoj zadachi dlja massiva so shtrekom. Trudy nauchnoj konferencii «Geodinamika i naprjazhennoe sostojanie nedr Zemli” . Novosibirsk, 2006, s. 182-184.

[13] Risso F.J., Shippy D.J. A method for stress defermination in plan anisotropic elastic bodies. J. Composite Materials, 1970, vol.4 p. 36-61.

[14] Kosenjuk V.K. Reshenie ploseoj zadachi teorii uprugosti dlja ortotropnyh tel pri pomoshhi chislennoj realizacii metodaintegral'nyh uravnenij. Izv. AN SSSR, Mehanika tverdogo tela, 1980, № 6, s. 80-85.

[15] Erzhanov Zh.S., Ajtaliev Sh.M., Masanov Zh.K. Ustojchivost' gorizontal'nyh vyrabotok v naklonno-sloistom massive. Alma-Ata, Nauka KazSSR, 1971, 160s.

[16] Erzhanov Zh.S., Sinjaev A.Ja. Naprjazhenija v anizotropnom massive, oslablennom vertikal'noj vyrabotkoj kruglogo sechenija. Vestnik AN KazSSR, 1963, №10, s.19-24.

[17] Eskaliev M.E., Kajupov M.A., Masanov Zh.K. O reshenii uprugoplasticheskoj zadachi dlja anizotropnoj sredy s otverstiem metodom granichnyh jelementov. Izv. AN KazSSR. Serija fiz.-mat. 1983, № 1, s.15-20.

[18] Eskaliev M.E., Masanov Zh.K. K uprugoplasticheskomu sostojaniju anizotropnogo tela s otverstiem. //V kn.: Mehanika tektonicheskih processov. Alma-Ata, Nauka, 1983, s.152-166.

[19] Eskaliev M.E. Vlijanie dilatansii porod na uprugoplasticheskoe sostojanie vyrabotki v transtropnom massive. Izvestija min.nauki –Akademii nauk RK. Serija fiz.-mat, 1996, №3, s.72-78.

[20] Savin G.N. Raspredelenie naprjazhenij okolo otverstij. Kiev, Naukova dumka, 1968, 887s.

ӘОЖ: 622.831.332

М.Е. Есқалиев

Қазақ мемлекеттік қызлар педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

ЖҮКТЕЛГЕН ЭЛЕМЕНТ ӘСЕРІНЕН БОЛАТЫН ЕСЕПТІ ЖУЫҚТАП ШЕШУ ҮШІН ШЕКАРАЛЫҚ ЭЛЕМЕНТТЕР ӘДІСІ

Аннотация. Шекаралық элементтер әдісінің (ШЭӘ) мағнасы жиектік есептердегі дифференциалдық теңдеулер үшін, оларды аймақ шекарасы бойынша интегралдық теңдеулерге келтіру болып табылады. Қарастырылып отырған жұмыта шекаралық элементтер әдісі серпімді анизотропиялық денедегі жазық деформация есебі үшін қолданылған. ШЭӘ қолдана отырып транстропты дененің қуыс маңайындағы кернеулі-деформациялық күйіне есептеулер жүргізілген. Жазық деформация үшін серпімді тұрақтылары беріліп, олар техникалық тұрақтылар арқылы өрнектелген. Серпімді тұрақтыларды координаттық жүйені бұрудағы түрлендіру формулалары пайдаланылған. Дара элемент ***AB*** бойында интегралдау арқылы комплексті потенциалдың өрнегі алынған.

Цилиндрлік қуысы бар екі қисық сызықтармен тұйықталған анизотропты денедегі дара жүктелген әсерден болған элементтегі кернеулер мен жылжуларды анықтаудың жуықтама жолдары көрсетілген. Шекаралық элементтер әдісінет (ШЭӘ) сәйкес дене шекарасы шекаралық элементтер деп аталатын сынық сызықтармен бейнеленеді. Көрсетілген элементтер ортасындағы пішіндік шарттардың орындалуы тұтас жазықтықта шекралық элементтерге кейбір жалған әсерлердің жүктелуімен орындалады. Жазықтықтың кезкелген нүктесінде осы элементтерден туындаған кернеулер мен жылжулар екі комплексті потенциалдар арқылы өрнктеліп, онымен қоса осы потенциалдардың механика-математикалық өрнегі келтірілген.

Түйін сөздер: серпімділік, икемділік, параметр, әлеует, шұңқыр алгоритмі, жүйе, элемент.