N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 1, Number 317 (2018), 98 – 105

УДК 510.67

С.С. Байжанов[1], Б.Ш. Кулпешов[2]

[1]Институт математики и математического моделирования, Алматы;
[2]Международный университет информационных технологий, Алматы
e-mail: sayan-5225@mail.ru; e-mail: b.kulpeshov@iitu.kz

ОБ ОБОГАЩЕНИИ СЧЕТНО КАТЕГОРИЧНЫХ СЛАБО О-МИНИМАЛЬНЫХ ТЕОРИЙ БИНАРНЫМИ ПРЕДИКАТАМИ

Аннотация.В настоящей работе исследуются вопросы сохранения теоретико-модельных свойств при обогащениях 1-неразличимых счетно категоричных слабо о-минимальных структур произвольным бинарным предикатом. Ранее исследовались вопросы сохранения теоретико-модельных свойств при обогащениях счетно категоричных слабо о-минимальных теорий унарными предикатами. Введено понятие эквивалентность-генерируемой формулы: если $R(x,y)$ – p-стабильная формула для некоторого неалгебраического 1-типа p ,то $R(x,y)$ называется эквивалентность-генерируемой формулой, если любая p-стабильная выпуклая вправо или влево формула, образованная из максимальных выпуклых подмножеств множества $R(M,a)$ для некоторого $a \in p(M)$ является эквивалентность-генерирующей.В терминах вновь введенного понятия эквивалетность-генерируемой формулы получен критерий сохранения счетной категоричности 1-неразличимого слабо о-минимального обогащения бинарным предикатом 1-неразличимых счетно категоричных слабо о-минимальных структур ранга выпуклости 1.

Ключевые слова: слабая о-минимальность, счетная категоричность, 1-неразличимость, обогащение моделей, эквивалентность-генерирующая формула, отношение эквивалентности.

Пусть L — счетный язык первого порядка. Всюду в данной статье мы рассматриваем L-структуры и предполагаем что L содержит символ бинарного отношения $<$, который интерпретируется как линейный порядок в этих структурах. Настоящая работа касается понятия *слабой о-минимальности*, первоначально глубоко исследованного Д. Макферсоном, Д. Маркером и Ч. Стейнхорном в [1]. Подмножество A линейно упорядоченной структуры M называется *выпуклым*, если для любых $a,b \in A$ и $c \in M$ всякий раз когда $a<c<b$ мы имеем $c \in A$. *Слабо о-минимальной структурой* называется линейно упорядоченная структура $M = \langle M,=,<,\ldots\rangle$ такая, что любое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа выпуклых множеств в M. Вспомним, что такая структура M называется *о-минимальной*, если каждое определимое (с параметрами) подмножество структуры M является объединением конечного числа интервалов и точек в M. Таким образом, слабая о-минимальность является обобщением о-минимальности. Вещественно замкнутые поля с собственным выпуклым кольцом нормирования обеспечивают важный пример слабо о-минимальных (не о-минимальных) структур.

Пусть A,B — произвольные подмножества линейно упорядоченной структуры M. Тогда выражение $A<B$ означает, что $a<b$ всякий раз когда $a \in A$ и $b \in B$. Выражение $A<b$ означает что $A<\{b\}$. Через A^+ (и соответственно A^-) будем обозначать множество элементов b рассматриваемой структуры с условием $A<b$ ($b<A$).

Определение 1[2] Пусть T — слабо о-минимальная теория, M — достаточно насыщенная модель теории T, и пусть $\phi(x)$ — произвольная M-определимая формула с одной свободной переменной.

Ранг выпуклости формулы $\phi(x)$ $(RC(\phi(x)))$ определяется следующим образом:

1) $RC(\phi(x))\geq 1$, если $\phi(M)$ бесконечно.

2) $RC(\phi(x))\geq\alpha+1$, если существуют параметрически определимое отношение эквивалентности $E(x,y)$ и бесконечное число элементов $b_i, i\in\omega$, такие, что:

• Для любых $i,j\in\omega$, всякий раз когда $i\neq j$ мы имеем $M\vDash\neg E(b_i,b_j)$

• Для каждого $i\in\omega$ $RC(E(x,b_i))\geq\alpha$ и $E(M,b_i)$ — выпуклое подмножество множества $\phi(M)$

3) $RC(\phi(x))\geq\delta$, если $RC(\phi(x))\geq\alpha$ для всех $\alpha\leq\delta$ (δ предельный).

Если $RC(\phi(x))=\alpha$ для некоторого α, то мы говорим что $RC(\phi(x))$ определяется. В противном случае (т.е. если $RC(\phi(x))\geq\alpha$ для всех α), мы полагаем $RC(\phi(x))=\infty$.

В частности, теория имеет ранг выпуклости 1, если не существует определимого (с параметрами) отношения эквивалентности с бесконечным числом выпуклых бесконечных классов.

В настоящей работе мы исследуем вопрос сохранения свойств при обогащениях моделей счетно категоричных слабо о-минимальных теорий бинарными предикатами. Ранее в работах [3] – [5] нами был исследован вопрос сохранения свойств при обогащениях моделей счетно категоричных слабо о-минимальных теорий унарными предикатами. Как известно, в работе [6] Байжанов Б.С. доказал что обогащение модели слабо о-минимальной теории унарным предикатом, выделяющим конечное число выпуклых множеств, сохраняет слабую о-минимальность обогащенной теории. Однако в случае обогащения модели слабо о-минимальной теории бинарным предикатом, выделяющим при каждом фиксированном как первом, так и втором параметре, конечное число выпуклых множеств, обогащенная теория может потерять слабую о-минимальность (Пример 4).

Вспомним некоторые понятия, первоначально введенные в [1].

Пусть $Y\subset M^{n+1}$ — $\varnothing$–определимое множество, пусть $\pi: M^{n+1}\to M^n$ — проекция, которая отбрасывает последнюю координату, и пусть $Z:=\pi(Y)$. Для каждого $\bar{a}\in Z$ пусть $Y_{\bar{a}}:=\{y:(\bar{a},y)\in Y\}$. Предположим что для каждого $\bar{a}\in Z$ множество $Y_{\bar{a}}$ ограничено сверху, но не имеет супремума в M. Пусть $\sim$ — $\varnothing$–определимое отношение эквивалентности на M^n, определяемое следующим образом:

$$\bar{a}\sim\bar{b} \text{ для всех } \bar{a},\bar{b}\in M^n\setminus Z, \text{ и } \bar{a}\sim\bar{b} \Leftrightarrow \sup Y_{\bar{a}}=\sup Y_{\bar{b}}, \text{если } \bar{a},\bar{b}\in Z.$$

Пусть $\bar{Z}:=Z/\sim$, и для каждого кортежа $\bar{a}\in Z$ мы обозначаем через $[\bar{a}]$~-класс кортежа $\bar{a}$. Существует естественный $\varnothing$–определимый линейный порядок на $M\cup\bar{Z}$, определяемый следующим образом. Пусть $\bar{a}\in Z$ и $c\in M$. Тогда $[\bar{a}]<c$ тогда и только тогда, когда $w<c$ для всех $w\in Y_{\bar{a}}$. Если неверно что $\bar{a}\sim\bar{b}$, то существует некоторый $x\in M$ такой, что $[\bar{a}]<x<[\bar{b}]$ или $[\bar{b}]<x<[\bar{a}]$, и поэтому $<$ индуцирует линейный порядок на $M\cup\bar{Z}$. Мы называем такое множество $\bar{Z}$ *сортом* (в данном случае, $\varnothing$–определимым сортом) в $\bar{M}$, где $\bar{M}$ — Дедекиндово пополнение структуры M, и рассматриваем $\bar{Z}$ как естественно вложенную в $\bar{M}$. Аналогично мы можем получить сорт в $\bar{M}$, рассматривая инфимумы вместо супремумов.

Определение 2[1] Пусть M — линейно упорядоченная структура, $D\subseteq M$ — бесконечное множество, $K\subseteq\bar{M}$, $f:D\to K$ — функция. Будем говорить, что f является *локально возрастающей (локально убывающей, локально константой)* на D, если для любого $x\in D$

существует бесконечный интервал $J \subseteq D$, содержащий x, так что f является строго возрастающей (строго убывающей, константой) на J.

Будем также говорить, что функция f является *локально монотонной* на множестве $D \subseteq M$, если f является либо локально возрастающей, либо локально убывающей на D.

Предложение 3[7]Пусть M — слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический тип. Тогда любая функция в A-определимый сорт, область определения которой содержит множество $p(M)$, является локально монотонной или локально константой на $p(M)$.

Пример 4 Пусть $M := \langle \mathrm{R}, < \rangle$ — линейно упорядоченная структура на множестве вещественных чисел R. Очевидно что M — модель счетно категоричной о-минимальной теории. Обогатим модель M новым бинарным отношением $S(x,y)$ следующим образом: пусть $M' := \langle \mathrm{R}, <, S^2 \rangle$ так что $S(x,y)$ является графиком следующей унарной функции f, определяемой как $f(b) = 2b$ для каждого $b \in \mathrm{Q}$ и $f(c) = -c$ для каждого $c \in \mathrm{R} \setminus \mathrm{Q}$. Очевидно что для каждого $a \in M$ $S(a,M)$ и $S(M,a)$ являются одноэлементными множествами, т.е. выпуклыми множествами. Тем не менее, замечаем что M' не является слабо о-минимальной структурой, поскольку не существует разбиения множества R на конечное число выпуклых множеств, на каждом из которых определимая функция f была бы локально монотонной или локально константой.

Пример 5 Пусть $M := \langle \mathrm{Q}, < \rangle$ — линейно упорядоченная структура на множестве рациональных чисел Q. Очевидно что M — счетно категоричная о-минимальная структура. Обогатим модель M новым бинарным отношением $E(x,y)$ следующим образом: пусть $M' := \langle \mathrm{Q}, <, E^2 \rangle$ так что для любых $a,b \in \mathrm{Q}$

$$E(a,b) \Leftrightarrow (2n-1)\sqrt{2} < a,b < (2n+1)\sqrt{2}$$

для некоторого $n \in \mathrm{Z}$.

Тогда нетрудно понять, что $E(x,y)$ — отношение эквивалентности, разбивающее Q на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, причем E-классы упорядочены по типу $\omega^* + \omega$.

Может быть доказано, что M' — слабо о-минимальная структура, но $Th(M')$ не является счетно категоричной.

Пример 6 Пусть $M := \langle \mathrm{Q} \times \mathrm{Q}, <, E^2 \rangle$ — линейно упорядоченная структура на множестве $\mathrm{Q} \times \mathrm{Q}$, упорядоченном лексикографически. Отношение $E(x,y)$ определяется следующим образом: для любых $a = (m_1, n_1), b = (m_2, n_2) \in Q \times Q$ $E(a,b) \Leftrightarrow m_1 = m_2$.

Очевидно, что $E(x,y)$ — отношение эквивалентности, разбивающее $\mathrm{Q} \times \mathrm{Q}$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов, причем E-классы упорядочены по типу Q.

Расширим основное множество $\mathrm{Q} \times \mathrm{Q}$ структуры M добавлением к каждому E-классу двух элементов, являющихся левой и правой концевыми точками E-класса. В результате получим новую структуру $M' := \langle M', <, E^2 \rangle$. Рассмотрим обеднение структуры M' до структуры $M'' := \langle M', < \rangle$. Очевидно что M'' — счетно категоричная о-минимальная структура. Ее обогащение $M' := \langle M', <, E^2 \rangle$ является счетно категоричной линейно упорядоченной структурой, но $Th(M')$ не является слабо о-минимальной.

Определение 7[8] Пусть M — слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M$, M — $|A|^+$-насыщенна, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический.

(1) A-определимая формула $F(x,y)$ называется *p-стабильной*, если существуют α, γ_1, $\gamma_2 \in p(M)$ такие, что $F(M,\alpha) \setminus \{\alpha\} \neq \varnothing$ и $\gamma_1 < F(M,\alpha) < \gamma_2$.

(2) p-стабильная формула $F(x,y)$ называется *выпуклой вправо (влево)*, если существует $\alpha \in p(M)$ такой, что $F(M,\alpha)$ выпукло, α — левая (правая) концевая точка множества $F(M,\alpha)$ и $\alpha \in F(M,\alpha)$.

В Примере 5 формула $F(x,y) := y \le x \wedge E(x,y)$ является p-стабильной выпуклой вправо, а формула $G(x,y) := y \ge x \wedge E(x,y)$ является p-стабильной выпуклой влево, где $p(x) := \{x = x\} \in S_1(\varnothing)$.

Пусть $F_1(x,y), F_2(x,y)$ — p-стабильные выпуклые вправо (влево) формулы. Будем говорить, что $F_2(x,y)$ *больше чем* $F_1(x,y)$, если существует $\alpha \in p(M)$ такой, что $F_1(M,\alpha) \subset F_2(M,\alpha)$.

Определение 8[9] Будем говорить, что p–стабильная выпуклая вправо (влево) формула $F(x,y)$ является *эквивалентность-генерирующей*, если для любых $\alpha, \beta \in p(M)$ таких, что $M \vDash F(\beta,\alpha)$, имеет место следующее:

$$M \vDash \forall x \left(x \ge \beta \rightarrow \left(F(x,\alpha) \leftrightarrow F(x,\beta)\right)\right) \left(M \vDash \forall x \left(x \le \beta \rightarrow \left(F(x,\alpha) \leftrightarrow F(x,\beta)\right)\right)\right)$$

Лемма 9[9]Пусть M — слабо о-минимальная структура, $A \subseteq M, p \in S_1(A)$ — неалгебраический, M — $|A|^+$–насыщенна. Предположим что $F(x, \ y)$ — p-стабильная выпуклая вправо (влево) формула, являющаяся эквивалентность-генерирующей. Тогда

1) $G(x,y) := F(y,x)$ — p-стабильная выпуклая влево (вправо) формула, являющаяся также эквивалентность-генерирующей.

2) $E(x,y) := F(x,y) \vee F(y,x)$ — отношение эквивалентности, разбивающее $p(M)$ на бесконечное число бесконечных выпуклых классов.

Предложение 10[9]Пусть T — счетно категоричная слабо о-минимальная теория, $M \models T$, $A \subseteq M$, $p \in S_1(A)$ — неалгебраический. Тогда любая p-стабильная выпуклая вправо (влево) формула является эквивалентность-генерирующей.

Пример 11 Пусть $M := \langle \mathbb{Q}, < \rangle$ — линейно упорядоченная структура на множестве рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Очевидно что M — счетно категоричная 1-неразличимая о-минимальная структура. Рассмотрим обогащение структуры M новым бинарным отношением $R(x,y)$: пусть $M' := \langle \mathbb{Q}, <, R^2 \rangle$ так что для любых $a,b \in \mathbb{Q}$

$$R(a,b) \Leftrightarrow a \le b < a + \sqrt{2}.$$

Очевидно что $R(a,M')$ и $R(M',a)$ выпуклы для каждого $a \in M'$. Может быть доказано что M' — 1-неразличимая слабо о-минимальная структура.

Формула $F(x,y) := R(y,x)$ является p-стабильной выпуклой вправо, где $p(x) := \{x = x\} \in S_1(\varnothing)$. Нетрудно понять, что $F(x,y)$ не является эквивалентность-генерирующей.

Рассмотрим следующие формулы:

$$R_2(x,y) := \exists t[R(x,t) \wedge R(t,y)], \quad R_n(x,y) := \exists t[R_{n-1}(x,t) \wedge R(t,y)], n \ge 2$$

Для каждого $a \in M'$ мы имеем

$$R(a,M')\subset R_2(a,M')\subset\ldots\subset R_n(a,M')\subset\ldots,$$

откуда получаем, что $Th(M')$ не является счетно категоричной.

Пусть M — слабо о-минимальная структура, $A\subseteq M$, $p\in S_1(A)$ — неалгебраический, $R(x,y)$ — A-определимая формула, являющаяся p-стабильной, т.е. для любого $a\in p(M)$ существуют $b_1,b_2\in p(M)$ такие, что $b_1<R(M,a)<b_2$.

В силу слабой о-минимальности M множество $R(M,a)$ является объединением конечного числа выпуклых множеств. Очевидно что каждое из этих множеств является $A\cup\{a\}$-определимым. Существует конечное число таких определимых выпуклых множеств, находящихся левее элемента a. Обозначим их через $R_1^l(x,y),\ldots,R_s^l(x,y)$, при этом будем считать что

$$R_s^l(M,a)>R_{s-1}^l(M,a)>\ldots>R_1^l(M,a)\geq a.$$

Аналогично существует конечное число определимых выпуклых множеств, находящихся правее элемента a. Обозначим их через $R_1^r(x,y),\ldots,R_m^r(x,y)$, при этом будем считать что

$$a\leq R_1^r(M,a)<R_2^r(M,a)<\ldots<R_m^r(M,a).$$

Возможно существует определимое выпуклое множество, внутренность которого содержит элемент a. Обозначим его через $R^c(x,y)$. Таким образом, если $R^c(M,a)\neq\varnothing$, то существуют $b_1,b_2\in R^c(M,a)$ такие, что $b_1<a<b_2$.

Определим следующие формулы:

$$F^c(x,y):=y\leq x\wedge R^c(x,y)$$

$$G^c(x,y):=y\geq x\wedge R^c(x,y)$$

$$F_i^r(x,y):=y\leq x\wedge\forall t[R_i^r(t,y)\to x<t],1\leq i\leq m$$

$$F_i^{r*}(x,y):=y\leq x\wedge\exists t[R_i^r(t,y)\wedge x\leq t],1\leq i\leq m$$

$$G_j^l(x,y):=y\geq x\wedge\forall t[R_j^l(t,y)\to t<x],1\leq i\leq s$$

$$G_j^{l*}(x,y):=y\geq x\wedge\exists t[R_j^l(t,y)\wedge t\leq x],1\leq i\leq s$$

Очевидно что формулы $F^c(x,y),F_i^r(x,y),F_i^{r*}(x,y),1\leq i\leq m$, являются p-стабильными выпуклыми вправо, а формулы $G^c(x,y),G_j^l(x,y),G_j^{l*}(x,y),1\leq j\leq s$, являются p-стабильными выпуклыми влево.

Будем говорить, что формула $R(x,y)$ является *эквивалентность-генерируемой*, если каждая нетривиальная формула из множества $\Delta:=\{F^c(x,y)$, $F_i^r(x,y)$, $F_i^{r*}(x,y)$, $G^c(x,y)$, $G_j^l(x,y)$, $G_j^{l*}(x,y)\mid 1\leq i\leq m,1\leq j\leq s\}$ является эквивалентность-генерирующей.

Пример 12Пусть $M:=\langle\mathbb{Q}\times\mathbb{Q},<\rangle$ - линейно упорядоченная структура на множестве $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, упорядоченным лексикографически. Очевидно что M - счетно категоричная о-минимальная структура.

Введем следующие две бинарные формулы $E(x,y)$ и $R_1(x,y)$ на множестве $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$: для любых $a=(m_1,n_1),b=(m_2,n_2)\in\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$

$$E(a,b)\Leftrightarrow m_1=m_2$$

$$R_1(a,b)\Leftrightarrow m_1=m_2\wedge n_1\leq n_2<n_1+\sqrt{2}$$

Пусть $R(x,y):=y\le x\wedge E(x,y)\wedge\neg R_1(x,y)$ и $M':=\langle \mathsf{Q}\times\mathsf{Q},<,R^2\rangle$ — обогащение модели M бинарным предикатом $R(x,y)$. Очевидно что для любого $a\in M'$ $R(M',a)$ выпукло и $a<R(M',a)$.

Может быть установлено, что M' - 1-неразличимая слабо о-минимальная структура, однако $Th(M')$ не является счетно категоричной.

Рассмотрим следующие формулы:

$$F_1(x,y):=y\le x\wedge\forall t\,[R(t,y)\to x<t]$$

$$F_2(x,y):=y\le x\wedge\exists t\,[R(t,y)\wedge x\le t]$$

Формулы $F_1(x,y),F_2(x,y)$ являются p - стабильными выпуклыми вправо, где $p(x):=\{x=x\}\in S_1(\varnothing)$, при этом $F_2(x,y)$ - эквивалентность-генерирующая, а $F_1(x,y)$ не является эквивалентность-генерирующей. Следовательно, предикат $R(x,y)$ не является эквивалентность-генерируемым.

Теорема 13 Пусть M - 1-неразличимая счетно категоричная слабо о-минимальная структура ранга выпуклости 1, M' - 1-неразличимое слабо о-минимальное обогащение структуры M бинарным предикатом $R(x,y)$.

Тогда $Th(M')$ - счетно категорична $\Leftrightarrow$ когда выполнены следующие условия:

(1) $R(x,y)$ и $L(x,y):=R(y,x)$ - эквивалентность-генерируемые;

(2) Для каждого $\varnothing$-определимого отношения эквивалентности $E(x,y)$, порожденного предикатом $R(x,y)$, множество E-классов является плотно упорядоченным.

Доказательство Теоремы 13. ($\Rightarrow$) Предположим что $Th(M')$ - счетно категорична. Рассмотрим предикат $R(x,y)$. В силу слабой о-минимальности структуры M' для любого $a\in M'$ $R(M',a)$ и $R(a,M')$ есть объединения конечного числа выпуклых множеств. В силу Предложения 10 обе формулы $R(x,y)$ и $L(x,y)$ должны быть эквивалентность-генерируемыми.

Пусть $E(x,y)$ - произвольное $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности. В силу 1-неразличимости множество E-классов должно быть либо плотно упорядочено без концевых точек, либо дискретно упорядочено без концевых точек. Откуда в силу счетной категоричности множество E-классов должно быть плотно упорядочено.

($\Leftarrow$) Пусть $R(x,y)$ и $L(x,y)$ — эквивалентность-генерируемые формулы. Рассмотрим $E^*(x,y)$ — произвольное $\varnothing$-определимое отношение эквивалентности, порожденное предикатом $R(x,y)$. По условию множество E^*-классов плотно упорядочено. В силу 1-неразличимости не существует ни крайнего левого E^*-класса, ни крайнего правого E^*-класса. Также в силу 1-неразличимости не существует E^*-класса, имеющего хотя бы одну концевую точку (если каждый E^*-класс имел бы хотя бы одну концевую точку, то получили бы противоречие со слабой о-минимальностью M').

В силу слабой о-минимальности структуры M' для любого $a\in M'$ $R(M',a)$ и $R(a,M')$ есть объединения конечного числа выпуклых множеств. Поэтому существует лишь конечное число формул вида $F^c(x,y)$, $F_i^r(x,y)$, $F_i^{r*}(x,y)$, $G^c(x,y)$, $G_j^l(x,y)$, $G_j^{l*}(x,y)$, $1\le i\le n_1$, $1\le j\le n_2$ для некоторых $n_1,n_2<\omega$. Поскольку по условию $R(x,y)$, $L(x,y)$ — эквивалентность-генерируемые формулы, то каждая нетривиальная формула из списка $\Delta := \{F^c(x,y),\ F_i^r(x,y),\ F_i^{r*}(x,y),\ G^c(x,y), G_j^l(x,y),\ G_j^{l*}(x,y) \mid 1 \le i \le n_1, 1 \le j \le n_2\}$ порождает отношение эквивалентности. Таким образом, получаем лишь конечное число $\varnothing$-определимых отношений эквивалентности, порождаемых предикатом $R(x,y)$.

Пусть $\{E_1(x,y), E_2(x,y), \dots, E_n(x,y)\}$ — полный список $\varnothing$-определимых отношений эквивалентности, порождаемых предикатом $R(x,y)$. В силу 1-неразличимости не существуют i, j такие, что $i \ne j$, $1 \le i, j \le n$ и для некоторого $a \in M'$ $E_i(a,M') \subset E_j(a,M')$, $\sup E_j(a,M') = \sup E_j(a,M')$ или $\inf E_i(a,M') = \inf E_j(a,M')$.

Также не существуют $i, j \in \{1,\dots,n\}$ такие, что для некоторого $a \in M'$ $E_i(a,M') \setminus E_j(a,M') \ne \varnothing$ и $E_j(a,M') \setminus E_i(a,M') \ne \varnothing$.

Далее, для любых $1 \le i, j \le n$ если существует $a \in M'$ такой, что $E_i(a,M') \subseteq E_j(a,M')$, то для любого $a \in M'$ $E_i(a,M') \subseteq E_j(a,M')$. Таким образом, существует $1 \le m \le n$ (возможна ситуация когда для некоторых $i, j \in \{1,\dots n\}$ $E_i(a,M') = E_j(a,M')$) и возможно некоторая перенумерация имеющихся отношений эквивалентности таким образом чтобы для любого $a \in M'$ мы имели бы

$$E_1(a,M') \subset E_2(a,M') \subset \dots \subset E_m(a,M').$$

Так как по условию множество E-классов плотно упорядочено для каждого $\varnothing$-определимого отношения эквивалентности $E(x,y)$, то E_i-подклассы каждого E_{i+1}-класса плотно упорядочены без концевых точек, где $0 \le i \le m$ и

$$E_0(x,y) := x = y, \quad E_{m+1}(x,y) := x = x \wedge y = y.$$

Далее можно установить стандартными методами, что $Th(M')$ допускает элиминацию кванторов с точностью до атомных формул и формул $E_i(x,y)$, $1 \le i \le m$, откуда получаем, что $Th(M')$ — счетно категорична.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Macpherson H.D., Marker D. and Steinhorn C. Weakly o-minimal structures and real closed fields, Transactions of The American Mathematical Society, volume 352 (2000), pp. 5435–5483.

[2] Kulpeshov B.Sh. Weakly o-minimal structures and some of their properties, The Journal of Symbolic Logic, volume 63 (1998), pp. 1511–1528.

[3] Байжанов С.С., Кулпешов Б.Ш., Инвариантные свойства при обогащениях моделей вполне о-минимальных теорий, Известия Национальной Академии наук Республики Казахстан, серия физико-математическая, № 1 (311), 2017, С. 65-71.

[4] Байжанов С.С., Кулпешов Б.Ш., Обогащение моделей вполне о-минимальных теорий унарными предикатами, Тезисы докладов ежегодной научной апрельской конференции Института математики и математического моделирования КН МОН РК, Алматы, 2017, С. 16-18.

[5] Байжанов С.С., Кулпешов Б.Ш., Обогащение моделей счетно категоричных слабо о-минимальных теорий унарными предикатами, Тезисы международной конференции "Актуальные проблемы чистой и прикладной математики", посвященной 100-летию академика Тайманова А.Д., Алматы, 2017, С. 13-15.

[6] Baizhanov B.S. Expansion of a model of a weakly o-minimal theory by a family of unary predicates, The Journal of Symbolic Logic, volume 66 (2001), pp. 1382–1414.

[7] Kulpeshov B.Sh. Countably categorical quite o-minimal theories, Journal of Mathematical Sciences, volume 188, issue 4 (2013), pp. 387–397.

[8] Baizhanov B.S. One-types in weakly o-minimal theories, Proceedings of Informatics and Control Problems Institute, Almaty, 1996, pp. 75–88.

[9] Baizhanov B.S., Kulpeshov B.Sh. On behaviour of 2-formulas in weakly o-minimal theories, Mathematical Logic in Asia, Proceedings of the 9th Asian Logic Conference (editors S. Goncharov, R. Downey, H. Ono), Singapore, World Scientific, 2006, pp. 31–40.

С.С. Байжанов [1], Б.Ш. Кулпешов [2]

[1]Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан;
[2]Халықаралық ақпараттық технологиялар университеті, Алматы, Қазақстан,

БИНАРЛЫ ПРЕДИКАТТАРМЕН ЕСЕПТІК-КАТЕГОРИЯЛЫҚ БОСАҢ О-МИНИМАЛДЫҚ ТЕОРИЯЛАР БАЙЫТУ ТУРАЛЫ

Аннотация. Осы жұмыста кез келген бинарлы предикатпен 1-анықталмалы есептік-категориялық босаң о-минималды құрылымдар байыту кезінде теориятикалық-модельдік қасиеттерді сақталу сұрақтары зерттеленеді. Осының алдында унарлы предикаттармен есептік-категориялық босаң о-минималды теорияларды байыту кезінде теориятикалық-модельдік қасиеттерді сақталу сұрақтарызерттеленді. Эквиваленттік-қалыптасқан формула түсінігі енгізілді: егер $R(x,y)$ – кейбір алгебралық емес 1-тип p үшін p-стабильді формула болса, онда $R(x,y)$ эквиваленттік-қалыптасқан формула деп аталады егер кез келген p-стабильді оң жаққа қарай дөңесті немесе сол жаққа қарай дөңесті формуласы $R(M,a)$ жиынтығының максималды дөңес шекарасынан қалыптастырылған кейбір $a \in p(M)$ эквиваленттік-өрнекті болады. Енгізілген эквиваленттік-қалыптасқан формула түсінік терминдермен дөңестік рангісі 1 1-анықталмалы есептік-категориялық босаң о-минималды құрылымдарды 1-анықталмалы босаң о-минималды байытында есептік категориялықты сақтау критерийі алынды.

Кілт сөздер:босаң о-минималдық, есептік категориялық, 1-анықталмаушылық, модельдер байыту, эквиваленттік-өрнекті формула, эквиваленттік қатынасы.

UDC 510.67

S.S. Baizhanov[1], B.Sh. Kulpeshov[2]

[1]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan, e-mail: sayan-5225@mail.ru;
[2]International Information Technology University, Almaty, Kazakhstan, e-mail: b.kulpeshov@iitu.kz

ON EXPANDING COUNTABLY CATEGORICAL WEAKLY O-MINIMAL THEORIES BY BINARY PREDICATES

Abstract. In the present work, questions of preservation of model-theoretical properties at expanding a model of a 1-indiscernible countably categorical weakly o-minimal theory by an arbitrary binary predicate are studied. Questions of preservation of model-theoretical properties at expanding of countably categorical weakly o-minimal theories by unary predicates had been before studied.Here thenotionofanequivalence-genera table formulahasbeenintroduced: if $R(x,y)$ is a p-stable formula for some non-algebraic 1-type p, then $R(x,y)$ is called an equivalence-generatable formula if every p-stable convex to the right or convex to the left formula formed from maximal convex subsets of the set $R(M,a)$ for some element $a \in p(M)$ is equivalence-generating. In terms of the introduced notion of an equivalence–generatable formula, a criterion for preserving the countable categoricity of a 1-indiscernible weakly o-minimal expansion by a binary predicate of 1-indiscernible countably categorical weakly o-minimal structures having the convexity rank 1has been obtained.

Keywords: weak o-minimality, countable categoricity, 1-indiscernibility, expansion of models, equivalence-generating formula, equivalence relation.