N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 1, Number 317 (2018), 94 – 97

УДК 510.54

Б.С. Калмурзаев[1], Н.А. Баженов[2]

[1]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан;
[2]Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, Россия.
birzhan.kalmurzayev@gmail.com, bazhenov@math.nsc.ru

О ВЛОЖИМОСТИ -СТЕПЕНЕЙ В ОТНОШЕНИЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ В ИЕРАРХИИ ЕРШОВА

Аннотация. Работа посвящена исследованию отношений эквивалентности в иерархии Ершова. Отношение эквивалентности Rна ωвычислимо сводится к отношению эквивалентности S, если существует вычислимая функция $f(x)$, такая что, для любых xи y условия xRyи $f(x)Sf(y)$эквивалентны. В данной работе строятся изоморфные вложения полурешёток -степеней в частичные порядки отношений эквивалентности в иерархии Ершова относительно вычислимой сводимости.

Ключевые слова. Отношения эквивалентности, вычислимая сводимость, иерархия Ершова, вычислимо перечислимые множества, полурешетка вычислимо перечислимых m-степеней.

Множество A*m-сводится* к множеству B (символически,$A \leq_m B$), если существует вычислимая функция fтакая, что для любого $x \in \omega$условиях$x \in A$и $f(x) \in B$эквивалентны.Здесь функцию fназывают сводящей функцией. Говорят, что множество A*1-сводится* к множеству B (символически, $A \leq_1 B$), если $A \leq_m B$и сводящая функция является взаимно-однозначной. $A \equiv_m B$ обозначает, что $A \leq_m B$ и $B \leq_m A$. m-степень множества A обозначается через $d(A)$, то есть $d(A) = \{B: A \equiv_m B\}$. На множестве -степеней естественный порядок будем обозначать так же $\leq_m$:

$$d(A) \leq_m d(B) \leftrightharpoons A \leq_m B.$$

Частично упорядоченное множество $L_m^0 = (\{d(X): X$ – рекурсивно перечислимое множество и $X \neq \emptyset, \omega\}, \leq_m)$ является верхней полурешеткой и идеалом верхней полурешетки всех -степеней. Операция взятия верхней грани в L_m^0 индецируется прямой суммой множеств:

$$A \oplus B \leftrightharpoons \{2x: x \in A\} \cup \{2x+1: x \in B\}.$$

Хорошо известно, что L_m^0 имеет наибольший и наименьший элементы. Все определения и необходимые сведения по m-сводимости можно найти в книгах[1, 2].

Определение([6]). Говорят, что множество A принадлежит классу Σ_n^{-1} иерархии Ершова, если существуют вычислимые функции $f(x,t)$ и $h(x,t)$ такие, что для всех $x, t \in \omega$ выполняются следующие условия:

(1) $A(x) = \lim_s f(x,s)$, причем $f(x,0) = 0$;
(2) $h(x,0) = n \,\&\, h(x,t+1) \leq h(x,t)$;
(3) $f(x,t+1) \neq f(x,t) \Rightarrow h(x,t+1) < h(x,t)$.

Пару функций $\langle f, h\rangle$, удовлетворяющих условиям определения, назовем Σ_n^{-1}-*аппроксимацией* множества A. Говорят, что множество A принадлежит классу Π_n^{-1} иерархии Ершова, если дополнение множества A принадлежит классу Σ_n^{-1}. Множества из класса Σ_n^{-1} (Π_n^{-1}) также называют Σ_n^{-1}-множествами (Π_n^{-1}-множествами).Σ_1^{-1}-множества известны как вычислимо перечислимые множества. Более подробно с результатами про эти множества можно ознакомиться в работах[3, 4, 5, 6].

Классы Σ_n^{-1} и Π_n^{-1} являются замкнутыми вниз по m-сводимости, известно [3], что эти классы имеют универсальные множества. Кроме того, частично упорядоченные множества $(\Sigma_n^{-1}, \leq_m)$ и $(\Pi_n^{-1}, \leq_m)$являются верхними полурешетками.

Предложение 1. Множество $A \in \Sigma_n^{-1}$ тогда и только тогда, когда существует вычислимая функция $h(x,t)$такая, что для всех $x, t \in \omega$ выполняются следующие условия:

(1) $A(x) = rest(\lim_s h(x,s), 2)$;

(2) $h(x, 0) = 0 \,\& h(x,t) \leq h(x, t+1) \& \, h(x,t) \leq n$;

Предложение 2. Множество $A \in \Pi_n^{-1}$ тогда и только тогда, когда существует вычислимая функция $h(x,t)$такая, что для всех $x, t \in \omega$ выполняются следующие условия:

(1) $A(x) = \overline{sg}\big(rest(\lim_s h(x,s), 2)\big)$;

(2) $h(x, 0) = 0 \,\& h(x,t) \leq h(x, t+1) \& \, h(x,t) \leq n$;

Считаем, что все рассматриваемые множества и отношения эквивалентности заданы на ω. Для ненулевого $n \in \omega$ через Id_n обозначается вычислимое отношение эквивалентности, заданное по правилу: $x \, \mathrm{Id}_n \, y$ в том и только том случае, когда x и yэквивалентны по модулю n. Через Id обозначим тождественное отношение эквивалентности. Для отношения эквивалентности E и $a \in \omega$ через $[a]_E$ обозначается класс -эквивалентности элемента a.

Определение. Отношение эквивалентности E на ω называется Σ_n^{-1}-*отношением эквивалентности* (Π_n^{-1}-*отношением эквивалентности*) если множество E является Σ_n^{-1}-множеством (Π_n^{-1}-множеством).

Говорят, что отношение эквивалентности R*вычислимо сводится* к отношению эквивалентности Q (символически,$R \leq_c Q$), если существует вычислимая функция f, для которой $(x,y) \in R$ тогда и только тогда, когда $\big(f(x), f(y)\big) \in Q$ при любых $x, y \in \omega$, т.е. существует алгоритм, который транслирует разные классы R–эквивалентности в разные классы Q–эквивалентности. Отношения эквивалентности R и Q называются эквивалентными, если они сводятся друг к другу. Совокупность всех отношений эквивалентности, эквивалентныхR, называется степенью отношения эквивалентности R.

Очевидно, что отношение эквивалентности $E <_c Id$тогда и только тогда, когда$E \equiv_c \mathrm{Id}_n$ для некоторого $n \in \omega$.

Определение (А. Сорби и У.Эндрюс). Отношение эквивалентности E называется *тёмным* (*dark*), если E несравнимо с тождественным отношением эквивалентности относительно сводимости $\leq_c$.

Для произвольного в.п. множестваA пусть $R_A = \{(x,y) : x = y \vee \{x,y\} \subseteq A\}$.

Предложение ([11]). Пусть A, B–непустые в.п. множества.

1) R_A – вычислимо тогда и только тогда, когда A – вычислимо.
2) Из $A \leq_1 B$следует$R_A \leq_c R_B$.
3) Если$R_A \leq_c R_B$, тогда$A \leq_m B$.

Из этого предложения следует, что в.п. 1-степени можно изоморфно вложить в структуру в.п. отношений эквивалентности. Хорошо известно, что в.п. 1-степени не являются полурешеткой. Следовательно, структуры отношений эквивалентности с вычислимой сводимостью также не являются полурешетками.

В данной работе мы исследуем вложение полурешеток -степеней в структуры эквивалентностей в иерархии Ершова. О вложениях полурешетки в.п. -степеней в полурешетки Роджерса можно найти в работах [7, 8, 9, 10]. О вложении в.п. 1-степеней в структуры отношений эквивалентности можно посмотреть в [11, 12].

Вложение полурешеток -степеней в структуры отношений эквивалентности иерархии Ершова.

Теорема 1. *Для любого*$n > 0$*полурешетка* $(\Sigma_n^{-1}, \leq_m)$ *изоморфно вложима в структуру* (Π_{2n}^{-1}-*отношения эквивалентности,*$\leq_c$).

Доказательство. Рассмотрим следующий оператор: для произвольного множества X положим

$$T(X) = \big\{(x,y) : \{x,y\} \subseteq X \vee \{x,y\} \subseteq \overline{X}\big\}$$

Очевидно, что для любого множестваX множество T(X) является отношением эквивалентности. Докажем, что отображение $X \to T(X)$ индуцирует изоморфное вложение верхней полурешетки $(\Sigma_n^{-1}, \leq_m)$ в структуру (Π_{2n}^{-1}-отношения эквивалентности,$\leq_c$). А также докажем, что наша оценка для уровня иерархии Ершова неулучшаема. Для этого докажем следующие леммы.

Лемма 1. Если $X \in \Sigma_n^{-1}$, тогда $T(X) \in \Pi_{2n}^{-1}$.

Доказательство леммы 1. Пусть пара функций$\langle f_X, h_X\rangle$ – Σ_n^{-1}-аппроксимация множества X. Построим аппроксимацию множества $T(X)$: для любых $x, y \in \omega$ определим

$$f\big((x,y),t\big) = |f_X(x,t) + f_X(y,t) - 1|;$$
$$h\big((x,y),t\big) = h_X(x,t) + h_X(y,t).$$

Докажем, что пара функций$\langle f, h\rangle$ является Π_{2n}^{-1}-аппроксимацией множества$T(X)$.

1) $f\big((x,y),0\big) = |f_X(x,0) + f_X(y,0) - 1| = 1$. И $\lim_s f\big((x,y),s\big) = |\lim_s f_X(x,s) + \lim_s f_X(y,s) - 1| = |X(x) + X(y) - 1|$.

Из последнего равенства ясно, что $T(X)(x,y) = 1$ тогда и только тогда, когда$X(x) = X(y)$. Значит, $T(X)(x,y) = 1$ тогда и только тогда, когда$\lim_s f\big((x,y),s\big) = 1$.

2) $h\big((x,y),0\big) = h_X(x,0) + h_X(y,0) = n + n = 2n$. И$h\big((x,y),t+1\big) = h_X(x,t+1) + h_X(y,t+1) \leq h_X(x,t) + h_X(y,t) = h(x,y)$.

3) Пусть $f((x,y),t+1) \neq f((x,y),t)$. Значит $f_X(x,t+1) \neq f_X(x,t)$ или $f_X(y,t+1) \neq f(y,t)$. Следовательно, $h_X(x,t+1) < h_X(x,t)$ или $h_X(y,t+1) < h_X(y,t)$. А это, в свою очередь означает, что$h\big((x,y),t+1\big) = h_X(x,t+1) + h_X(y,t+1) < h_X(x,t) + h_X(y,t) = h\big((x,y),t\big)$.

Следовательно, пара функций$\langle f, h\rangle$ является Π_{2n}^{-1}-аппроксимацией множества $T(X)$. Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если $F \leq_c T(X)$ для некоторого Σ_n^{-1}-множества X, то$F \equiv_c T(Y)$ для некоторого Σ_n^{-1} множества Y.

Доказательство леммы 2. Пусть произвольное отношение эквивалентности $F \leq_c T(X)$ посредством функции f. Отношение эквивалентности $T(X)$ состоит из не более двух классов эквивалентности. Значит, отношение эквивалентности F также состоит из не более двух классов. Следовательно, если $Y = f^{-1}(X)$, то $F = T(Y)$. Лемма 2 доказана.

Лемма 3. $X \leq_m Y$ тогда и только тогда, когда $T(X) \leq_c T(Y)$.

Доказательство леммы 3. Обе сводимости можем осуществить одной и той же функцией. Лемма 3 доказана.

Лемма 4. Для любого Π_{2n}^{-1}-множества A существует Σ_n^{-1} множество B такое, что $A \leq_m T(B)$.

Доказательство леммы 4. Пусть пара функций$\langle f_A, h_A\rangle$ – Π_{2n}^{-1}-аппроксимация множества A. Кроме того, пусть h_A – это функция из предложения 2. Построим Σ_n^{-1}-аппроксимацию множества B следующим образом:

$$f_B(2x,t) = \begin{cases} 1, rest(h_A(x,t),4) = 2; \\ 0, \text{в противном случае.} \end{cases}$$
$$f_B(2x+1,t) = \begin{cases} 0, rest(h_A(x,t),4) = 0; \\ 1, \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$\begin{cases} h_B(x,0) = n; \\ h_B(x,t+1) = h_B(x,t) - |f_B(x,t+1) - f_B(x,t)|. \end{cases}$$

Нетрудно понять, что пара функций$\langle f_B, h_B\rangle$ является Σ_n^{-1}-аппроксимацией множестваB. Далее, нетрудно проверить, что $A \leq_m T(B)$ посредством функции $f(x) = (2x, 2x+1)$. Лемма 4 доказана.

Следствие 1. *Если X – m-полное Σ_n^{-1}-множество, то T(X) – m-полное Π_{2n}^{-1}-множество.*

Доказательство. Пусть X – m-полное Σ_n^{-1}-множество. Докажем, что для любого Π_{2n}^{-1}-множестваA справедливо $A \leq_m T(X)$. Из доказательства теоремы ясно, что найдется Σ_n^{-1}-множество Y такое, что $A \leq_m T(Y)$. И очевидно, что $T(Y) \leq_c T(X)$. Пусть $T(Y) \leq_c T(X)$ посредством функции f, тогда $T(Y) \leq_m T(X)$ посредством функции

$$h\big((x,y)\big) = \big(f(x), f(y)\big).$$

В силу транзитивности -сводимости справедливо $A \leq_m T(X)$.

Следствие 2. *Для любого невычислимого множестваX отношение эквивалентности* $T(X)$ *является тёмным.*

Следствие 3. *Полурешетка вычислимо перечислимых -степеней изоморфно вложима в структуру* (Π_2^{-1}*-отношения эквивалентности,*$\leq_c$).

Следствия 2,3 очевидны.

Вопрос. Можно ли изоморфно вложить полурешетку в.п. -степеней в структуру в.п. отношений эквивалентности?

Исследования Н.А. Баженова выполнены при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 16-31-60058 мол_а_дк.

Исследования Б.С. Калмурзаева выполнены при финансовой поддержке Комитета науки Республики Казахстан, грант ГФ4/3952. «Отношения эквивалентности, предупорядоченные структуры и алгоритмические сводимости на них, как математическая модель баз данных»

ЛИТЕРАТУРА

[1] Роджерс Х., Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость. Издательство «МИР» Москва, 1972 г., 624 с.

[2] Мальцев А.И., Алгоритмы и рекурсивные функции. Издательство «Наука» Москва, 1965 г., 367 с.

[3] Ершов Ю.Л., Об одной иерархии множеств I, Алгебра и логика, том 7, № 1, 1968 г., с.: 47-74.

[4] Ершов Ю.Л., Об одной иерархии множеств II, Алгебра и логика, том 7, № 4, 1968 г., с.: 15-47.

[5] Ершов Ю.Л., Об одной иерархии множеств III, Алгебра и логика, том 9, № 1, 1970 г., с.: 34-51.

[6] Арсланов М.М., Иерархия Ершова. Казанский государственный университет, 2007 г., 89 с.

[7] Badaev S.A., TalasbaevaZh.T., Computable numberings in the hierarchy of Ershov, in: S.S. Goncharov (ed.) et al., Mathematical logic in Asia. Proc. 9th Asian logic conf. (Novosibirsk, Russia, August 16-19, 2005), NJ, World Scientific, 2006, 17-30.

[8] Badaev S.A., Manat M., Sorbi A., Rogers semilattices of families of two embedded sets in the Ersov hierarchy, Mathematical logic quarterly. Vol. 58, No 4-5, 2012, 366-376.

[9] Калмурзаев Б.С. О вложимости полурешётки L_m^0 в полурешётки Роджерса, Алгебра и логика, том. 55, №3, 2016, с.: 328-340.

[10] Ершов Ю.Л., Теория нумераций, М., Наука, 1977.

[11] Su Gao, Peter Gerdes, Computably enumerable equivalence relations, StudiaLogica, 67, 2001, 27-59.

[12] Andrews U., Lempp S., Miller J.S., Ng K.M., San Mauro L., Sorbi A., Universal computably enumerable equivalence relations, Journal of Symbolic Logic, vol. 79, no. 1, 2014, 60-88.

Б.С. Калмурзаев[1], Н.А. Баженов[2]

[1]аль-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы, Казахстан;
[2]РҒА СБ С.Л. Соболев автындағы математика институты, Новосибирск, Ресей.

ЕРШОВ ИЕРАРХИЯСЫНДА m-ДЕҢГЕЙЛЕРДІҢ ЭКВИВАЛЕНТТІК ҚАТЫНАСТАРҒА ЕНГІЗУЛЕРІ ТУРАЛЫ

Аннотация. Бұл мақала Ершов иерархиясындағы эквиваленттік қатынастарды зерттеуге бағышталған.ω жиынында анықталған R эквиваленттік қатынасы S эквиваленттік қатынасына есептелімді көшіріледі деп атаймыз, егер кез келген x және y элементтері үшін xRyжәне $f(x)Sf(y)$ шарттарыэквивалент болатындай $f(x)$есептелімді функциясы табылатын болса. Бұл мақалада Ершов иерархиясындағы m-деңгейлерді есептелімді көшірулерге байланысты эквиваленттік қатынастардың жартлай ретіне изоморфты енгізулері құрылады.

Кілт сөздер. Эквивалеттік қатынастар, есептелімді көшірулер,Ершов иерархиясы, рекурсив саналымды жиындар, рекурсив саналымды m-деңгейлердің жатрыторы.

B.S. Kalmurzayev[1], N.A. Bazhenov[2]

[1]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan;
[2]Sobolev Institute of Mathematics, Novosibirsk, Russia.

EMBEDDABILITY OF m-DEGREES INTO EQUIVALENCE RELATIONS IN THE ERHOV HIERARCHY

Abstract. The paper is devoted to the study of equivalence relations in the hierarchy of Ershov. An equivalence relation R on ω is computably reducible to an equivalence relation S if there exists a computable function $f(x)$ such that for any x and y, the conditions xRy and $f(x)Sf(y)$ are equivalent. In this paper we construct isomorphic embeddings of semilattices of m-degrees into partial orders of equivalence relations in the hierarchy of Ershov with respect to computable reducibility.

Key words. Equivalence relations, computable reducibility, hierarchy of Ershov, computably enumerable sets, semilattice of computably enumerable m-degrees.