

NEWS

OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES

ISSN 1991-346X

Volume 2, Number 312 (2017), 132 – 145

UDC 517.9

M.B. Saprigina¹, M. I. Akylbayev², A.Sh.Shaldanbayev³

¹Southern Kazakhstan state pharmaceutical academy;

²Kazakhstan Engineering and Pedagogical University of Friendship of Peoples, Kazakhstan, Shymkent;

³M. Auezov South Kazakhstan State University, Shymkent
shaldanbaev51@mail.ru

THE INVERSE PERIODIC PROBLEM
OF THE STURM-LIOUVILLE OPERATOR

Annotation. The Sturm-Liouville operator with periodic boundary conditions has an intrinsic symmetry, the manifestation of this symmetry is the existence of a multiple spectrum of this operator, which served as an obstacle to the formulation of the inverse problem. A multiple spectrum generates non-trivial invariant subspaces. In this paper it is shown that the projectors of these invariant subspaces can be used to recover the right-hand side of the equation. The uniqueness theorem is proved.

Keywords: Sturm-Liouville operator, completeness, basis property, eigenvectors, Green's function, Fourier series, spectrum, eigenvalues, inverse problem, right-hand side.

УДК 517.9

М.Б. Сапрыгина¹, М.И. Ақылбаев², А.Ш. Шалданбаев³

¹Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік фармацевтика академиясы;

²Қазақстанның инженерлі-педагогикалық халықтар достығы университеті, Шымкент қ-сы;

³Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті

ШТУРМ-ЛИУВИЛЛ ОПЕРАТОРЫНЫҢ
ПЕРИОДТЫ КЕРІ ЕСЕБІ

1.Кіріспе.

Табиғатта периодты құбылыстар жиі кездеседі, мысалы жүректің соғысы, күн мен түннің алмасуы, ай мен күннің қозғалысы, электронның ядроны айналуы, мүмкін сол себепті болар, бұл тақырыпқа арналған еңбектер жетерлік десе-де болады. Мысалы, француздың аса көрнекті ғалымы А. Пуанкаре, орыс зерттеушісі Жуковский, Ляпунов, Андронов т.б. Бұл зерттеушілердің бәрі тура есептер санатына жатады, ал бұл есептерге кері есептер тың тақырыптар санатына жатады, және өте аз зерттелген десек-те болады [1-16]. Оның өзіндік себеп салдары бар, ең басты қиындық мұндай есептердің шешімдері шектеусіз операторлар арқылы өрнектеледі, сол себепті, бұл шешімдер қателіктерге төзімсіз болып келеді, яғни аз ғана қателік үлкен қателіктерге жол ашады. Сондықтан мұндай есептерді шешуге арнайы алгоритмдер қолданады [17-24]. Периодты есептің шешімі Гриннің функциясы арқылы өрнектеледі, ал Гриннің функциясына әсіре үзіксіз оператор сәйкес келетіндіктен есептің шешімі әсіре үзіксіз оператор арқылы өрнектеледі. Әсіре үзіксіз операторға кері оператор шектеусіз, олай болса іздеп отырған шешіміміз шектеусіз оператор арқылы өрнектеледі, сондықтан, біз бұл жолды таңдамадық. Біздің таңдаған жолымыз физикалық десек-те болады, яғни ол физикалық бақылау нәтижесіне негізделген. Әрине, бұл алгоритімнің орнықтылығын тексеру керек еді, бірақ біз мұндай есеп қоймадық және онымен айналыспадық.

2.Зерттеу әдістері**Периодты есеп**

Гилберттің $H = L^2(0, \pi)$ кеңістігінде мынадай

$$Ly = -y''(x) = \lambda y(x), x \in (0, \pi) \quad (1)$$

$$y(0) = y(\pi), y'(0) = y'(\pi) \quad (2)$$

шекаралық есепті қарастырайық, мұндағы $y(x)$ - белгісіз функция, ал λ - спектралді параметр. Кезкелген λ үшін $y(x) = 0$ функциясы (1)-(2) есептің шешімі болары айдан анық, оны елеусіз шешім дейік, ал егер белгілі бір λ үшін $y(x, \lambda) \not\equiv 0$ шешімі сәйкес келсе онда оны осы елеулі шешімге сәйкес меншікті мән тиесілі меншікті функция дейік. Кейбір шекаралық есептердің елеулі шешімдері болмауы мүмкін, мұндай есептердің қатарына Кошидің мына,

$$Cy = -y''(x) = \lambda y(x), x \in (0, \pi)$$

$$y(0) = 0, y'(\pi) = 0$$

есебі жатады, мұндай есептерді вольтерлі деп атайды.

Енді біз жоғарыдағы (1)-(2) периодты шекаралық есебінің меншікті мәндері мен меншікті функцияларын табайық, (1) теңдеудің жалпы шешімі мынадай,

$$y(x; \lambda) = A \cos \sqrt{\lambda} x + B \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} \quad (3)$$

екені айдан анық, мұндағы A, B - белгісіз тұрақты шамалар, оларды табу үшін (3) формуланы (2) шекаралық шарттарға апарып қоялық

$$y(0) - y(\pi) = A - A \cos \sqrt{\lambda} \pi - B \frac{\sin \sqrt{\lambda} \pi}{\sqrt{\lambda}} =$$

$$= A (1 - \cos \pi \sqrt{\lambda}) - B \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} = 0;$$

$$y'(x; \lambda) = -\sqrt{\lambda} A \sin \sqrt{\lambda} x + B \cos \sqrt{\lambda} x,$$

$$y'(0) - y'(\pi) = B + \sqrt{\lambda} A \sin \pi \sqrt{\lambda} - B \cos \pi \sqrt{\lambda} =$$

$$= A \times \sqrt{\lambda} \sin \pi \sqrt{\lambda} + B (1 - \cos \pi \sqrt{\lambda}) = 0.$$

Өлгі әрекеттер нәтижесінде біз мынадай біртекті

$$\begin{cases} A(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda}) - B \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} = 0, \\ A \sqrt{\lambda} \sin \pi \sqrt{\lambda} + B(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda}) = 0 \end{cases} \quad (4)$$

Теңдеулер системасына келдік. Бұл теңдеулер системасының елеулі шешімі бар болуы үшін оның анықтаушының нөлге айналуы қажетті әрі жеткілікті, яғни мына,

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \cos \pi \sqrt{\lambda} & -\frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \\ \sqrt{\lambda} \sin \pi \sqrt{\lambda} & 1 - \cos \pi \sqrt{\lambda} \end{vmatrix} = 0$$

теңдіктің. Осы формуланы ықшамдайық

$$\Delta(\lambda) = (1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})^2 + \sin^2 \pi \sqrt{\lambda} = 1 - 2 \cos \pi \sqrt{\lambda} + \cos^2 \pi \sqrt{\lambda} + \sin^2 \pi \sqrt{\lambda} =$$

$$= 2 - 2 \cos \pi \sqrt{\lambda} = 2(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda}), \lambda \neq 0 \text{ сәтінде.}$$

Демек, осы $\Delta(\lambda)$ функциясының нөлдерінің квадраттары біздің (1)-(2) есептің меншікті мәндері болады екен. Енді соларды табайық.

$$\Delta(\lambda) = 2(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda}) = 0, 1 - \cos \pi \sqrt{\lambda} = 0, \cos \pi \sqrt{\lambda} = 1,$$

$$\pi \sqrt{\lambda} = 2n\pi, (n \neq 0), \sqrt{\lambda} = 2n, \Rightarrow \lambda_n = (n)^2, n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

Бұл меншікті мәндерге сәйкес меншікті функцияларды (4) теңдеулер системасынан табамыз, $\lambda = \lambda_n = (2n)^2$ болған сәтте бұл системаның барлық коэффициенттері нөлге айналады, олай болса A мен B шамаларын қалауымызша алуға болады. Сонымен

$$y_n(x) = y(x; \lambda_n) = A_n \cos 2nx + B_n \frac{\sin 2nx}{2n}, n \neq 0. \quad (5)$$

Мына,

$$y_{-n}(x) = A_{-n} \cos 2nx + B_{-n} \frac{\sin 2nx}{2n}, n = 1, 2, \dots$$

Теңдіктен теріс индекстердің жаңа меншікті функциялар бермейтінін байқаймыз, сондықтан $n = 1, 2, \dots$ мәндерімен шектелеміз, ал $n = 0$ мәнін арнайы қарастырамыз, бұл сәтте $\lambda = 0$, демек

$$-y''(x) = 0$$

Мұнан $y(x) = Ax + B, A, B - \text{const}$. Осы функцияны (2) шекаралық шарттарға апарып қойсақ, онда

$$\begin{cases} B = A \times \pi + B, \Rightarrow A = 0, y(x) = B - \text{const} \\ A = A \end{cases}$$

боларын көреміз, сонымен $\lambda_0 = 0$ меншікті мән және оған $y_0(x) = B - \text{const}$ меншікті функция сәйкес келеді. Жоғарыдағы (5) формуладан байқайтынымыз әрбір $\lambda_n = (n \neq 0)$ меншікті мәнге екі меншікті функция сәйкес келеді, мысалы, $A_n = 1, B_n = 0$, десек онда

$$y_n(x) = \cos 2nx \quad (n = 1, 2, \dots),$$

ал керісінше $A_n = 0, B_n = 1$ болса, онда

$$y_n(x) = \frac{\sin 2nx}{2n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

болар еді. Сонымен, меншікті функциялар системасы мынау

$$u_n(x) = \cos 2nx, n = 0, 1, 2, \dots$$

$$v_n(x) = \sin 2nx, n = 1, 2, \dots$$

десек-те болады.

Енді осы системаның $L^2(0, \pi)$ кеңістігінде толымды екенін көрсетейік. Айталық белгілі бір $f(x) \in L^2(0, \pi)$ функциясы үшін мына,

$$(f, u_n) = 0, (f, v_n) = 0, n = 0, 1, 2, \dots$$

теңдіктер орындалсын делік, онда $f(x) = 0$ теңдігі $[0, \pi]$ сегментінің барлық нүктелерінде дерлік орындалатынын көрсетейік. Сонымен

$$(f, u_n) = \int_0^\pi f(x) \cos 2nxdx = 0, n = 0, 1, 2, \dots$$

болсын делік, онда $2x = t$ деп алмастыру жасасақ

$$x = \frac{t}{2}, dx = \frac{dt}{2},$$

$$(f, u_n) = \int_0^{2\pi} f\left(\frac{t}{2}\right) \cos nt \frac{dt}{2} = 0, \Rightarrow \int_0^{2\pi} f\left(\frac{t}{2}\right) \cos nt dt =;$$

Сол сыйақты

$$0 = (f, v_n) = \int_0^\pi f(x) \sin 2nx dx = \left| \begin{matrix} 2x = t \\ x = \frac{t}{2} \end{matrix} \right| = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} f\left(\frac{t}{2}\right) \sin nt dt, \Rightarrow$$

$$\int_0^{2\pi} f\left(\frac{t}{2}\right) \sin nt dt = 0, n = 1, 2, \dots$$

Мына, $\{\cos nt, \sin nt\}, n = 0, 1, 2, \dots$ тригонометриялық системаның $L^2(0, \pi)$ кеңістігінде толымды екені бесенеден белгілі, олай болса

$$f\left(\frac{t}{2}\right) = 0,$$

теңдігі $(0, 2\pi)$ интервалының барлық нүктелерінде дерлік орындалады, олай болса $f(x) = 0$ теңдігі $[0, \pi]$ сегментінің барлық нүктелерінде дерлік орындалады.

Енді (1)-(2) Штурм-Лиувилл операторының спектрінің еселік көрсеткішін зерттеп көрелік.

$$\Delta(\lambda) = 2(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})$$

$$\frac{d}{d\lambda} \Delta(\lambda) = 2 \sin \pi \sqrt{\lambda} \times \frac{\pi}{2 \sqrt{\lambda}} = \pi \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}},$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\lambda^2} \Delta(\lambda) &= \pi \times \left[\frac{\left(\pi \sqrt{\lambda} - \frac{(\pi \sqrt{\lambda})^3}{3} + \frac{(\pi \sqrt{\lambda})^5}{5!} \right)''}{\sqrt{\lambda}} \right] = \\ &= \pi \left[\pi - \frac{\pi^3 \lambda}{3} + \frac{\pi^5 \lambda^2}{5!} - \frac{\pi^7 \lambda^3}{7!} \right]' = \pi \left[\frac{\pi^5 \times \lambda^2}{5!} - \frac{\pi^7 \times 3 \times 2 \lambda}{7!} \right]; \\ \frac{d^2}{d\lambda^2} \Delta(\lambda) &= \pi \left[-\frac{1}{2} \lambda^{-\frac{3}{2}} \sin \pi \sqrt{\lambda} + \frac{\cos \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \times \frac{\pi}{2 \sqrt{\lambda}} \right]; \end{aligned}$$

Егер $\lambda = \lambda_n = (2n)^2$ болса, онда

$$\Delta(\lambda_n) = 0, \dot{\Delta}(\lambda_n) = 0, \ddot{\Delta}(\lambda_n) = \frac{\pi^2}{2(2n)^2} \neq 0.$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{d}{d\lambda} \Delta(\lambda) = \pi^2 \neq 0;$$

Енді алынған нәтижемен бір тұжырымдап қоялық.

Теорема Мына,

$$Ly = -y''(x) = \lambda y(x), x \in (0, \pi) \quad (1)$$

$$y(0) = y(\pi), y'(0) = y'(\pi), \quad (2)$$

шекаралық есептің шексіз көп меншікті мәндері бар және олар мыналар

$$\lambda_n = (2n)^2, n = 0, 1, 2, \dots$$

Әрбір нөлден өзгеше меншікті мәндерге қос меншікті функциялар сәйкес келеді олар мыналар,

$$u_n(x) = \cos 2nx, v_n(x) = \sin 2nx, n = 0, 1, 2, \dots$$

$\lambda_0 = 0$ меншікті мәніне тек бір ғана $y_0 = 1$ функциясы сәйкес келеді.

Нөлден өзгеше меншікті мәндер екіеселі, ал $\lambda_0 = 0$ бір еселі.

Гилберттің $H = (0, \pi)$ кеңістігінде Штурм-Лиувиллдің периодты есебін қарастыралық

$$Ly - \lambda y = -y'' - \lambda y(x) = f(x) \quad (6)$$

$$y(0) = y(\pi), y'(0) = y'(\pi) \quad (7)$$

Тұрақтыларды вариациялау әдісімен осы есептің Гриндік функциясын құрайық

$$y_1 = \cos \sqrt{\lambda} x, y_2 = \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}$$

Біртекті $-y''(x; \lambda) = \lambda \times y(x, \lambda)$ теңдеуінің жалпы шешімі

$$y(x; \lambda) = A \cos \sqrt{\lambda} x + \frac{B \sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}$$

болатыны белгілі, мұндағы A, B - тұрақты шамалар, сондықтан жоғарыдағы (6) теңдеудің шешімін мына,

$$y(x; \lambda) = A(x, \lambda) \cos \sqrt{\lambda} x + B(x, \lambda) \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}},$$

түрде іздейміз.

$$y'(x, \lambda) = A' \cos \sqrt{\lambda} x + B' \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} - \sqrt{\lambda} A \sin \sqrt{\lambda} x + B \cos \sqrt{\lambda} x,$$

$$A' \cos \sqrt{\lambda} x + B' \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} = 0 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} y'' &= -\sqrt{\lambda} A' \sin \sqrt{\lambda} x + B' \cos \sqrt{\lambda} x - \lambda A \cos \sqrt{\lambda} x - B \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x, \\ -y'' &= \sqrt{\lambda} A' \sin \sqrt{\lambda} x - B' \cos \sqrt{\lambda} x + \lambda A \cos \sqrt{\lambda} x + B \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x = \\ &= \sqrt{\lambda} A' \sin \sqrt{\lambda} x - B' \cos \sqrt{\lambda} x + \lambda \left[A \cos \sqrt{\lambda} x + B \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} \right] = \\ &= \lambda y + \sqrt{\lambda} A' \sin \sqrt{\lambda} x - B' \cos \sqrt{\lambda} x, \end{aligned} \quad (9)$$

Сонғы (8)-(9) формулаларды біріктіріп,

$$\begin{cases} A' \cos \sqrt{\lambda} x + B' \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} = 0, \\ A' \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x - B' \cos \sqrt{\lambda} x = f(x); \end{cases}$$

белгісіз $A(x; \lambda), B(x; \lambda)$ функциялары үшін теңдеулер системасын аламыз. Алдымен осы системаны Крамер әдісімен шешіп A', B' шамаларын, сосын A, B шамаларын табайық.

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos \sqrt{\lambda} x & \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} \\ \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x & -\cos \sqrt{\lambda} x \end{vmatrix} = -\cos^2 \sqrt{\lambda} x - \sin^2 \sqrt{\lambda} x = -1;$$

$$A' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} \\ f(x) & \frac{-\cos \sqrt{\lambda} x}{(-1)} \end{vmatrix}}{(-1)} = \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} \times f(x),$$

$$B' = \frac{\begin{bmatrix} \cos \sqrt{\lambda} x & 0 \\ \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x & f(x) \end{bmatrix}}{(-1)} = -f(x) \cos \sqrt{\lambda} x,$$

$$A(x) = A + \int_0^x \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} f(t) dt, B(x) = B - \int_0^x \cos \sqrt{\lambda} t f(t) dt;$$

$$y(x, \lambda) = \left(A + \int_0^x \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} f(t) dt \right) \cos \sqrt{\lambda} x + \left(B - \int_0^x \cos \sqrt{\lambda} t f(t) dt \right) \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}},$$

(10)

мұндағы A, B - тұрақты шамалар. Осы (10) формуланы (7) шекаралық шарттарға апарып қойсақ белгісіз A, B коэффициенттерін табамыз.

$$y(0, \lambda) = A, y(\pi, \lambda) = \left(A + \int_0^\pi \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} f(t) dt \right) \cos \pi \sqrt{\lambda} +$$

$$\begin{aligned}
& + \left(B - \int_0^\pi \cos \sqrt{\lambda} t f(t) dt \right) \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}, \\
& A \cos \pi \sqrt{\lambda} + \cos \pi \sqrt{\lambda} \int_0^\pi \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} f(t) dt + \frac{B \sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt = A, \\
& A(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1) + B \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \cos \pi \sqrt{\lambda} \int_0^\pi f(t) \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} dt; \quad (11)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& y'(x; \lambda) = -\sqrt{\lambda} A \sin \sqrt{\lambda} x + B \cos \sqrt{\lambda} x = \\
& = -\sqrt{\lambda} \left(A + \int_0^x f(t) \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} \right) \sin \sqrt{\lambda} x + \left(B - \int_0^x f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt \right) \cos \sqrt{\lambda} x, \\
& y'(0, \lambda) = B, y'(\pi, \lambda) = -\sqrt{\lambda} \left(A + \int_0^\pi f(t) \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} \right) \sin \pi \sqrt{\lambda} + \\
& + \left(B - \int_0^\pi f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt \right) \times \cos \pi \sqrt{\lambda}; \\
& \left(-\sqrt{\lambda} A - \int_0^\pi f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt \right) \sin \pi \sqrt{\lambda} + B \cos \pi \sqrt{\lambda} - \cos \pi \sqrt{\lambda} \int_0^\pi f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt = B, \\
& -\sqrt{\lambda} \sin \pi \sqrt{\lambda} \times A + B (\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1) = \\
& = \cos \pi \sqrt{\lambda} \int_0^\pi f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt + \sin \pi \sqrt{\lambda} \int_0^\pi f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt \quad (12)
\end{aligned}$$

Жоғарыдағы (11)-(12) системаның анықтаушысын есептейік

$$\begin{aligned}
\Delta &= \begin{vmatrix} \cos \pi - 1 & \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \\ -\sqrt{\lambda} \sin \pi \sqrt{\lambda} & \cos \pi \sqrt{\lambda} - 1 \end{vmatrix} = (\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)^2 + \sin^2 \pi \sqrt{\lambda} = \\
&= \cos^2 \pi \sqrt{\lambda} - 2 \cos \pi \sqrt{\lambda} + 1 + \sin^2 \pi \sqrt{\lambda} = 2 - 2 \cos \pi \sqrt{\lambda} = 2(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda}).
\end{aligned}$$

Енді осы (11) –(12) системасын Крамердің әдісімен шешейік, сол үшін алдымен Δ_1, Δ_2 анықтаушытарын есептейік.

$$\begin{aligned}
& \left| \begin{array}{cc} \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\cos \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt & \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \\ \cos \pi \sqrt{\lambda} \int_0^\pi f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt + \sin \pi \sqrt{\lambda} \int_0^\pi f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt & \cos \pi \sqrt{\lambda} - 1 \end{array} \right| = \\
& = \frac{\cos \sqrt{\lambda} \sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\cos^2 \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt - \\
& - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt + \frac{\cos \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt - \\
& - \frac{\cos \pi \sqrt{\lambda} \sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\sin^2 \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt = \\
& = -\frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt + \frac{\cos \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \int_0^\pi f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt - \int_0^\pi f(t) \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} dt = 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt + \frac{\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt. \\
 A = \frac{\Delta_1}{\Delta} &= \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda} (\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} \times \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{1}{2 \sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt; \\
 \Delta_2 &= \begin{vmatrix} \cos \pi \sqrt{\lambda} - 1 & \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\cos \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt \\ -\sqrt{\lambda} \sin \pi \sqrt{\lambda} & \cos \pi \sqrt{\lambda} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt + \sin \pi \sqrt{\lambda} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt \end{vmatrix} = \\
 &= \cos^2 \pi \sqrt{\lambda} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt + \cos \pi \sqrt{\lambda} \sin \pi \sqrt{\lambda} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt - \\
 &\quad - \cos \pi \sqrt{\lambda} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \sin \pi \sqrt{\lambda} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt + \\
 &\quad + \sin^2 \pi \sqrt{\lambda} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \sin \pi \sqrt{\lambda} \cos \pi \sqrt{\lambda} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt = \\
 &= \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \cos \pi \sqrt{\lambda} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \sin \pi \sqrt{\lambda} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt \\
 &= (1 - \cos \pi \sqrt{\lambda}) \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \sin \pi \sqrt{\lambda} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt; \\
 B = \frac{\Delta_2}{\Delta} &= \frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt
 \end{aligned}$$

Сонымен, іздеп отырған резольвентамыздың түрі мынадай.

$$\begin{aligned}
 y(x; \lambda) &= R_{\lambda} f(x) = (L - \lambda I)^{-1} f(x) = \\
 &= \left[\frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda} (\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{1}{2 \sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt + \int_0^x f(t) \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} dt \right] \cos \sqrt{\lambda} x + \\
 &\quad + \left[\frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt - \int_0^x f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt \right] \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\lambda} \quad (13)
 \end{aligned}$$

Енді осы (13) формуланы түрлендірейік сонан соң оны тексерейік.

$$\begin{aligned}
 y(x; \lambda) &= \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda} (\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{1}{2 \sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt, \\
 y(\pi, \lambda) &= \left[\frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda} (\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt + \frac{1}{2 \sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt \right] \cos \pi \sqrt{\lambda} + \\
 &\quad + \left[-\frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt \right] \times \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} = \\
 &= \frac{\cos \pi \sqrt{\lambda} \sin \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda} (\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} \times \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt + \frac{\cos \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt - \\
 &\quad - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\sin^2 \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda} (1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\cos \pi \sqrt{\lambda} \sin \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda} (\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}} \right) \int_0^\pi f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt + \\
&+ \left(\frac{\cos \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}} - \frac{1 - \cos^2 \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda} (1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \right) \int_0^\pi f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt = \\
&= \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}} \left(\frac{\cos \pi \sqrt{\lambda}}{\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1} - 1 \right) \int_0^\pi f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt + \\
&+ \left(\frac{\cos \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}} - \frac{1 + \cos \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}} \right) \int_0^\pi f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt = \\
&= \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda} (\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} \times \int_0^\pi f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{1}{2 \sqrt{\lambda}} \int_0^\pi f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt;
\end{aligned}$$

Демек $\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1 \neq 0$ теңсіздігін қанағаттандыратыны λ үшін, мына, теңдік орындалады.

Енді екінші шекаралық шартты тексерейік,

$$\begin{aligned}
y'(x, \lambda) &= \left[\frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda} (\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} \int_0^\pi f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{1}{2 \sqrt{\lambda}} \int_0^\pi f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt + \int_0^x f(t) \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} dt \right] (-\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x) \\
&+ \left[\frac{1}{2} \int_0^\pi f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \int_0^\pi f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt - \int_0^x f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt \right] \times \cos \sqrt{\lambda} x + \\
&+ f(x) \frac{\sin \sqrt{\lambda} x \times \cos \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}} - f(x) \frac{\cos \sqrt{\lambda} x \times \sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}; \\
y'(0, \lambda) &= \frac{1}{2} \int_0^\pi f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \int_0^\pi f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt; \\
y'(\pi; \lambda) &= \left[\frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} \int_0^\pi f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt + \frac{1}{2} \int_0^\pi f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt \right] (-\sin \sqrt{\lambda} \pi) + \\
&+ \left[-\frac{1}{2} \int_0^\pi f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \int_0^\pi f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt \right] \cos \sqrt{\lambda} \pi = \\
&= -\frac{\sin^2 \pi \sqrt{\lambda}}{2(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} \int_0^\pi f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2} \int_0^\pi f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt - \\
&- \frac{\cos \pi \sqrt{\lambda}}{2} \int_0^\pi f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda} \cos \pi \sqrt{\lambda}}{2(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \int_0^\pi f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt = \\
&= \left(\frac{\cos^2 \pi \sqrt{\lambda} - 1}{2(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} - \frac{\cos \pi \sqrt{\lambda}}{2} \right) \int_0^\pi f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2} \left(1 + \frac{\cos \pi \sqrt{\lambda}}{1 - \cos \pi \sqrt{\lambda}} \right) \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt = \\
 & = \left(\frac{\cos \pi \sqrt{\lambda} + 1}{2} - \frac{\cos \pi \sqrt{\lambda}}{2} \right) \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt = \\
 & = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt;
 \end{aligned}$$

Демек $\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1 \neq 0$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық λ үшін мына, $y'(0, \lambda) = y'(\pi, \lambda)$, теңдік орынды.

Енді резольвентаның формуласын ықшамдайық,

$$\begin{aligned}
 y(x; \lambda) &= R_{\lambda} f(x) = \left(\frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda} (\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2 \sqrt{\lambda}} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt + \int_0^x f(t) \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} dt \right) \cos \sqrt{\lambda} x + \\
 & \quad + \left[\frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt - \int_0^x f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt \right] \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{\sqrt{\lambda}}; \\
 \text{а) } \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left(\int_0^x f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt - \frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt \right) &= \\
 &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \left[\frac{1}{2} \int_0^x f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt - \frac{1}{2} \int_x^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt \right]; \\
 \text{б) } \frac{1}{2} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \int_0^x f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt &= \frac{1}{2} \int_x^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{1}{2} \int_0^x f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt, \\
 R_{\lambda} f(x) &= \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x}{2 \sqrt{\lambda} (\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} \int_0^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt + \frac{\cos \sqrt{\lambda} x}{2 \sqrt{\lambda}} \int_0^x f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt - \\
 & \quad - \frac{\cos \sqrt{\lambda} x}{2 \sqrt{\lambda}} \int_x^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} t dt}{2 \sqrt{\lambda} (1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \int_0^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt + \\
 & \quad + \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{2 \sqrt{\lambda}} \int_x^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{2 \sqrt{\lambda}} \int_0^x f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt = \\
 &= \int_0^x f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt \left(\frac{\sin \pi \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x}{2 \sqrt{\lambda} (\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} - \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{2 \sqrt{\lambda}} \right) + \\
 & \quad + \int_x^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt \times \left(\frac{\sin \pi \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} x}{2 \sqrt{\lambda} (\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} + \frac{\sin \sqrt{\lambda} x}{2 \sqrt{\lambda}} \right) + \\
 & \quad + \int_0^x f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt \left(\frac{\cos \sqrt{\lambda} x}{2 \sqrt{\lambda}} - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x}{2 \sqrt{\lambda} (1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \right) + \\
 & \quad + \int_x^{\pi} f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt \left(-\frac{\cos \sqrt{\lambda} x}{2 \sqrt{\lambda}} - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x}{2 \sqrt{\lambda} (1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \right) = \\
 &= \frac{\sin x \sqrt{\lambda} + \sin(\pi - x) \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda} (\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} \int_0^x f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt + \frac{\sin(\pi + x) \sqrt{\lambda} - \sin x \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda} (\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} \int_x^{\pi} f(t) \cos \sqrt{\lambda} t dt +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\cos x \sqrt{\lambda} - \cos(\pi - x) \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \int_0^x f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt - \frac{\cos x \sqrt{\lambda} - \cos(\pi + x) \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \int_x^\pi f(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt \\
& = \int_0^x \left[\frac{(\sin x \sqrt{\lambda} + \sin(\pi - x) \sqrt{\lambda}) \cos \sqrt{\lambda} t}{2 \sqrt{\lambda}(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} + \frac{(\cos x \sqrt{\lambda} - \cos(\pi - x) \sqrt{\lambda}) \sin \sqrt{\lambda} t}{2 \sqrt{\lambda}(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \right] f(t) dt + \\
& + \int_x^\pi \left[\frac{(\sin(\pi + x) \sqrt{\lambda} - \sin x \sqrt{\lambda}) \cos \sqrt{\lambda} t}{2 \sqrt{\lambda}(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} - \frac{(\cos x \sqrt{\lambda} - \cos(\pi + x) \sqrt{\lambda}) \sin \sqrt{\lambda} t}{2 \sqrt{\lambda}(1 - \cos \pi \sqrt{\lambda})} \right] f(t) dt = \\
& + \int_x^\pi \frac{\sin(\pi + x) \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} t - \cos(\pi + x) \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} t - \sin x \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} t + \cos x \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} t}{2 \sqrt{\lambda}(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} \\
& = \int_0^x \frac{\sin(x - t) \sqrt{\lambda} + \sin(\pi - x + t) \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(t) dt + \\
& + \int_x^\pi \frac{\sin(\pi + x - t) \sqrt{\lambda} - \sin(x - t) \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(t) dt.
\end{aligned}$$

Түрленген резольвента мынадай,

$$\begin{aligned}
y(x, \lambda) = R_\lambda f(x) &= \int_0^x \frac{\sin(x - t) \sqrt{\lambda} + \sin(\pi - x + t) \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(t) dt + \\
&+ \int_x^\pi \frac{\sin(\pi + x - t) \sqrt{\lambda} - \sin(x - t) \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(t) dt
\end{aligned}$$

түрге енді. Алынған нәтижегі тексеріп көрелік.

$$y(0, \lambda) = \int_0^\pi \frac{\sin(\pi - t) \sqrt{\lambda} + \sin t \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(t) dt, \quad (14)$$

$$y(\pi, \lambda) = \int_0^\pi \frac{\sin(\pi - t) \sqrt{\lambda} + \sin t \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(t) dt,$$

$$\begin{aligned}
y'(x, \lambda) &= \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} \times f(x) - \frac{\sin \pi \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(x) + \\
&+ \int_0^x \frac{\cos(x - t) \sqrt{\lambda} - \cos(\pi - x + t) \sqrt{\lambda}}{2(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(t) dt + \int_x^\pi \frac{\cos(\pi + x - t) \sqrt{\lambda} - \cos(x - t) \sqrt{\lambda}}{2(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(t) dt;
\end{aligned}$$

$$y'(0, \lambda) = \int_0^\pi \frac{\cos(\pi - t) \sqrt{\lambda} - \cos t \sqrt{\lambda}}{2(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(t) dt, \quad (15)$$

$$y'(\pi, \lambda) = \int_0^\pi \frac{\cos(\pi - t) \sqrt{\lambda} - \cos t \sqrt{\lambda}}{2(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(t) dt.$$

$$\begin{aligned}
y''(x, \lambda) &= \sqrt{\lambda} \int_0^x \frac{-\sin(x - t) \sqrt{\lambda} - \sin(\pi - x + t) \sqrt{\lambda}}{2(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(t) dt + \\
&+ \sqrt{\lambda} \int_x^\pi \frac{-\sin(\pi + x - t) \sqrt{\lambda} + \sin(x - t) \sqrt{\lambda}}{2(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(t) dt +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1 - \cos \pi \sqrt{\lambda}}{2(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(x) - \frac{\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1}{2(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(x) = \\
 & = -\lambda y(x, \lambda) - \frac{f(x)}{2} - \frac{f(x)}{2} = -\lambda y(x, \lambda) - f(x), \Rightarrow \\
 & -y''(x, \lambda) = \lambda y(x) + f(x).
 \end{aligned}$$

Бізге керегі-де осы еді.

Теорема 2. Егер

$$\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1 \neq 0$$

болса, онда мына,

$$\begin{aligned}
 Ly - \lambda y &= -y''(x) - \lambda y(x) = f(x), x \in (0, \pi) \\
 y(0) &= y(\pi), y'(0) = y'(\pi)
 \end{aligned}$$

Штурм-Лиувиллдің периодты шекаралық есебінің кезкелген $f(x) \in L^2(0, \pi)$ үшін тек бір ғана шешімі бар және ол мынау,

$$\begin{aligned}
 y(x, \lambda) &= R_\lambda f(x) = \\
 &= \int_0^x \frac{\sin(x-t) \sqrt{\lambda} + \sin(\pi-x+t) \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(t) dt + \int_x^\pi \frac{\sin(\pi+x-t) \sqrt{\lambda} - \sin(x-t) \sqrt{\lambda}}{2 \sqrt{\lambda}(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(t) dt.
 \end{aligned}$$

3.Зерттеу нәтижелері

Мына,

$$-y'' - \lambda y(x) = f(x), x \in (0, \pi) \quad (16)$$

$$y(0) = y(\pi), y'(0) = y'(\pi) \quad (17)$$

Шекаралық есептің шешімі $y(x, \lambda)$ белгілі бір $\lambda = \lambda_0$ нүктесінде белгілі болса, онда (16) формула бойынша теңдеудің бос мүшесін, яғни $f(x)$ функциясын табуға болады, ал егерде $y(x, \lambda_0)$ функциясы жуықтап ғана белгілі болса онда бұл есеп үшін үлкен мәселеге айналады.

Жоғарыдағы (16)-(17) есептің шешімі $y(x, \lambda)$ функциясы $(0, \pi)$ аралығындағы тербелісті өрнектейді. Толқындар сыртқы дүниемен тек $x = 0$ және $x = \pi$ нүктелерінде ғана шектеседі. Айталық осы нүктелерде өлшегіш құралдар орналасқан және олардың нәтижелері мыналар

$$y(0, \lambda) = y(\pi, \lambda), y'(0, \lambda) = y'(\pi, \lambda)$$

болсын делік, сонымен бірге, тербеліс жиіліктері яғни $\lambda_n (n = 1, 2, \dots)$ шамалары белгілі болса, онда сыртқы әсер етуші күшті, яғни $f(x)$ функциясын таба аламыз-ба?

Есептің шешімі. Жоғарыдағы (14) формула бойынша

$$y(0, \lambda) = \int_0^\pi \frac{\sin(\pi-t)\sqrt{\lambda} + \sin t\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\lambda}(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(t) dt,$$

мұнан

$$y(0, \lambda) \sqrt{\lambda} [\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1] = \int_0^\pi \frac{\sin \sqrt{\lambda}(\pi - t) + \sin \sqrt{\lambda} t}{2} f(t) dt$$

Меншікті $\{\lambda_n\}, n = 0, 1, 2, \dots$ мәндер арқылы $\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1$ функциясы бірімәнді аныкталады. Олай болса

$$y(0, \lambda) \sqrt{\lambda} [\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1] = (P \sin \sqrt{\lambda} t, f(t)) = (\sin \sqrt{\lambda} t, P f(t)),$$

где $Pu(x) = \frac{u(\pi-x)+u(x)}{2}$, яғни P операторы $L^2(0, \pi)$ кеңістігіндегі проектор. Сонымен

$\int_0^\pi Pf(t) \sin \sqrt{\lambda} t dt = y(0, \lambda) \sqrt{\lambda} [\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1]$, мұнан синус түрлендірунің бірімәнділігі теоремасы бойынша $Pf(t)$ функциясын анықтаймыз

Енді (15) формула бойынша

$$y'(0, \lambda) = \int_0^\pi \frac{\cos(\pi - t) \sqrt{\lambda} - \cos t \sqrt{\lambda}}{2(\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1)} f(t) dt,$$

мұнан

$$y'(0, \lambda) \times [\cos \pi \sqrt{\lambda} - 1] = \int_0^\pi \frac{\cos(\pi - t) \sqrt{\lambda} - \cos t \sqrt{\lambda}}{2} f(t) dt,$$

$$\begin{aligned} y'(0, \lambda) [1 - \cos \pi \sqrt{\lambda}] &= \int_0^\pi \frac{\cos t \sqrt{\lambda} - \cos(\pi - t) \sqrt{\lambda}}{2} f(t) dt = \\ &= (Q \cos t \sqrt{\lambda}, f(t)) = (\cos t \sqrt{\lambda}, Qf(t)) \end{aligned}$$

мұндағы $Qu(x) = \frac{u(x) - u(\pi - x)}{2}$, яғни $Q = I - P$ операторы $L^2(0, \pi)$ кеңістігіндегі проектор. Сонымен,

$$\int_0^\pi Qf(x) \cos t \sqrt{\lambda} dt = y'(0, \lambda) [1 - \cos \pi \sqrt{\lambda}],$$

мұнан косинус түрлендірудің бірімәнділігі туралы теорема бойынша $Qf(x)$ функциясын бір мәнді етіп табамыз. Нәтижесінде $Qf(t)$ және $Pf(t)$ функциялары бірімәнді табылады. Олай болса,

$$Pf(t) + Qf(x) = \frac{f(t) + f(\pi - t)}{2} + \frac{f(t) - f(\pi - t)}{2} = f(t)$$

функциясы-да бір мәнді табылады.

Теорема 3. Егер Штурм-Лиувиллдің периоды есебінің меншікті мәндері $\{\lambda_n\}, n = 0, 1, 2, \dots$ және оның шешімінің шекаралық мәндері

$$y(0, \lambda), y'(0, \lambda)$$

белгілі болса, онда әсер етуші сыртқы $f(t)$ күшті бірімәнді етіп табуға болады

4.Талқысы

Мұндай, кері есептер әдебиетте сирек кездеседі,оның бір себебі,шекарылық шарттардың тым қатал болуынды болса керек,бұл сәтте шекара арқылы системаға ешбір әсер өтпейді,яғни сыртқы дүние мен ішкі дүние байланыссыз,сондықтан сыртқы әсерді шамалай алмаймыз.

5.Қорытынды

Периодты қозғалыстар табиғатта жиі кездеседі, мысалы, аспан денелерінің қозғалысы, айдың жерді айналуы, немесе жердің күнді айналуы, күннің темірқазық жұлдызын айналуы, сағат тілінің айналуы. Сол себепті болар математикалық және физикалық әдебиетте бұл тақырыпта арналған зерттеулер көптеп кездеседі. Көп жағдайда біз қозғалысты сырттан ғана бақылай аламыз, себебі қозғалушы нәрсе бізден тым алыс немесе тым майда, мысалы электронның ядроны айналып қозғалуы, немесе периодты түрде қайталанатын физикалық немесе химиялық процесс болуы мүмкін. Бұл сәтте қозғалушы күш көзге көрінбейді тек оның нәтижесі ғана көрінеді, яғни бақылау нәтижелері. Арнайы құралдар арқылы біз қозғалыстың траекториясы мен жылдамдықтарын анықтай аламыз. Өлшеуге болатын физикалық шамаларды физиктер бақыланатын шамалар деп атайды. Бірақ бұл шамалардың абсолютті дәл емес екеніне назар аударайық. Немістің көрнекті физигі В.Гейзенбергтің принципі бойынша мына, $\Delta(x) \times \Delta(v) \geq \square$, тенсіздік орындалады, мұндағы $\Delta(x)$ - координатаның ауытқуы, ал $\Delta(\square)$ - жылдамдықтың ауытқуы h - Планктың тұрақтысы. Біздің зерттеулеріміздің көрсетуінше бақыланатын шамалар арқылы әсер етуші сыртқы күштерді анықтауға болады. Кейбір сәттерде сыртқы әсер етуші күштерді байқау мүмкін емес, мысалы атомның ядросы. Біз оның электрондарға әсерін ғана байқай аламыз.

ӘДЕБИЕТ

- [1] Левитан Б.М. Обратные задачи Штурма-Лиувилля.-М.:Наука, 1984.-С.240.
- [2] Шалданбаев А.Ш. Формулы следов для периодической и антипериодической задач Штурма-Лиувилля.// Вестник МГУ. Сер-1.-1982.-№3.-с.6-11.
- [3] Новиков С.П. Периодическая задача для уравнения Кортевега де Фриза // I. Функц. Анализ 8, вып.3(1974). 54-66.
- [4] Дубровин Б.А. Обратная задача теории рассеяния для периодической конечнозонных потенциалов.// Функц. Анализ 9. вып.1(1975), 65-66.
- [5] Итс А.Р., Матвеев В.Б. Об операторах Хилла с конечным числом лагун//Функц. Анализ 9. вып.1.(1975).69-70.
- [6] Марченко В.А. Периодическая задача Кортевега-де Фриза. // ДАН СССР 217, №2(1974), 276-279.
- [7] Дубровин Б.А., Новиков С.П. Периодическая задача для уравнения Кортевега-де Фриза и Штурма-Лиувилля их связь с алгебраической геометрией//ДАН СССР 219, №3(1974), 19-22.
- [8] Дубровин Б.А., Новиков С.П. Периодический и условно-периодический аналоги многосолитонных решений уравнения Кдф, ЖЭТР 12(1974), 2131-2144.
- [9] Дубровин Б.А. Периодическая задача для уравнения Корневега-де Фриза в классе конечнозонных потенциалов // Функц. Анализ 9. вып.1(1975), 41-51.
- [10] Итс А.Р., Матвеев В.Б. Операторы с конечнозонным спектром и N- солитонные решения уравнения Кортевега-де Фриза//ТМФ.т.23, №1(1975), 51-68.
- [11] Левитан Б.М. Операторы Штурма-Лиувилля и Дирака.-М.:Наука, 1988.-431с.
- [12] Левитан Б.М., Саргсян И.С. Введение в спектральную теорию.-М.:Наука, 1970.-670с
- [13] Кальменов Т.Ш., Шалданбаев А.Ш. The spectrum structure of Shtourm-Liouville boundary problem on the bounded segment. - International Conference "Differential Equations and Related Topics" dedicated to the Centenary Anniversary of Ivan G.Petrovskii.-Moscow, May 22-27, 2001.-с. 371.
- [14] Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. О полноте собственных векторов задачи Коши. - Республиканский научный журнал «Наука и образования ЮК» № 27, 2002. с. 58-62.
- [15] Шалданбаев А.Ш., Ахметова С.Т. О полноте собственных векторов периодической и антипериодической задачи. - Республиканский научный журнал «Наука и образование ЮК» №34, 2003г, - с. 25-30.
- [16] Levitan B. M. Inverse Sturm-Liouville Problem. VSP, Utrecht, 1987.
- [17] Lorenzi A. and Kabanikhin S. I. Identification Problems of Wave Phenomena. VSP, Utrecht, 1999.
- [18] Natterer F. The Mathematics of Computerized Tomography. New York, Wiley & Sons, 1986.
- [19] Romanov V.G. Inverse Problems of Mathematical Physics. VSP, Utrecht, 1987.
- [20] Tikhonov A.N. On the stability of inverse problems. Doklady Acad. Sci. USSR 39 (1943), 176-179.
- [21] Tikhonov A.N. On the solution of ill-posed problems and the method of regularization. Dokl. Akad. Nauk SSSR 151, 3 (1963), 501-504 (in Russian).
- [22] Tikhonov A.N. On the regularization of ill-posed problems. Dokl. Akad. Nauk SSSR 153, 1 (1963), 49-52 (in Russian).
- [23] Tikhonov A.N. and Arsenin V. Ya. Solutions of Ill-Posed Problems. Wiley, New York, 1977.
- [24] Tikhonov A.N., Goncharskii A.V., Stepanov V.V. and Yagola A. G. Regularizing Algorithms and A Priori Information. Nauka, Moscow, 1983 (in Russian).

REFERENCES

- [1] Levitan B. M. Return problems of Storm Liouville. - M of a.:nauk, **1984**. - Page 240.
- [2] Shaldanbayev A.Sh. Formulas of traces for periodic and anti-periodic problems of Shturma-Liuvillya.//the Bulletin of MSU. Ser-1. -**1982**. -№3. - page 6-11.
- [3] Novikov S.P. the Periodic task for Cortevega de Friza's equation//I. Funkts. Analysis 8, issue 3(1974).54-66.
- [4] Dubrovin B. A. the Return task of the theory of dispersion for periodic the konechnozonnykh потенциалов.//Funkts. Analysis 9. vyp.1 (**1975**), 65-66.
- [5] Its A.R., Matveev V. B. About Hill's operators with final number of lacunas//Funkts. Analysis 9. vyp.1. (**1975**).
- [6] Marchenko V. A. Periodic problem of Kortevega of the Frieze.//The USSR 217, No. 2 (**1974**), 276-279 is GIVEN.
- [7] Dubrovin B. A. Novikov S.P. the Periodic task for the equation of Kortevega of the Frieze and Storm Liouville their communication with algebraic geometry//the USSR 219, No. 3(**1974**), 19-22 is GIVEN.
- [8] Dubrovin B. A., Noviko S. P., Periodic and conditional and periodic analogs of multisoliton solutions of the equation Kdf, ZhETR 12 (**1974**), 2131-2144.
- [9] Dubrovin B. A., the Periodic task for the equation of Kornevega of the Frieze in a class the konechnozonnykh of potentials//Funkts. Analysis 9. vyp.1 (**1975**), 41-51.
- [10] Its A.R., Matveev V. B. Operators with a konechnozonny range and N-soliton solutions of the equation of Kortevega of the Frieze//Tmf.T.23, No. 1(**1975**), 51-68.
- [11] Levitan B. M. Operators of Storm Liouville and Dirac. - M of a.:nauk, **1988**. - 431 pages.
- [12] Levitan B. M., Sargsyan I. S. Introduction to the spectral theory. - M of a.:nauk, **1970**. - 670s
- [13] Kalmenovt Sh., Shaldanbayeva.Sh. The spectrum structure of Shtourm-Liouville boundary problem on the bounded segment. - INTERNATIONAL CONFERENCE "Differential Equations and Related Topics" dedicated to the Centenary Anniversary of Ivan G.Petrovskii. - Moscow, May 22-27, **2001**. - с. 371.
- [14] Shaldanbayev A. Sh., Akhmetova S. T. About completeness of own vectors of a task of Cauchy. - Republican scientific magazine "Science and Formations of YuK" No. 27, **2002**. page 58-62.

- [15] Shaldanbayev A. Sh., Akhmetova S. T. About completeness of own vectors of a periodic and anti-periodic task. - The republican scientific magazine "YuK Science and Education" No. 34, **2003** of, - page 25-30.
- [16] *Levitan B. M.* Inverse Sturm–Liouville Problem. VSP, Utrecht, **1987**.
- [17] Lorenzi and S. I. Kabanikhin, Identification Problems of Wave Phenomena. VSP, Utrecht, **1999**.
- [18] F. Natterer, The Mathematics of Computerized Tomography. New York, Wiley & Sons, **1986**.
- [19] V. G. Romanov, Inverse Problems of Mathematical Physics. VSP, Utrecht, **1987**.
- [20] N. Tikhonov, On the stability of inverse problems. Doklady Acad. Sci. USSR 39 (**1943**), 176–179.
- [21] A. N. Tikhonov, On the solution of ill-posed problems and the method of regularization. Dokl. Akad. Nauk SSSR 151, 3 (**1963**), 501–504 (in Russian).
- [22] Tikhonov A. N. On the regularization of ill-posed problems. Dokl. Akad. Nauk SSSR 153, 1 (**1963**), 49–52 (in Russian).
- [23] A. N. Tikhonov and V. Ya. Arsenin, Solutions of Ill-Posed Problems. Wiley, New York, **1977**.
- [24] A. N. Tikhonov, A. V. Goncharskii, V. V. Stepanov, and A. G. Yagola, Regularizing Algorithms and A Priori Information. Nauka, Moscow, **1983** (in Russian)

УДК 517.9

М.Б. Сапрыгина¹, М.И. Акылбаев,² А.Ш. Шалданбаев³

¹Южно-Казахстанская государственная фармацевтическая академия, г.Шымкент;

²Казахстанский инженерно-педагогический университет Дружбы народов, г.Шымкент;

³Южно-Казахстанский государственный университет, г.Шымкент

ОБРАТНАЯ ПЕРИОДИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ОПЕРАТОРА ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ

Аннотация. Оператор Штурма-Лиувилля с периодическими граничными условиями обладает внутренней симметрией, проявлением этой симметрии является наличие кратного спектра этого оператора, что служило препятствием постановки обратной задачи. Кратный спектр порождает не тривиальных инвариантных подпространств. В настоящей работе показано, что проекторов этих инвариантных подпространств можно использовать для восстановления правой части уравнения, т.е. доказана теорема единственности.

Ключевые слова: оператор Штурма-Лиувилля, полнота, базисность, собственные векторы, функция Грина, ряды Фурье, спектр, собственные значения, обратная задача, правая часть.