OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 4, Number 314 (2017), 215 – 222

UDC 517.94

M.I. Akylbaev[1], G.A. Besbayev[2], A.Sh. Shaldanbaev[2]

SOLUTION OF A SINGULARLY PERTURBED CAUCHY PROBLEM, FOR AN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION OF THE FIRST ORDER WITH A VARIABLE COEFFICIENT, BY THE METHOD OF A DEVIATING ARGUMENT

[1]Kazakhstan Engineering and Pedagogical University of Friendship of Peoples, Shymkent
[2]South Kazakhstan State University, Shymkent
shaldanbaev51@mail.ru

Abstract. In this paper, we obtain a spectral decomposition of the solution of the Cauchy problem in a space with an indefinite metric, and by means of this decomposition a boundary layer expansion of the solution of a singularly perturbed Cauchy problem is derived for a model equation of the first order $\varepsilon y' + a(x)y(x) = f(x), y(0) = 0, a(x) > 0, f(x) \in W_2^n[0,1], a(x)\epsilon C^n[0,1]$.

Keywords: completeness, self-adjoint operator, completely continuous operator, Gilbert-Schmidt's theorem, Volterian operators, indefinite metric, Schmidt decomposition, orthonormal basis.

УДК 517.94

М.И. Ақылбаев[1], Г.А. Бесбаев[2], А.Ш. Шалданбаев[2]

[1]Қазақстанның инженерлі-педагогикалық халықтар достығы университеті, Шымкент қ-сы
[2]Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент қ-сы

КОЭФФИЦИЕНТІ АЙНЫМАЛЫ, БІРІНШІ РЕТТІ КӘДІМГІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУДІҢ СИНГУЛЯР ӘСЕРЛЕНГЕН КОШИ ЕСЕБІН СПЕКТРӘЛДІ ТАРАЛЫМ ӘДІСІ АРҚЫЛЫ ШЕШУ

1. Есептің қойылымы.

Мына, $L^2(0,1)$ кеңістігінде Кошидің, мынадай,

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y'(x) + a(x)y(x) = f(x), x \in [0,1]; \quad (1)$$

$$y(0) = 0 \ (2)$$

сингуляр әсерленген есебін қарастыралық, мұндағы $f(x) \in L^2(0,1), a(x)$ −үзіксіз нақты функция, ал $\varepsilon > 0$ азшамалы оң параметр. Осы есептің шешімі, $\varepsilon \to 0$ сәтінде, қалай өзгереді деген сұрақ бізді мазалайды.

Бұл есепті шешудің көптеген әдістері бар [1-9],өкінішке орай,бұл әдістердің көпшілігі жартылай эмпиристік әдістер қатарына жатады,себебі, есептің қалдық мүшесі, оның коэффициенттері арқылы бағаланбаған.Біз бұл есепті спектрәлдік әдіспен [10-17] шешіп, әлгі олқылықты толтырмақпыз.

2. Алғы шарттар

Жоғарыдағы, (1) теңдеудің оң жағындағы бос мүшесі, жалпы алғанда, біртегіс болмағандықтан біз дифференциалдық теңдеулер теориясын қолдана алмаймыз, сондықтан, теңдеудің шешімінің бар жоғы беймәлім. Осы жағдай,есепке операторлар тұрғысынан қарауға мәжбүрлейді, әлді (күшті) шешім ұғымы осылай пайда болады.

Мына, $D(L_\varepsilon)$ −арқылы $(0, 1]$ аралығында үздіксіз дифференциалданатын, ал $[0,1]$ сегментінде үзіксіз және қосымша $y(0) = 0$ шартын қанағаттандыратын функциялардың сызықтық көпсаласын белгілейік.

$$D(L_\varepsilon) = \{y(x) \in C^1(0, 1] \cap [0,1]: y(0) = 0\}$$

Анықтама 1. Егер $y(x) \in D(L_\varepsilon)$ және ол (1) теңдеудің шешімі болса, онда оны (1)-(2) есебінің тұрлаулы (регулярное) шешімі дейік.

Енді $f(x) \in L^2(0,1)$ болсын делік, мұндай функциялар [0,1] кесіндісінің барлық нүктелерінде, дерлік, анықталған, яғни оның сыр-сыйпаты нөл мөлшерлі жыйында беймәлім, сондықтан мұндай функциялар үшін алдыңғы анықтаманың жарамсыздығы айдан анық.

Анықтама 2. Егер, мынадай, $\{y_k(x)\} \in D(L_\varepsilon), k = 1,2, \ldots$ тізбек табылып, ол $L^2(0,1)$ кеңістігінде, мына, $y_k(x) \to y(x), Ly_k \to f(x)$ шарттарды қанағаттандырса, онда $y(x) \in L^2(0,1)$ функциясын (1)-(2) есебінің әлді (күшті) шешімі дейік. Егер кезкелген $f(x) \in L^2(0,1)$ үшін осындай әлді шешім бар болса, онда (1)-(2) есепті әлді шешіледі дейміз.

Біз енді (1)-(2) есептің әлді шешілетінін көрсетейік

Лемма 1. Егер $a(x) \in C[0,1]$ және, мына,

$$a(x) \geq \alpha > 0, \forall x \in [0,1] \tag{3}$$

теңсіздік орындалса, онда кезкелген $u(x) \in D(L_\varepsilon)$ −функциясы үшін, мынадай,

$$\|L_\varepsilon u\| \geq \alpha \times \|u\|, \|L_\varepsilon u\| \alpha \times \|u'\|$$

алдын-ала бағалаулар орынды.

Дәлелі. Жоғарыдағы (1) теңдеудің екі жағын-да $y(x)$ −қа скаляр көбейтсек, онда, мынадай,

$$(L_\varepsilon y, y) = \varepsilon(y', y) + (ay, y) = (f, y)$$

теңдік аламыз, мұнан

$$\varepsilon(y', y) = \epsilon \times \int_0^1 y' y dx = \varepsilon \int_0^1 y dy = \frac{\varepsilon y^2(1)}{2} /_0^1 = \frac{\varepsilon \times y^2(1)}{2} \geq 0;$$

$$(ay, y) \leq (f, y) \leq \|f\| \times \|y\|$$

Енді , $a(x) \geq \alpha > 0$, екенін ескерсек, онда, мынадай,

$$\alpha \times \|y\|^2 \leq (ay, y) \leq \|f\| \times \|y\|, \to \alpha\|y\| \leq \|f\| = \|L_\varepsilon y\|$$

теңсіздіктер аламыз, бізге керегі-де осы еді.

Лемма 2. Егер $a(x)$ −үзіксіз функциясы кезкелген $x \in [0,1]$ үшін , мына

$$a(x) \geq \alpha > 0, \forall x \in [0,1] \tag{3}$$

теңсіздікті қанағаттандырса, онда жоғарыдағы Кошидің (1)-(2) есебі әлді шешіледі.

Дәлелі. Егер $f(x)$ − функциясы [0,1] кесіндісінде үзіксіз болса, онда, мына,

$$y(x, \varepsilon, f) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \frac{e(x)}{e(t)} f(t) dt \tag{4}$$

функция Коши есебінің шешімі болады, мұндағы $e(x)$ −дегеніміз сәйкес біртекті теңдеудің фундамен тәлді шешімі, яғни

$$\varepsilon \times e'(x) + a(x)e(x) = 0, e(0) = 1$$

Шынында-да,

$$y'(x, \varepsilon, f) = \frac{f(x)}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \frac{e(x)}{e(t)} f(t) dt\, , \varepsilon y'(x, \varepsilon, f) = f(x) + \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \frac{\varepsilon e'(x)}{e(t)} f(t) dt$$

$$= f(x) - \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \frac{a(x)e(x)}{e(t)} f(t) dt = f(x) - a(x) \times \frac{1}{\varepsilon} \int_0^x \frac{e(x)}{e(t)} f(t) dt =$$

$$= f(x) - a(x)\, y(x, \varepsilon, f), \to \varepsilon y'(x, \varepsilon, f) + a(x) y(x, \varepsilon, f) = f(x).$$

Егер (4) формулада $x = 0$ болсын делік, онда $y(x, \varepsilon, f)/_{x=0} = 0$ болады.

Мына,

$$\varepsilon z' + a(x) z = 0, z(0) = 0$$

есептің елеулі шешімі жоқ, сондықтан табылған (4) шешімі бірегей.

Соныменен, L_ε оператора $D(L_\varepsilon)$ −жыйынын $R(L_\varepsilon) = C[0,1]$ жыйынына өзара бірмәнді етіп аударады, яғни $D(L_\varepsilon)$ −жыйынының әрбір элементіне $R(L_\varepsilon) = C[0,1]$ жыйынының тек бір ғана элементіне сәйкес келеді және керісінше-де солай, демек кері L_ε^{-1} операторы бар, ал, былай, $L_\varepsilon^{-1}: R(L_\varepsilon) \to D(L_\varepsilon)$ анықталған.

Әлгі L_ε^{-1} операторының $L^2(0,1)$ кеңістігінде шектеулі екенін көрсетейік, айтпақшы,

$$e(x) = e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(t)dt}$$

екенін байқау онша қыйын шаруа емес, мұнан,

$$\left|\frac{e(x)}{e(t)}\right| = e^{-\int_t^x a(t)dt} \le 1.$$

Кері L_ε^{-1} операторымыздың түрі, мынадай,

$$y(x,\varepsilon,f) = L_\varepsilon^{-1}f(x) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \frac{e(x)}{e(t)}f(t)dt = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 \theta(x-t)\frac{e(x)}{e(t)}f(t)dt,$$

мұндағы $\theta(x)$ −Хевисайдтың функциясы, яғни

$$\theta(x) = \begin{cases} 1, \textit{егер } x \ge 0, \\ 0, \textit{егер } x < 0; \end{cases}$$

сондықтан,

$$|L_\varepsilon^{-1}f| \le \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 \frac{e(x)}{e(t)}|f(t)|dt \le \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_0^1 \left|\frac{e(x)}{e(t)}\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \|f\| \le \frac{1}{\varepsilon}\|f\|, \rightarrow$$

$$\|L_\varepsilon^{-1}f\|^2 \le \frac{\|f\|^2}{\varepsilon^2}, \|L_\varepsilon^{-1}f\| \le \frac{\|f\|}{\varepsilon}, \|L_\varepsilon^{-1}\| \le \frac{1}{\varepsilon}.$$

Үзіксіз функциялардың сызықтық көпсаласы $L^2(0,1)$кеңістігінде тығыз, сондықтан сызықтық операторларды кең жыйынға тарату теоремасы бойынша L_ε^{-1} операторын бүткіл $L^2(0,1)$ кеңістігіне шектеулі оператор етіп таратуға болады. Бұл сәтте, алынған $\overline{L_\varepsilon^{-1}}$ операторы $L^2(0,1)$ кеңістігінде анықталған. Енді, мына, [1,] лемманы пайдаланайық.

Лемма 3. Егер сызықтық A операторы тығыз анықталса, қабынатын әрі қайтымды болса, онда оған кері A^{-1} операторы да қабынады және, мына, $\overline{A^{-1}} = (\bar{A})^{-1}$ теңдік орындалады.

Біздің жағдайда L_ε операторының сыңарласы $L_\varepsilon^+ z = -\varepsilon z'(x) + a(x)z(x), D(L_\varepsilon^+) = \{z(x) \in C^1(0,1) \cap C[0,1]: z(1) = 0\}$ операторы $L^2(0,1)$ кеңістігінде тығыз $C_0^\infty(0,1)$ сызықтық көпсаласында анықталған. Енді $L_\varepsilon^+ C L_\varepsilon^*$ қатыстығын ескерсек, онда сыңар L_ε^* операторы да $L^2(0,1)$ −кеңістігінде тығыз анықталған, демек L_εқабынатын оператор. Жоғарыда айтылған себеп бойынша L_ε операторы да тығыз анықталған , сол себепті, мына, $(\bar{L}_\varepsilon)^{-1} = \overline{L_\varepsilon^{-1}}$ формуласы орынды, яғни L_ε операторының қабындысы шектеулі қайдымды. Демек жоғарыдағы (1)-(2) есеп әлді шешіледі.

Шынында-да, егер $f(x)$ функциясы $L^2(0,1)$ кеңістігінің кезкелген элементі болса, онда үзіксіз $\{f_n(x)\}, n = 1,2,...$ функциялардың тізбегі табылып, $f_n(x) \to f(x)$ шарты $L^2(0,1)$ кеңістігінде орындалады. Бұл функцияларға, мынадай,

$$y_n(x,\varepsilon,f) = \frac{1}{2}\int_0^x \frac{e(x)}{e(t)} f_n(t)dt \tag{5}$$

функциялар сәйкес келеді, және олар, мынадай,

$$L_\varepsilon y_n = f_n(x), n = 1,2, ...$$

Коши есептерінің тұрлаулы шешімдері болады. Алдын-ала алынған бағалаулар бойынша

$$\|y_n - y_m\| \le \frac{1}{\alpha}\|L_\varepsilon y_n - L_\varepsilon y_m\| \le \frac{\|f_n - f_m\|}{\alpha},$$

яғни $\{y_n\}$ −тізбегі $L^2(0,1)$кеңістігінде фундаментәлді, сондықтан, $y(x) \in L^2(0,1)$функциясы табылсын $L_\varepsilon y_n \to f, y_n \to y$шарттары орындалады. Бұнан басқаша тұрғыдан қарасақ, онда, мұнымыз, $y(x) \in D(\bar{L}_\varepsilon)$ және $\bar{L}_\varepsilon y = f(x)$ дегенді білдіреді, ал $\bar{L}_\varepsilon$ операторының қайтымды екенін ескерсек, онда басқа шешім жоқ. Сонымен 2. толық дәлелденді.

Салдар 1. Мына,

$$\overline{L_\varepsilon^{-1}}f(x) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x \frac{e(x)}{e(t)} f(t)dt \tag{6}$$

формула, кезкелген $\left(\forall f(x) \in L^2(0,1)\right)$ $f(x) \in L^2(0,1)$ үшін орынды.

Дәлелі. Жоғарыдағы (5) формулада $n \to \infty$ деп шекке көшсек (6) формуланы аламыз, себебі бұл сәтте интеграл асты шекке көшу туралы Лебегтің **теоремасының барлық шарттары орындалып тұр.**

Лемма 4. Егер

1) $a(1-x) = a(x)$:

2) $Su(x) = u(1-x), \forall x \in [0,1]$

болса, онда SL_ε операторы симметриялы.

Дәлелі. Ә дегенде, $u(x), v(x) \in D(L_\varepsilon)$ болсын делік, онда

$$(SL_\varepsilon u, v) = \int_0^1 L_\varepsilon u \times Sv\,dx = \int_0^1 \left[\varepsilon u'(x) + a(x)\right] v(1-x)dx =$$

$$= \varepsilon \int_0^1 v(1-x)du + \int_0^1 a(x)u(x)v(1-x)dx =$$

$$= \varepsilon v(1-x)u(x)/_0^1 + \varepsilon \times \int_0^1 u(x)v'(1-x)dx + \int_0^1 u(x)a(x)v(1-x)dx =$$

$$= |a(x) = a(1-x)| = \varepsilon\left(u, S\frac{d}{dx}v\right) + (u, Sav) =$$

$$= \left(u, \varepsilon\, S\frac{d}{dx}v + Sav\right) = (u, SL_\varepsilon v).$$

Салдар 2. $(SL_\varepsilon)^{-1}$ операторы симмеириялы.

Дәлелі. Әу дегенде, $u = (SL_\varepsilon)^{-1}f, v = (SL_\varepsilon)^{-1}g$ болсын, делік, сонда

$$((SL_\varepsilon)^{-1}f, g) = (u, SL_\varepsilon v) = (SL_\varepsilon u, v) = (f, (SL_\varepsilon)^{-1}g).$$

Салдар 3.$\overline{(SL_\varepsilon)^{-1}}$ операторы $L^2(0,1)$ кеңістігінде жалқы оператор.

Дәлелі. Кезкелген $f_n, g_n \in D(SL_\varepsilon)^{-1}$ үшін, мына, $((SL_\varepsilon)^{-1}f_n, g_n) = (f_n(SL_\varepsilon)^{-1}g_n)$теңдік орындалады. Егер $f(x)$ және $g(x) \in D\overline{(SL_\varepsilon)}$ болса, онда $\{f_n\} \in D(SL_\varepsilon)^{-1}$ және $\{g_n\} \in D(SL_\varepsilon)^{-1}$ тізбектері табылып, $f_n \to f, (SL_\varepsilon)^{-1}f_n \to \overline{(SL_\varepsilon)^{-1}}f, g_n \to g, (SL_\varepsilon)^{-1}g_n \to \overline{(SL_\varepsilon)^{-1}}g$ шарттары орындалады. Жоғарыдағы формулада $n \to \infty$ деп шекке көшсек $((SL_\varepsilon)^{-1}f, g) = \left(f, \overline{(SL_\varepsilon)^{-1}}g\right)$ деген теңдік аламыз, яғни $\overline{(SL_\varepsilon)^{-1}}$ операторы симметриясы. Демек, мына,

$$\overline{(SL_\varepsilon)^{-1}} \sqsubset \left[\overline{(SL_\varepsilon)^{-1}}\right]^*$$

қатыстық орынды, енді $D\overline{(SL_\varepsilon)^{-1}} = L^2(0,1)$екенін ескерсек, онда $D\overline{(SL_\varepsilon)^{-1}} = D\left[\overline{(SL_\varepsilon)^{-1}}\right]^*$, керегі-де осы еді.

Салдар 4. Мына $\overline{(SL_\varepsilon)^{-1}}$ операторы $L^2(0,1)$ кеңістігінде әсіре үзіксіз.

Дәлелі.

$$\overline{(SL_\varepsilon)^{-1}} = \overline{L_\varepsilon^{-1}S^{-1}} = \overline{L_\varepsilon^{-1}S} = \overline{L_\varepsilon^{-1}} \times S.$$

$\overline{L_\varepsilon^{-1}}$ –операторының ядросы

$$K(a,t) = \frac{\theta(x-t)e(x)}{\varepsilon \times e(t)} = \frac{\theta(x-t)e^{-\int_t^x a(\xi)d\xi}}{\varepsilon}$$

функциясы мына $\Omega = [0,1] \times [0,1]$жыйынды шектеулі, сондықтан $\overline{L_\varepsilon^{-1}}$ –операторын Гилбетр пен Шмидтікі, демек $\overline{L_\varepsilon^{-1}}$ операторы $L^2(0,1)$кеңістігінде әсіре үзіксіз. Әсіре үзіксіз оператормен шектеулі оператордың көбейтіндісі әсіре үзіксіз, сондықтан $\overline{L_\varepsilon^{-1}S}$ –операторы әсіре үзіксіз, соныммен $\overline{(SL_\varepsilon)^{-1}}$ операторының әсіре үзіксіздігі дәлелденді.

Теорема 1. Мына, $\overline{(SL_\varepsilon)^{-1}}$операторы $L^2(0,1)$ кеңістігінде әсіре үзіксіз және жалқы.

Теорема 2. Егер $a(x)$ –үзіксіз нақты функция болса, және ол, мына,

1) $a(x) \geq \alpha > 0, \forall x \in [0,1]$;

2) $a(x) = a(1-x), \forall x \in [0,1]$

шарттарға сай болса, онда

(а) Кошидің (1)-(2) есебі әлді шешіледі;

(б) Кошидің (1)-(2) есебінің кезкелген әлді шешімі, мына,

$$y(x, \varepsilon, f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(Sf, \varphi_n)}{\lambda_n} \varphi_n(x)$$

формула арқылы анықталады, мұндағы $\{\varphi_n(x)\}$ –дегеніміз $\overline{(SL_\varepsilon)^{-1}}$ **операторының меншікті векторларынан** құралған ортанормаланған базис.

Дәлелі.

Гилберт пен Шмидтің теоремасы бойынша

$$\overline{(SL_\varepsilon)^{-1}}f = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\overline{(SL_\varepsilon)^{-1}}f, \varphi_n\right) \times \varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(f, \overline{(SL_\varepsilon)^{-1}}\varphi_n\right)\varphi_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(f, \varphi_n)}{\lambda_n}\varphi_n,$$

мұндағы λ_n^{-1} –дегеніміз $\overline{(SL_\varepsilon)^{-1}}$ операторының меншікті мәндері, ал φ_n –соларға сәйкес меншікті векторлар. Осы теңдіктің екі жағын-да $\overline{(SL_\varepsilon)^{-1}}$ операторымен әсер етсек, онда, мынадай,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(f, \varphi_n) \times \varphi_n(x)$$

Формула аламыз, яғни $\overline{(SL_\varepsilon)^{-1}}$ операторының ортанормаланған векторлары $L^2(0,1)$кеңістігінде ортанормаланған базис құрайды.

Біз енді өзіміздің Коши есебіне оралайық, оның операторлық түрі, мынадай,

$$\overline{L}_\varepsilon y = f$$

болады. Осы теңдіктің екі жағына-да S операторымен әсер етсек, онда

$S\overline{L}_\varepsilon y = S$ немесе $\overline{SL}_\varepsilon y = Sf,$

демек,

$$y(x, \varepsilon, f) = \overline{(SL_\varepsilon)^{-1}}Sf = \overline{(SL_\varepsilon)^{-1}}Sf = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(Sf, \varphi_n)}{\lambda_n} \times \varphi_n.$$

Лемма 5. Егер $\varphi_n(x)$ –дегеніміз $\overline{(SL_\varepsilon)^{-1}}$ операторының меншікті векторлары, ал λ_n^{-1} меншікті мәндері болса, онда, мына,

$$(e, \varphi_n) = \varepsilon - \frac{\varphi_n(1)}{\lambda_n}, n = 1,2, \ldots$$

формула орынды, мұндағы $e(x)$ –дегеніміз сәйкес босмүшесіз теңдеудің шешімі

Дәлелі.

$$(Sae, \varphi_n) = \left(Sae, \frac{\lambda_n S\varphi_n - \varepsilon\varphi_n'}{a}\right) = \left(Se, \lambda_n S\varphi_n - \varepsilon\varphi_n'\right) =$$
$$= (Se, \lambda_n S\varphi_n) - \varepsilon\left(Se, \varphi_n'\right);$$
$$(Se\ \varphi_n) = \int_0^1 Sed\varphi_n = Se \times \varphi_n(x)/_0^1 - \int_0^1 (Se)'\varphi_n(x)dx -$$
$$= \varphi_n(1) + \int_0^1 Se' \times \varphi_n(x)dx = \varphi_n(1) + \left(Se', \varphi_n\right);$$

Демек,

$$(Sae, \varphi_n) = \lambda_n(e, \varphi_n) - \varepsilon\varphi_n(1) - \varepsilon\left(Se', \varphi_n\right) = \left|-\varepsilon e' = ae\right| =$$
$$= \lambda_n(e, \varphi_n) - \varepsilon\varphi_n(1) + (Sea, \varphi_n],$$

сондықтан

$$\lambda_n(e, \varphi_n) = \varepsilon \times \varphi_n(1), (e, \varphi_n) = \frac{\varepsilon\ \varphi_n(1)}{\lambda_n}.$$

3. Негізгі нәтиежелер

Теорема 3. Егер

1) $a(x) \in C^n[0,1] -$ *нақты функция*;
2) $\forall x \in [0,1]$үшін$a(x) \geq \alpha > 0$;
3) $a(1 - x) = a(x)$;
4) $f(x) \in W_2^n[0,1]$;

болса онда Кошидің (1)-(2) есебінің шешімі, мынадай,

$$y(x, \varepsilon, f) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[\frac{J^k f(x)}{a(x)} - \frac{J^k f(0)}{a(0)}e(x)\right]\varepsilon^k + (-1)^n\varepsilon^n L_\varepsilon^{-1}J^n f,$$

болады, мұндағы,$J^0 = I, Jf = \frac{d}{dx}\left(\frac{f}{a}\right)$,

$$\varepsilon e'(x) + a(x)e(x) = 0, e(0) = 1$$
$$\|L_\varepsilon^{-1}J^n f\| \leq \frac{\|J^n f\|}{\alpha}.$$

Дәлелі.

$$(Sf, \varphi_n) = \left|\varepsilon\varphi_n' + a\varphi_n = \lambda_n S\varphi_n\right| = \left(Sf, \frac{\lambda_n S\varphi_n}{a} - \frac{\varepsilon}{a}\varphi_n'\right) =$$
$$= \lambda_n\left(Sf, \frac{S\varphi_n}{a}\right) - \varepsilon\left(Sf, \frac{\varphi_n'}{a}\right) = |Sa = a(1 - x) = a(x)| =$$

$$= \lambda_n\left(S\frac{f}{a}, S\varphi_n\right) - \varepsilon\left(S\frac{f}{a}, \varphi_n'\right) = \lambda_n\left(\frac{f}{a}, \varphi_n\right) - \varepsilon\left(S\frac{f}{a}, \varphi_n'\right);$$

$$\left(S\frac{f}{a}, \varphi_n'\right) = \int_0^1 S\frac{f}{a}d\,\varphi_n = \varphi_n(x)S\frac{f}{a}/_0^1 - \int_0^1\left(S\frac{d}{dx}\right)'\varphi_n(x)dx =$$

$$= \varphi_n(1)\frac{f(0)}{a(0)} + \int_0^1 S\left(\frac{f}{a}\right)'\varphi_n(x)dx = \varphi_n(1)\frac{f(0)}{a(0)} + \left(S\left(\frac{f}{a}\right)', \varphi_n\right),$$

$$(Sf, \varphi_n) = \lambda_n\left(\frac{f}{a}, \varphi_n\right) - \frac{f(0)}{a(0)}\varepsilon\varphi_n(1) - \varepsilon\left(S\left(\frac{f}{a}\right)', \varphi_n\right).$$

Демек,

$$y(x,\varepsilon,f) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(Sf,\varphi_n)}{\lambda_n}\varphi_n(x) = \frac{f(x)}{a} - \frac{f(0)}{a(0)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon\,\varphi_n(1)}{\lambda_n}\varphi_n(x) -$$

$$-\varepsilon y\left(x,\varepsilon,\frac{d}{dx}\frac{f}{a}\right) = \frac{f(x)}{a(x)} - \frac{f(0)}{a(0)}e(x) - \varepsilon y\left(x,\varepsilon,\frac{d}{dx}\frac{f}{a}\right).$$

Әрі қарай, математикалық индукция әдісі бойынша

$$y(x,\varepsilon,f) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[\frac{J^kf(x)}{a(x)} - \frac{J^kf(0)}{a(0)}e(x)\right]\varepsilon^k + (-1)^n\varepsilon^nL_\varepsilon^{-1}J^nf(x),$$

мұндағы, $J^0 = I, Jf(x) = \frac{d}{dx}\frac{f}{a}$, бізге керегі-де осы еді.

4. Талқысы

Келесі,

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y' + \frac{2}{1+x^2}y = \frac{2arctg^2x +}{1+x^2},$$

$$y(0) = 0;$$

мысал әдістің дәлдігін көрсетіп тұр.

Бұл сәтте,

$$a(x) = \frac{2}{1+x^2} \geq 2 > 0, f(x) = \frac{2arctg^2x + 6}{1+x^2};$$

$$Df(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{f}{a}\right), \rightarrow Df(x) = (arctg^2x + 3)' = \frac{2\times arctgx}{1+x^2},$$

$$D^2f(x) = \frac{d}{dx}(arctg\,x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$D^3f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}\right)' = 0, \rightarrow$$

$$y(x,\varepsilon,f) = \frac{D^0f(x)}{a(x)} - \frac{D^0f(0)}{a(0)}e(x) - \left[\frac{Df(x)}{a(x)} - \frac{Df(0)}{a(0)}e(x)\right]\varepsilon +$$

$$+\left[\frac{D^2f(x)}{a(x)} - \frac{D^2f(0)}{a(0)}e(x)\right]\varepsilon^2 + 0,$$

мұнан,

$$y(x,\varepsilon,f) = arctg^2x + 3 - 3e^{-\frac{2arctgx}{\varepsilon}} - 3arctgx + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^{-\frac{2arctgx}{\varepsilon}}\right]\varepsilon^2 =$$

$$= arctg^2x + 3 - 3\times e^{-\frac{2arctgx}{\varepsilon}} - \varepsilon arctgx + \frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{\varepsilon^2}{2}\times e^{-\frac{arctgx}{\varepsilon}} =$$

$$= 3 + arctg^2x - \varepsilon\,arctgx + \frac{\varepsilon^2}{2} - \left(3 + \frac{\varepsilon^2}{2}\right)e^{-\frac{2arctgx}{\varepsilon}}.$$

5. Қорытынды

Спектрәлді теорияның әдістерін сингуляр эсерленген сызықтық есептерге табысты қолдануға болады,және бұл сәтте есептің бұрын сонды байқалмаған қасиеттері көрінеді екен.

ӘДЕБИЕТ

[1] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимтотические методы в теорий сингулярных возмущений.-М.: Высш. шк. 1990.-200с.

[2] Вишик М.И., Люстерник А.А. Регулярное вырождение и погранслойный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук, 1957. №5. с.3-122.

[3] A. N. Tikhonov, Mat. Sbornik 27, 147-156 (1950), (in Russian).

[4] M. I. Imanaliev, Asymptotical Methods in the Theory of Singulary Perturbed Integro-Differential Systems, Ilim, Bishkek,

[5] S. Lomov, Introduction to the General Theory of Singular Perturbations, American Mathematical Society, Providence, RI,1992.

[6] V. Butuzov, Comput. Math. Math. Phys. 12, 14-34 (1972).

[7] A. Vasil'eva, and V. Tupchiev, Soviet Math. Dokl. 9, 179-183 (1968).

[8] V. Trenogin, Russian Math. Surveys 25, 119-156 (1970).

[9] 9.T. Sh. Kal'menov, S. T. Akhmetova, and A. Sh. Shaldanbaev, Mat. Zh. Almaty 4, 41–48 (2004), (in Russian).

[10]10.T. Sh. Kal'menov, and U. A. Iskakova, Doklady Mathematics 45, 1460-1466 (2009).

[11]T. Sh. Kal'menov, and A. Sh. Shaldanbaev, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 18, 352–369 (2010).

[12]A. Kopzhassarova, and A.Sarsenbi, Abstract and Applied Analysis 2012, 1-6 (2012), (Article ID 576843).

[13]Orazov I., Shaldanbaev A,Sh,Shomanbayeva M.About the nature of the spectrum of the periodic problemn for the heat equation with a deviating argument.// Abstract and Applied Analysis. Volume 2013(2013).Article ID 128363,6 pages htt://dx.doi.org/10.1155/2013/128363.

[14].A. Sh. Shaldanbaev, Manat Shomanbayeva, Isabek 0razov,Solution of a singularly perturbed Cauchy problem using amethod of a deviating argument, AIP Conference Proceedings 1676, 020072 (2015); doi: 10.1063/1.4930498

[15]A. Sh. Shaldanbaev, Manat Shomanbayeva, and Asylzat Kopzhassarova,

[16]Solution of a singularly perturbed Cauchy problem for linear systems of ordinary differential equations by the method of spectral decomposition, AIP Conference Proceedings 1759, 020090 (2016); doi: 10.1063/1.4959704.

[17]Ахиезер Н.Н., Глазман Н.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.-М.:Наука ,1966.,-544с.

[18]Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.1-2. – М.: Мир, 1977.

REFERENCES

[1] Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. Asimtoticheskie metody v teorij singuljarnyh vozmushhenij.-M.: Vyssh. shk. 1990.-200s.

[2] Vishik M.I., Ljusternik A.A. Reguljarnoe vyrozhdenie i pogranslojnyj sloj dlja linejnyh differencial'nyh uravnenij s malym parametrom // Uspehi matematicheskih nauk, 1957. №5. s.3-122.

[3] A. N. Tikhonov, Mat. Sbornik 27, 147-156 (1950), (in Russian).

[4] M. I. Imanaliev, Asymptotical Methods in the Theory of Singulary Perturbed Integro-Differential Systems, Ilim, Bishkek,

[5] S. Lomov, Introduction to the General Theory of Singular Perturbations, American Mathematical Society, Providence, RI,1992.

[6] V. Butuzov, Comput. Math. Math. Phys. 12, 14-34 (1972).

[7] A. Vasil'eva, and V. Tupchiev, Soviet Math. Dokl. 9, 179-183 (1968).

[8] V. Trenogin, Russian Math. Surveys 25, 119-156 (1970).

[9] T. Sh. Kal'menov, S. T. Akhmetova, and A. Sh. Shaldanbaev, Mat. Zh. Almaty 4, 41–48 (2004), (in Russian).

[10] T. Sh. Kal'menov, and U. A. Iskakova, Doklady Mathematics 45, 1460-1466 (2009).

[11] T. Sh. Kal'menov, and A. Sh. Shaldanbaev, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 18, 352–369 (2010).

[12] A. Kopzhassarova, and A.Sarsenbi, Abstract and Applied Analysis 2012, 1-6 (2012), (Article ID 576843).

[13] Orazov I., Shaldanbaev A,Sh,Shomanbayeva M.About the nature of the spectrum of the periodic problemn for the heat equation with a deviating argument.// Abstract and Applied Analysis. Volume 2013(2013).Article ID 128363,6 pages htt://dx.doi.org/10.1155/2013/128363.

[14] A. Sh. Shaldanbaev, Manat Shomanbayeva, Isabek 0razov,Solution of a singularly perturbed Cauchy problem using amethod of a deviating argument, AIP Conference Proceedings 1676, 020072 (2015); doi: 10.1063/1.4930498

[15] A. Sh. Shaldanbaev, Manat Shomanbayeva, and Asylzat Kopzhassarova,

[16] Solution of a singularly perturbed Cauchy problem for linear systems of ordinary differential equations by the method of spectral decomposition, AIP Conference Proceedings 1759, 020090 (2016); doi: 10.1063/1.4959704.

[17] Ahiezer N.N., Glazman N.M. Teorija linejnyh operatorov v gil'bertovom prostranstve.-M.:Nauka ,1966.,-544s.

[18] Rid M., Sajmon B. Metody sovremennoj matematicheskoj fiziki. T.1-2. – M.: Mir, 1977.

УДК 517.94

М.И. Ақылбаев,[1] Г.А. Бесбаев[2], А.Ш. Шалданбаев [2]

РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ,МЕТОДОМ ОТКЛОНЯЮЩЕГОСЯ АРГУМЕНТА

Казахстанский инженерно-педагогический университет Дружбы народов, г.Шымкент
Южно-Казахстанский государственныйуниверситет, г.Шымкент

Ключевые слова: полнота, самосопряженный оператор,вполне непрерывный оператор,терема Гилберта –Шмидта,вольтеровые операторы,индефинитная метрика,разложение Шмидта,ортонормированный базис.

Аннотация. В данной работе получено спектральное разложение решении задачи Коши в простанстве с индефинитной метрикой,и с помощью этого разложения выведено погранслойное разложение решении сингулярно возмущенной задачи Коши, для модельного уравнения первого порядка $\varepsilon y' + a(x)y(x) = f(x), y(0) = 0, a(x) > 0, f(x) \in W_2^n[0,1], a(x) \epsilon C^n[0,1]$.

Сведения об авторах:

Бесбаев Г.А. к.ф.-м.н., и.о. доцента кафедры «Автоматики и телекомуникации» Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауезова, г. Шымкент.

Ақылбаев М.И. к.т.н., доцент кафедры «Информатики и математики» Южно-Казахстанского педагогического университета,г. Шымкент.

Шалданбаев А.Ш. – д.ф.-м.н., профессор кафедры «Математические методы и моделирование» Южно-Казахстанского государственного университета им. М.Ауезова, г. Шымкент.