OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**
ISSN 1991-346X
Volume 4, Number 314 (2017), 230 – 240

UDC 517.94

**Besbayev G.A.[1], ShaldanbayevA.Sh. [1], Akylbayev M.I. [2]**

[1]South Kazakhstan State University, Shymkent
[2]Kazakhstan Engineering and Pedagogical University of Friendship of Peoples, Shymkent
shaldanbaev51@mail.ru

# SOLUTION OF A SINGULARLY PERTURBED CAUCHY PROBLEM, FOR AN ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION OF THE SECOND ORDER WITH CONSTANT COEFFICIENTS, BY THE OPERATOR METHOD

**Abstract**. In this paper we obtain a spectral decomposition of the solution of the Cauchy problem in a space with an indefinite metric, and with the help of this expansion we deduce the boundary layer expansion of the solution of the singularly perturbed Cauchy problem, for an ordinary second-order differential equation

**Key words**: completely continuous operator, selfadjoint operator, Gilbert-Schmidt theorem, Volterian operators, indefinite metric, Schmidt decomposition, completeness, orthonormal basis.

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y''(x) + a y'(x) + by(x) = f(x),\ a, b\ \text{-}const,\ y(0)=0, y'(0)=0;$$
$$f(x) \in L^2(0,1), y(x) \in C^2(0,1) \cap C^2[0,1].$$

УДК 517.94

**Г.А. Бесбаев,[1] А.Ш. Шалданбаев,[1] М.И. Ақылбаев[2]**

[1]Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент қ-сы;
[2]Қазақстанның инженерлі-педагогикалық халықтар достығы университеті, Шымкент қ-сы

# КОЭФФИЦИЕНТТЕРІ ТҰРАҚТЫ ЕКІНШІ РЕТТІ КӘДІМГІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУДІҢ СИНГУЛЯР ӘСЕРЛЕНГЕН КОШИЛІК ЕСЕБІН ШЕШУДІҢ ОПЕРАТОРЛЫҚ ӘДІСІ ТУРАЛЫ

## 1. Кіріспе.

Гилберттің $L^2(0,1)$ кеңістігінде Кошидің, мынадай,

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y''(x) + a y'(x) + by(x) = f(x) \quad (1)$$
$$y(0)=0, y'(0)=0 \quad (2)$$

есебін қарастырайық, мұндағы $\varepsilon > 0$ -азшама, $a, b$ -$const$ , $f(x) \in L^2(0,1), y(x) \in C^2(0,1) \cap C^2[0,1]$.

Мына, $\varepsilon = 0$ сәтте ,жоғарыдағы (1)- (2) теңдіктерінен әсерленбеген, мынадай

$$L_0 z = az'(x) + bz(x) = f(x) \quad (1)'$$
$$z(0) = 0 \quad (2)'$$

есепке келеміз.Мына,

$$\lim_{\varepsilon \to 0} y(x,\varepsilon) = z(x)$$

теңдік қай кезде орындалады деген сұрақ туындайды, яғни бұл теңдік орындалуы үшін $f(\mathrm{x})$ функциясы мен $a,b$- коэффициенттері қандай болуы керек?Бұл есепті шешудің көптеген әдістері бар [1-9],өкінішке орай,бұл әдістердің көпшілігі жартылай эмпиристік әдістер қатарына жатады,себебі, есептің қалдық мүшесі, оның коэффициенттері арқылы бағаланбаған.Біз бұл есепті спектрәлдік әдіспен [10-17] шешіп, әлгі олқылықты толтырмақпыз.

**2. Зерттеу әдістері**

Жоғарыдағы (1)- (2)-есебіне, мынадай,

$$L_\varepsilon y=\varepsilon y''(\mathrm{x})+ay'(\mathrm{x})+\mathrm{by(x)}\ ,$$

$$D(\mathrm{L}_\varepsilon)=\left\{y(\mathrm{x})\in C^2(0,1)\cap C^1[0,1];\ \mathrm{y}(0)=0,\mathrm{y}'(0)=0\right\}$$

сызықтық оператор сәйкес келеді.

Лемма 1. Егер $Su(\mathrm{x})=\mathrm{u}(1-\mathrm{x})$ болса, онда $SL_\varepsilon$ операторы $L^2(0,1)$ -кеңістігінде симметриялы.

Дәлелі. Айталық, $u(\mathrm{x}),\mathrm{v(x)}\in\mathrm{D}(\mathrm{L}_\varepsilon)$ болсын, онда

$$(\mathrm{SL}_\varepsilon\mathrm{u},\mathrm{v})=(\mathrm{L}_\varepsilon\mathrm{u},Sv)=\int_0^1\left[\varepsilon u''+au'(\mathrm{x})+\mathrm{bu(x)}\right]v(1-\mathrm{x})\,\mathrm{dx}=$$

$$\varepsilon\int_0^1 v(1-\mathrm{x})\,\mathrm{du}'+\mathrm{a}\int_0^1 v(1-\mathrm{x})\,\mathrm{du}+\int_0^1 bu(\mathrm{x})\,\mathrm{v}(1-\mathrm{x})\,\mathrm{dx}=$$

$$\varepsilon v(1-\mathrm{x})\,\mathrm{u}'(\mathrm{x})\Big|_0^1+av(1-\mathrm{x})\,\mathrm{u(x)}\Big|_0^1+\varepsilon\int_0^1 v'(1-\mathrm{x})\cdot\mathrm{u}'(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}+$$

$$+a\int_0^1 v'(1-\mathrm{x})\,\mathrm{u(x)}\,\mathrm{dx}+\int_0^1 bv(1-\mathrm{x})\,\mathrm{u(x)}\,\mathrm{dx}=$$

$$v'(1-\mathrm{x})\,\mathrm{u(x)}\Big|_0^1+\varepsilon\int_0^1 v''(1-\mathrm{x})\,\mathrm{u(x)}\,\mathrm{dx}+\mathrm{a}\int_0^1 v'(1-\mathrm{x})\,\mathrm{u(x)}\,\mathrm{dx}+$$

$$\int_0^1 bv(1-\mathrm{x})\,\mathrm{u(x)}\,\mathrm{dx}=\int_0^1 u(\mathrm{x})\left[\varepsilon v''(1-\mathrm{x})+\mathrm{av}'(1-\mathrm{x})+\mathrm{bv}(1-\mathrm{x})\right]dx=(\mathrm{u},\mathrm{SL}_\varepsilon\mathrm{v})\ .$$

**Салдар1.** $SL_\varepsilon$ қабынатын оператор.

Лемма 2. $L_\varepsilon$ -операторының сыңарласы, келесі,

$$L_\varepsilon^+v=\varepsilon v''(\mathrm{x})-a\,\mathrm{v}'(\mathrm{x})+bv(\mathrm{x}),\mathrm{D}(L_\varepsilon^+)=\left\{v(\mathrm{x})\in C^2(0,1)\cap C^1[0,1];\ \mathrm{z}(1)=0,\mathrm{z}'(1)=0\right\}$$

оператор болады.

Дәлелі. $u(\mathrm{x})\in\mathrm{D}(\mathrm{L}_\varepsilon)$ және $\mathrm{v(x)}\in\mathrm{D}(\mathrm{L}_\varepsilon^+)$ болсын делік, сонда,

$$\left(L_\varepsilon u,v\right)=\int_0^1(\varepsilon\,\mathrm{u}''+\mathrm{au}'(\mathrm{x})+\mathrm{bx})v(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}=\varepsilon\int_0^1 v(\mathrm{x})\,\mathrm{du}'(\mathrm{x})+\mathrm{a}\int_0^1 v(\mathrm{x})\,\mathrm{du}+\mathrm{b}\int_0^1 u(\mathrm{x})\,\mathrm{v(x)}\,\mathrm{dx}=$$

$$\varepsilon v(\mathrm{x})\,\mathrm{u}'(\mathrm{x})\Big|_0^1-\varepsilon-\int_0^1 v'(\mathrm{x})\,\mathrm{u}'(\mathrm{x})\,\mathrm{dx}+\mathrm{av(x)\,u(x)}\Big|_0^1-a\int_0^1 v''(\mathrm{x})\,\mathrm{u(x)}\,\mathrm{dx}+$$

$$b\int_0^1 u(\mathrm{x})\,\mathrm{v(x)}\,\mathrm{dx}=-\varepsilon\int_0^1 v'(\mathrm{x})\,\mathrm{du(x)}-\mathrm{a}\int_0^1 v'(\mathrm{x})\,\mathrm{u(x)}\,\mathrm{dx}+\mathrm{b}\int_0^1 u(\mathrm{x})\,\mathrm{v(x)}\,\mathrm{dx}=$$

$$=-\varepsilon v'\left(x\right)u(\mathrm{x})\Big|_0^1+\varepsilon\int_0^1 v''(\mathrm{x})\,\mathrm{u(x)}\,\mathrm{dx}-\mathrm{a}\int_0^1 v'(\mathrm{x})\,\mathrm{u(x)}\,\mathrm{dx}+b\int_0^1 u(\mathrm{x})\,\mathrm{v(x)}\,\mathrm{dx}=$$

$$= \int_0^1 u(x)\left[\varepsilon v''(x) - av'(x) + bv(x)\right] = (u, L_\varepsilon^+ v)\ .$$

**Салдар 2.** $L_\varepsilon$ -қабынатын оператор, себебі $L_\varepsilon^+ \subset L_\varepsilon^*$ және $L_\varepsilon^+$ -тығыз анықталған.

**Лемма 3.** (Алғы бағалар туралы)

Егер $a > 0$ , $b \ge 0$ болса, онда, келесі, $\|y\| \le \|L_\varepsilon y\|, \|y\|_1 \le \sqrt{2}\|L_\varepsilon y\|$

алғы бағалар орынды.

Дәлелі. О баста, $y(x) \in D(L_\varepsilon)$ делік, онда

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y''(x) + ay'(x) + by(x), (L_\varepsilon y, y') = \varepsilon(y'', y') + a\|y'\|^2 + b(y, y'),$$

$$(y'', y')\int_0^1 y'dy' = \frac{(y')^2(x)}{2}\int_0^1 = \frac{y'^2(1)}{2} \ge 0;$$

$$(y, y') = \int_0^1 yy'dx = \frac{y^2(x)}{2}\int_0^1 = \frac{y^2(1)}{2} \ge 0; \Rightarrow a\|y'\|^2 \le (L_\varepsilon y, y') \le |(L_\varepsilon y, y')| \le \|L_\varepsilon y\| \cdot \|y'\|, \Rightarrow a \cdot \|y'\| \le \|L_\varepsilon y\|$$

Егер $y(0) = 0$ болса, онда $\|y\| \le \|y'\|$. Шынында-да,

$$y(x) = \int_0^x y'(t)\,dt, \Rightarrow (y(x)) = \left|\int_0^x y'(t)\,dt\right| \le \left(\int_0^x 1^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_0^x y'^2(t)dt\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le x^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^x y'^2(t)\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \le \|y'\|, \Rightarrow \|y\| \le \|y'\|.$$

Демек, $\|y\| \le \|y'\| \le \|L_\varepsilon y\|$ және $\|y\|_1 = \sqrt{\|y\|^2 + \|y'\|^2} \le \sqrt{\|L_\varepsilon y\| + \|L_\varepsilon y\|} \le \sqrt{2}\|L_\varepsilon y\|$.

Егер $y \in D(\overline{L_\varepsilon})$ болса, онда, мынадай, $y_n \to y, L_\varepsilon y \to \overline{L_\varepsilon y}$ болатын $\{y_n\} \in D(L_\varepsilon), n = 1, 2...$ тізбегі табылады. Онда $n \to \infty$ сәтінде ,мынадай, $\|y_n\| \to \|y\|, \|y'_n\| \to \|y'\|$,және $\|L_\varepsilon y_n\| \to \|L_\varepsilon y\|$ болады, сондықтан кезкелген $\forall y \in D(\overline{L_\varepsilon})$ үшін, келесі,

$$\|y\| \le \|y'\| \le \|\overline{L}_\varepsilon y\|, \|y\|_1 \le \sqrt{2}\|\overline{L}_\varepsilon y\|$$

теңсіздіктер орынды.

Егер $\overline{L}_\varepsilon y = 0$ болса, онда $y = 0$, сондықтан кері $(\overline{L}_\varepsilon)^{-1}$ операторы бар және ол әсіре үзіксіз (Реллихтың теоремасы бойынша).

$SL_\varepsilon -$ операторы симметриялы болғандықтан, оның қабындысы $\overline{SL_\varepsilon} = S\overline{L}_\varepsilon$ операторы-да симметриялы, және $\overline{L}_\varepsilon$ қайтымды, онда $S\overline{L}_\varepsilon$ операторы-да, сондай, демек $\overline{SL_\varepsilon}$ жалқы оператор. Онда $\left(\overline{SL_\varepsilon}\right)^{-1}$ операторы-да жалқы, және әсіре үзіксіз, демек, Гилберт-Шмидтің теоремасы бойынша, келесі,

$$\left(\overline{SL_\varepsilon}\right)^{-1} f = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\left(\overline{SL_\varepsilon}\right)^{-1} f\varphi_n\right) - \varphi_n(x) + \varphi_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(f_1(SL_\varepsilon)^{-1}\varphi_n) \cdot \varphi_n(x) + \varphi_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(f, \varphi_n)}{\lambda_n} \cdot \varphi_n(x) + \varphi_0(x),$$

таралым орынды, мұндағы $\varphi_0(x) \in K\mathrm{er}\left(\overline{SL_\varepsilon}\right)^{-1}$, яғни $\left(\overline{SL_\varepsilon}\right)^{-1}\varphi_0 = 0, \Rightarrow \varphi_0(x) = 0.$ Демек,

$$\left(\overline{SL_\varepsilon}\right)^{-1} f = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(f, \varphi_n)}{\lambda_n}\varphi_n(x).$$

Егер $(\mathrm{f},\varphi_n)=0, \mathrm{n}=1,2,\ldots$ болса,онда , мұнан, $f=0$ , демек, $\{\varphi_n(\mathrm{x})\}, n=1,2,\ldots$ толық система.

**Теорема 1.** Егер $a>0, b\geq 0$ болса, онда

1) Кері $\left(\overline{SL_\varepsilon}\right)^{-1}$ операторы бар, және ол әсіре үзіксіз жалқы оператор.

2) $\left(\overline{SL_\varepsilon}\right)^{-1}$ -операторының нормаланған меншікті векторлары $\mathrm{L}^2$ (0,1) кеңістігінде ортонормаланған базис құрайды.

Егер $L_\varepsilon y=f$ болса, онда

$$SL_\varepsilon y=Sf(\mathrm{x})\Rightarrow \overline{SL_\varepsilon} y=Sf(\mathrm{x}),\Rightarrow \mathrm{y}(\mathrm{x},\varepsilon,\mathrm{f})=\left(SL_\varepsilon\right)^{-1}Sf(\mathrm{x})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mathrm{Sf},\varphi_n)}{\lambda_n}\cdot\varphi_n(\mathrm{x}).$$

**Теорема 2.** Егер $a>0, b\geq 0$ болса, онда Кошидің, жоғарыдағы (1)- (2) есебі ,әлді шешіледі және бұл әлді шешім, мынадай,

$\mathrm{y}(\mathrm{x},\varepsilon,\mathrm{f})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\mathrm{Sf},\varphi_n)}{\lambda_n}\cdot\varphi_n(\mathrm{x})$ болады, сонымен бірге кезкелген $\varepsilon>0$ үшін $y\in W_2^2(0,1)$ болады.

**3. Зерттеу нәтиежелері**

Егер –де$\left(\overline{SL_\varepsilon}\right)^{-1}\varphi_n(\mathrm{x})=\frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(\mathrm{x}), n=1,2,\ldots,$ болса, онда $\varphi_n(\mathrm{x})\lambda_n=\overline{SL_\varepsilon}\varphi_n$. Енді $\varphi_n(\mathrm{x})\in \mathrm{D}\left(\overline{L_\varepsilon}\right)$ екенін ескерсек, онда $\varphi_n(\mathrm{x})\in W_2^2(0,1)$, сондықтан,

$$\overline{SL_\varepsilon}\varphi_n(\mathrm{x})=SL_\varepsilon\varphi_n=S\left[\varepsilon\varphi_n''+a\varphi_n'(\mathrm{x})+\mathrm{b}\,\varphi_n(\mathrm{x})\right]=\lambda_n\varphi_n(\mathrm{x}),\Rightarrow$$

$$\begin{gathered}\varepsilon\varphi_n''(\mathrm{x})+\mathrm{a}\,\varphi_n'(\mathrm{x})+\mathrm{b}\,\varphi_n(\mathrm{x})=\lambda_n S\varphi_n(\mathrm{x}),\\ \varphi_n(0)=0,\varphi_n'(0)=0.\end{gathered}\qquad(3)$$

Ұйғарым. Меншікті $\varphi_n(\mathrm{x})$ $(\mathrm{n}=1,2,\ldots)$ функциялары шексіз рет дифференциалданады, бұл қасиет $a,b$ коэффициенттерінің тұрақтылығының салдары.

Енді $\left(Sf,\varphi_n\right), n=1,2,\ldots,$ Фуренің коэффициенттерін есептейік. В-операторы мынадай,

$$\begin{gathered}Bz(\mathrm{x})=\mathrm{az}'(\mathrm{x})+\mathrm{bz}(\mathrm{x}),\\ z(0)=0\end{gathered}$$

болсын делік. Мына, $\varphi_n(\mathrm{x})\in\mathrm{D(B)}$ жайды ескеріп, (3) формуланы, былай,

$\varepsilon\varphi_n''(\mathrm{x})+B\varphi_n(\mathrm{x})=\lambda_n S\varphi_n(\mathrm{x})$ жазайық, мұнан,

$$\varepsilon B^{-1}\varphi_n''(\mathrm{x})+\varphi_n(\mathrm{x})=\lambda_n B^{-1}S\varphi_n, \mathrm{n}=1,2,\ldots,\Rightarrow\varphi_n(\mathrm{x})=\lambda_n B^{-1}S\varphi_n-\varepsilon B^{-1}\varphi_n''(\mathrm{x});$$

$$\left(Sf\varphi_n\right)=\left(Sf,\lambda_n B^{-1}S\varphi_n-\varepsilon B^{-1}\varphi_n''\right)=\lambda_n\left(Sf,B^{-1}S\varphi_n\right)-\varepsilon\left(Sf,B^{-1}\varphi_n''\right)=$$

$$\lambda_n\left(\left(B^{-1}\right)^{+}Sf,S\varphi_n\right)-\varepsilon\left(\left(B^{-1}\right)^{+}Sf,\varphi_n''\right)=$$

$$=\lambda_n\left(SB^{-1}f,S\varphi_n\right)-\varepsilon\left(SB^{-1}f,\varphi_n''\right)=\lambda_n\left(B^{-1}f,\varphi_n\right)-\varepsilon\left(SB^{-1}f,\varphi_n''\right);$$

$$\left(SB^{-1}f,\varphi_n''\right)=\int_0^1 SB^{-1}fd\varphi_n'(\mathrm{x})=SB^{-1}f\cdot\varphi_n'(\mathrm{x})\Big|_0^1-\int_0^1\left(SB^{-1}f\right)'\varphi_n'(\mathrm{x})\mathrm{dx}=$$

$$-\left(SB^{-1}f\right)'\varphi_n(\mathrm{x})+\int_0^1\left(SB^{-1}f\right)''\varphi_n(\mathrm{x})=$$

$$S\left(B^{-1}f\right)'\varphi_n(\mathrm{x})\Big|_0^1+\int_0^1\left(SB^{-1}f\right)''\varphi_n(\mathrm{x})dx=\left(B^{-1}f\right)'(0)\cdot\varphi_n(1)+\left(\left(SB^{-1}f\right)'',\varphi_n\right);$$

$$\left(Sf,\varphi_n\right)=\lambda_n\left(B^{-1}f,\varphi_n\right)-\varepsilon\left(B^{-1}f\right)'(0)\cdot\varphi_n(1)-\varepsilon\left(\left(SB^{-1}f\right)'',\varphi_n\right),\Rightarrow$$

$$y(\mathrm{x},\varepsilon,\mathrm{f})=B^{-1}f(\mathrm{x})-\left(B^{-1}f\right)'(0)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon\varphi_n(1)}{\lambda_n}\varphi_n(\mathrm{x})-\varepsilon y\left(x,\varepsilon,\frac{d^2}{dx^2}B^{-1}f\right). \tag{4}$$

Енді оң жақтағы қатардың қосындысын табайық. Айталық, $\psi(\mathrm{x})$ - функциясы, келесі

$$\varepsilon\psi''+a\psi'(\mathrm{x})+\mathrm{b}\psi(\mathrm{x})=0, \tag{5}$$
$$\psi(0)=0,\psi'(0)=1$$

Коши есебінің шешімі болсын, сонда $\psi\in D(\mathrm{B})$ болары айдан анық, сондықтан жоғарыдағы (5) теңдеуді, былай, $\varepsilon\psi''+B\psi=0,\Rightarrow\varepsilon S\psi''+SB\psi=0,$ жазуға болады.

Сонда,

$$(\mathrm{SB}\psi,\varphi_n)=\left(SB\varphi,\lambda_nB^{-1}S\varphi_n-\varepsilon B^{-1}\varphi_n''\right)=\lambda_n\left(\mathrm{SB}\psi,B^{-1}S\varphi_n\right)-\varepsilon\left(\mathrm{SB}\psi,B^{-1}S\varphi_n''\right)=$$
$$=\lambda_n\left(\mathrm{S}\left(B^{-1}\right)^+\mathrm{SB}\psi,\varphi_n\right)-\varepsilon\left(\left(B^{-1}\right)^+\mathrm{SB}\psi,\varphi_n''\right)=\lambda_n\left(\mathrm{SS}B^{-1}\mathrm{B}\psi,\varphi_n\right)-\varepsilon\left(\mathrm{S}B^{-1}\mathrm{B}\psi,\varphi_n''\right)=$$
$$=\lambda_n\left(\varphi,\varphi_n\right)-\varepsilon\left(S\psi,\varphi_n''\right).$$

$$\left(S\psi,\varphi_n''\right)=\int_0^1S\psi d\varphi_n'=S\psi\cdot\varphi_n'(\mathrm{x})\Big|_0^1-\int_0^1\left(S\psi\right)'d\varphi_n(\mathrm{x})=\psi(1-\mathrm{x})\cdot\varphi_n'(\mathrm{x})\Big|_0^1-\left(S\psi\right)'\varphi_n(\mathrm{x})\Big|_0^1+\int_0^1\left(S\psi\right)''\varphi_n(\mathrm{x})dx=$$
$$=S\psi'(\mathrm{x})\cdot\varphi_n(\mathrm{x})\Big|_0^1+\int_0^1\left(S\psi\right)''\varphi_n(\mathrm{x})dx=\psi'(1-\mathrm{x})\cdot\varphi_n(\mathrm{x})\Big|_0^1+\int_0^1\left(S\psi\right)''\varphi_n(\mathrm{x})dx=$$
$$=\varphi_n(\mathrm{x})+\int_0^1\left(S\psi\right)''\varphi_n(\mathrm{x})dx=\begin{vmatrix}\varepsilon\psi''+B\psi=0,\\ \varepsilon S\psi''+SB\psi=0\end{vmatrix}=\varphi_n(\mathrm{x})-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^1SB\psi\cdot\varphi_n(\mathrm{x})dx=$$
$$\varphi_n(\mathrm{x})-\frac{\left(SB\psi,\varphi_n\right)}{\varepsilon};\Rightarrow\left(SB\psi,\varphi_n\right)=\lambda_n\left(\psi,\varphi_n\right)-\varepsilon\varphi_n(\mathrm{x})+\left(SB\psi,\varphi_n\right),\Rightarrow\left(\psi,\varphi_n\right)=\frac{\varepsilon\varphi_n(\mathrm{x})}{\lambda_n},\Rightarrow\psi(\mathrm{x})=$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\psi,\varphi_n\right)\varphi_n(\mathrm{x})=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon\varphi_n(\mathrm{x})}{\lambda_n}\varphi_n(\mathrm{x}). \tag{6}$$

Соңғы табылған (6) формуланы жоғарыдағы (4) формулаға апарып қойсақ бізге керекті, мына,

$$y(\mathrm{x},\varepsilon,\mathrm{f})=B^{-1}f(\mathrm{x})-\left(B^{-1}f\right)'(0)\psi(\mathrm{x})-\varepsilon\,\mathrm{y}(\mathrm{x},\varepsilon,\frac{d^2}{dx^2}B^{-1}f)$$

формула шығады.

Әрі қарай, математикалық индукцияны қолдануымызға болады.

$$y(x,\varepsilon,f)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k[B^{-1}D^kf(x)-(B^{-1}D^kf(x))'(0)*\psi(x)]\varepsilon^k+(-1)^n\varepsilon^ny(x,\varepsilon,D^nf).$$

Алынған нәтиежені тұжырымдап қоялық.

**Теорема 3.** Егер $a>0,b\geq 0,\varepsilon>0$, f(x)$\epsilon C^n[0,1]$болса, онда Кошидің,келесі,

$$L_\varepsilon y=\varepsilon y''(x)+ay'(x)+by(x)=f(x),x\in[0,1] \ (2.7.1)$$
$$y(0)=0,y'(0)=0 \ (2.7.2)$$

есебінің шешімі,мынадай,

$$y(x,\varepsilon,f)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k[B^{-1}D^kf(x)-(B^{-1}D^kf(x))'(0)*\psi(x)]\varepsilon^k+(-1)^n\varepsilon^n y(x,\varepsilon,D^nf)$$

болады,мұндағы,

$$D^0=I,\ Df(x)=\frac{d^2}{dx^2}B^{-1}f(x),$$

$$B^{-1}f(x)=\int_0^x\frac{f(t)}{a}e^{-\int_t^x\frac{b}{a}d\xi}dt.$$

$$\psi(x)=\frac{e^{k_2x}-e^{k_1x}}{k_2-k_1},k_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4\varepsilon b}}{2\varepsilon};$$

$$||y(x,\varepsilon,D^nf)||\le\frac{||D^nf||}{a\sqrt{2}}.$$

**4.Талқысы**

Мысал.

$$\varepsilon y'(x)+ay(x)=1.x\in(0,1]; \tag{7}$$

$$y(0)=0$$

Бұл есептің шешімі

$$y(x,\varepsilon)=\frac{1-e^{-\frac{a}{\varepsilon}x}}{a},\ мұнан\ (8)$$

$$\lim_{\varepsilon\to0}y(x,\varepsilon)=\begin{cases}0, x=0\ болған\ сәтте\ ;\\ \frac{1}{a}, x\ne0\ болған\ сәтте\ .\end{cases} \tag{9}$$

Жоғарыдағы (8) функцияның үзіксіз екені айдан анық, бірақ оның шегі (9) үзікті функция, демек жинақталу бірқалыпты емес. Теңдеудің оң жағы $f(x)=1$ өте біртегіс әдемі функция, солай бола тұра, ол бірқалыпты жинақталуды қамтамассыз ете алмады, демек, бірқалыпты жинақталуды қаматамассыз ету үшін теңдеудің оң жағына біртегістіктен басқа қосымша шарттар қою керек сыйақты.

Жоғарыдағы (0.1)-(7) есептің шешімі, мынадай

$$y(x,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x f(t)e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)}dt \tag{10}$$

болары айдан анық, егер $f(x)\in C[0,1]$, яғни ол $[0,1]$ кесіндісі бойында үзіксіз болса, онда

$$y(x,\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x[f(t)-f(0)]e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)}dt+\frac{f(0)}{\varepsilon}\int_0^x e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)}dt,$$

$$\int_0^x e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)}dt=\begin{vmatrix}x-t=s\\-dt=ds\end{vmatrix}=\int_0^x e^{-\frac{a}{\varepsilon}s}ds=$$

$$=e^{-\frac{a}{\varepsilon}s}\left(-\frac{\varepsilon}{a}\right)/_0^x=\frac{\varepsilon}{a}\left(1-e^{-\frac{a}{\varepsilon}x}\right),мұнан$$

$$y(x,\varepsilon)-\frac{f(0)}{a}\left(1-e^{-\frac{a}{\varepsilon}x}\right)=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x[f(t)-f(0)]\,e^{-\frac{a}{\varepsilon}(x-t)}dt;$$

Соңғы интегралды, былай,

$$\left|\int_0^x[f(t)-f(0)]\,e^{-\frac{a}{\varepsilon}t}dt\right|\le\max_{0\le t\le\varepsilon}|f(t)-f(0)|+\int_\varepsilon^x|f(x)-f(0)|e^{-\frac{a}{\varepsilon}t}dt\le$$

$$\le\overline{\max_{0\le t\le\varepsilon}}|f(t)-f(0)|+2\max_{0\le t\le1}|f(t)|\times\int_0^x e^{-\frac{a}{\varepsilon}}dt\le$$

$$\le\max_{0\le t\le\varepsilon}|f(t)-f(0)|+2||f||_c\times\frac{\left(1-e^{-\frac{a}{\varepsilon}x}\right)\varepsilon}{a}$$

бағалауға болады, бірақ бұл баға бөліміндегі $\varepsilon$ –ға төтеп бре алмайды. Мұнан шығар қорытынды есеп қарапайым болып көрінгенмен, қалпақпен ұрып алар, есептер қатарына жатпайды.

Егерде теңдеудің оң жағына қосымша шарт жүктесек, яғни $f(x) \in W_2^1[0,1]$ болса, онда

$$\left\| y(x,\varepsilon) - \frac{f(x)}{a} \right\| \le \frac{\sqrt{\varepsilon}}{a\sqrt{2a}} [f|0| + \|f'\|]$$

боларын көруге болады

Егерде (10) формулада алмастыру жасасақ ол, мына,

$$y(x,\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x f(x-t)e^{-\frac{a}{\varepsilon}t}dt$$

түрге келеді. Енді оң жақтағы интегралды, $f(x) \in W_2^n[0,1]$, сәтінде бөліктеп интегралдасақ, онда мынадай,

$$\int_0^x f(x-t)\,e^{-\frac{a}{\varepsilon}t}dt = \cdots = e^{-\frac{a}{\varepsilon}x}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k f^{(k-1)}(0)\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^k -$$

$$-\sum_{k=1}^{n} f^{(k-1)}(x)(-1)^k\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^k + (-1)^n\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^n\int_0^x f^{(n)}(x-t)e^{-\frac{a}{\varepsilon}t}dt =$$

$$= \left|t = \frac{x}{\varepsilon}\right| = \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{(-1)^k f^{(k-1)}(0)e^{-at}}{a^k} - \frac{(-1)^k f^{(k-1)}(x)}{a^k}\right]\varepsilon^k +$$

$$+(-1)^n\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^n\int_0^x f^{(n)}(x-t)e^{-\frac{a}{\varepsilon}t}\,dt, =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}[r_k(t) + P_k(x)]\,\varepsilon^k + (-1)^n\left(\frac{\varepsilon}{a}\right)^n\int_0^x f^{(n)}(x-t)e^{-\frac{a}{\varepsilon}t}dt;$$

$$\left\|\int_a^x f^{(n)}(x-t)e^{-\frac{a}{\varepsilon}t}\,dt\right\| \le \|f^{(n)}(x-t)\|\left(\int_0^1 e^{-\frac{2a}{\varepsilon}t}dt\right)^{\frac{1}{2}} \le$$

$$\le \|f^{(n)}(x)\|\left[\left(\frac{\varepsilon}{-2a}e^{-\frac{2a}{\varepsilon}t}\right)/_0^1\right]^{\frac{1}{2}} \le \|f^{(n)}(x)\| \times \left(\frac{\varepsilon}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}, \rightarrow$$

$$\left\|\int_0^x f^{(n)}(x-t)e^{-\frac{a}{\varepsilon}t}dt\right\| \le \|f^{(n)}(x)\|\left(\frac{\varepsilon}{2a}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Біз жоғарыда есепті қарабайыр әдістердің бірі арқылы шығаруға әрекет жасадық, бірақ мұнымыз іске аспады.

Егер $\varepsilon y'(x) + ay(x) = f(x), y(0) = 0; a - cosnt$болса, онда

$$\frac{\varepsilon}{a}y(x) + \int_0^x y(t)dt = \frac{1}{a}\int_0^x f(t)dt.$$

Енді $\lambda = \frac{\varepsilon}{a}, F(t) = \frac{1}{a}\int_0^x f(t)dt, Jy(x) = \int_0^x y(t)dt$болсын, десек, онда

$$(\lambda I + J)y(x) = F(t), y(x) = R_\lambda F(t) = (J + \lambda I)^{-1}F(t) =$$

$$= \frac{1}{a}(J + \lambda I)^{-1}Jf(t) = \frac{1}{a}\left(J + \frac{\varepsilon}{a}I\right)^{-1}Jf(x).$$

$J$ –интегралдау операторы әсіре үзіксіз операторлар қатарына жатады сондықтан, оның резольвентасы $R_\lambda = (J + \lambda I)^{-1}$операторы да әсіре үзіксіз, ал оның өзі $\lambda = 0$ нүктесінен басқа барлық нүктелерде аналитикалық оператор функция, ал $\lambda = 0$ нүктесі елеулі (существенная) ерекше нүкте. Сондықтан, жалпы, алғанда,

$$\lim_{\lambda > 0} y(x,\lambda) = \lim_{\lambda > 0}(J + \lambda I)^{-1}\,F(t)$$

шегі жоқ ,сондықтан, тақырыпты тамам деуге болар еді. Бірақ $\lambda$ белгілі бір қыйсықтың бойымен,немесе, нүктелермен ұмтылғанда ондай шек бар болып ,және ол керек болып тұр. Бұл тақырыптың өміршеңділігі мен өзектілігі осында болса керек. Келесі бөлімде біз қолданыста жүрген әдістерге талдау жасаймыз.

**5.Қорытынды**

Әдісімізді С.А. Ломовтың түрландыру әдісімен салыстырайық,есептеулерді жеңілдету үшін, қарапайым жағдайды қарастыралық.

$H = L^2(0,1)$ −кеңістігінде Кошидің, мынадай,

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y'(x) + a(x)y(x) = f(x) \tag{11}$$

$$y(0) = 0 \tag{12}$$

сингуляр әсерленген есебін қарастыралық, мұндағы $\varepsilon \to 0$ −кезкелген параметр, ал $a(x)$пен $f(x)$мейлінше біртегіс функциялар.

Екі $x$ және $\tau$ айнымалыларына тәуелді $u(x,\tau,\varepsilon)$ функциясы, $\tau = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi$ болған сәтте, (11)-(12) есептің шешімі болсын деп жорыйық, яғни

$$y(x,\varepsilon) = u(x,\tau,\varepsilon)/_{\tau=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi}.$$

Осы формуланы $x$ бойынша дифференциалдайық:

$$y' = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \tau}\times\frac{\partial \tau}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a(x)}{\varepsilon}\times\frac{\partial u}{\partial \tau}.$$

Осы формуланы (11) теңдеуге апарып қояйық,

$$\left[\varepsilon\frac{\partial u}{\partial x} + a(x)\frac{\partial u}{\partial \tau} + a(x)u(x,\tau,\varepsilon)\right]_{\tau=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi} = f(x)$$

Сондай-ақ, $x = 0$ болған сәтте, (12)-формуладан

$$y(0,\varepsilon) = u(0,0,\varepsilon) = 0$$

Әрі қарай, $\tau$ −ды екінші айнымалысы деп сонан, келесі,

$$\begin{cases} \varepsilon\frac{\partial u}{\partial x} + a(x)\frac{\partial u}{\partial \tau} + a(x)u(x,\tau,\varepsilon) = f(x) & (13) \\ u(0,0,\varepsilon) = 0 & (14) \end{cases}$$

есепті қарастырайық.

Бұл есептің бірмәнді шешілуі үшін (14) шарттың жетіспейтіні айдан анық, себебі теңдеу екі айнымалыға тәуелді дербес туындысы, ал бастапқы шарт тек бір ғана (0,0) нүктесінде берілген. Солай болса-да біз бұл есептің шешімін, мына,

$$u(x,\tau,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^k u_k(x,\tau) + \varepsilon^n R_n(x,\tau,\varepsilon) \tag{15}$$

түрде іздейміз. Осы өрнекті жоғарыдағы (13) теңдеуге апарып қойып, төмендегі формулаларды аламыз.

$$\varepsilon\left[\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^k\frac{\partial u_k}{\partial x} + \varepsilon^n\frac{\partial R_n}{\partial x}\right] + a(x)\left[\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^k\frac{\partial u_k}{\partial \tau} + \varepsilon^n\frac{\partial R_n}{\partial \tau}\right] +$$

$$+a(x)\left[\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^k u_k(x,\tau) + \varepsilon^n R_n(x,\tau,\varepsilon)\right] = f(x),$$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^{k+1}\frac{\partial u_k}{\partial x} + \sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^k a(x)\frac{\partial u_k}{\partial \tau} + \sum_{k=0}^{n-1}a(x)u_k(x,\tau)\varepsilon^k +$$

$$+\varepsilon^{n+1}\frac{\partial R_n}{\partial x} + \varepsilon^n a(x)\frac{\partial R_n}{\partial \tau} + \varepsilon^n a(x)R_n(x,\tau,\varepsilon) = f(x);$$

$$\sum_{k=1}^{n}\varepsilon^k\frac{\partial u_{k-1}}{\partial x} + \sum_{k=0}^{n-1}\varepsilon^k a(x)\frac{\partial u_k}{\partial \tau} + \sum_{k=0}^{n-1}a(x)u_k(x,\tau)\varepsilon^k +$$

$$+\varepsilon^{n+1}\frac{\partial R_n}{\partial x} + \varepsilon^n a(x)\frac{\partial R_n}{\partial \tau} + \varepsilon^n a(x)R_n(x,\tau,\varepsilon) = f(x).$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\varepsilon^k\left[\frac{\partial u_{k-1}}{\partial x} + a(x)\frac{\partial u_k}{\partial \tau} + a(x)u_k(x,\tau)\right] + a(x)\frac{\partial u_0}{\partial \tau} + a(x)u_0(x,\tau) +$$

$$+\varepsilon^n\left[\varepsilon\frac{\partial K_n}{\partial x} + a(x)\frac{\partial R_n}{\partial \tau} + a(x)R_n(x,\tau,\varepsilon) + \frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}\right] = f(x) \;(16)$$

Енді $\varepsilon$ –ның бірдей дәрежелі коэффиценттерін теңестірсек, онда, мынадай,

$$a(x)\frac{\partial u_0}{\partial\tau}+a(x)u_0(x,\tau)=f(x),\frac{\partial u_0}{\partial\tau}+u_0=\frac{f(x)}{a(x)},\rightarrow$$

$$u_0(x,\tau)=\frac{f(x)}{a(x)}+C_0(\tau)e^{-\tau},u_0(0,0)=\frac{f(0)}{a(0)}+C_0(0)=0,C_0(0)=-\frac{f(0)}{a(0)}$$

Таңдау еркіндігін пайдаланып.

$$u_0(x,\tau)=\frac{f(x)}{a(x)}-\frac{f(0)}{a(0)}e^{-\tau}$$

болсын делік. Басқаша таңдағанда нәтиежесі қалдықтан көрінер еді.

Жоғарыдағы (16) формуланың бірінші жақсасын нөлге теңеп, мынадай,

$$a(x)\left[\frac{\partial u_k}{\partial\tau}+u_k(x,\tau)\right]=-\frac{\partial u_{k-1}}{\partial x},\rightarrow$$

$$\frac{\partial u_k}{\partial\tau}+u_k(x,\tau)=-\frac{1}{a(x)}\frac{\partial}{\partial x}u_{k-1}(x,\tau)$$

теңдіктерді аламыз.

Енді $k=1$десек, онда

$$\frac{\partial u_1}{\partial\tau}+u_1(x,\tau)=-\frac{1}{a(x)}\frac{\partial}{\partial x}u_0(x,\tau)=-\frac{1}{a(x)}\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{a(x)}.$$

Мынадай , $D^0=I,Df(x)=\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{a(x)}$ белгілеулер енгізсек, онда, былай,

$$u_0(x,\tau)=\frac{D^0f(x)}{a(x)}-\frac{D^0f(0)}{a(0)}e^{-\tau},$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial\tau}+u_1(x,\tau)=-\frac{Df(x)}{a(x)}$$

болады. Анология бойынша

$$u_1(x,\tau)=-\left[\frac{Df(x)}{a(x)}-\frac{Df(0)}{a(0)}e^{-\tau}\right];$$

Енді $k=2$десек, онда

$$\frac{\partial u_2}{\partial\tau}+u_2(x,\tau)=-\frac{1}{a(x)}\frac{\partial}{\partial x}u_1(x)=\frac{1}{a(x)}D^2f(x),\rightarrow$$

$$u_2(x,\tau)=\left[\frac{D^2f(x)}{a(x)}-\frac{D^2f(0)}{a(0)}e^{-\tau}\right].$$

Осы прецессті жалғастыра берсек, онда, мынадай

$$u_k(x,\tau)=(-1)^k\left[\frac{D^kf(x)}{a(x)}-\frac{D^kf(0)}{a(0)}e^{-\tau}\right],k=0,1,2,\dots,n-1 \qquad (17)$$

формулаға келеміз. Қалдық мүшеге, мынадай,

$$\varepsilon\frac{\partial R_n}{\partial x}+a(x)\frac{\partial R_n}{\partial\tau}+a(x)R_n(x,\tau,\varepsilon)+\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}=0$$

теңдеу аламыз.

Енді, мына, жайды

$$\frac{d}{dx}R_n(x,\tau)_{\tau=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi}=\frac{\partial R_n}{\partial x}+\frac{\partial R_n}{\partial\tau}\times\frac{\partial\tau}{\partial x}=$$

$$=\frac{\partial R_n}{\partial x}+\frac{a(x)}{\varepsilon}\frac{\partial R_n}{\partial\tau},\rightarrow\varepsilon\frac{d}{dx}R_n=\varepsilon\frac{\partial R_n}{\partial x}+a(x)\frac{\partial R_n}{\partial\tau},$$

аңғарсақ, онда қалдық мүшеге, мынадай

$$\varepsilon R_n'+a(x)R_n=-\frac{\partial u_{n-1}}{\partial x}=(-1)^nD^nf(x)$$

$$R_n/_{x=0}=0$$

Кошидің есебін аламыз. Демек,

$$R_n(x)=(-1)^n y\big(x,\varepsilon,D^nf(x)\big),\tag{18}$$

мұндағы $y\big(x,\varepsilon,D^nf(x)\big)$ –дегеніміз сол бастапқы Кошидің есебінің шешімі, тек оң жағында $D^nf(x)$ тұр. Енді (18) мен (17) апарып (15)-ге қойсақ

$$y(x)=u(x,\tau,\epsilon)/_{\tau=\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi}=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[\frac{D^kf(x)}{a(x)}-\frac{D^kf(0)}{a(0)}e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x a(\xi)d\xi}\right]+$$

$$+(-1)^n y(x,\varepsilon,D^nf),$$

мұндағы $D^0=I, Df(x)=\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{a(x)},$

Енді әдістің әлсіз тұстарына көз жүгіртейік.

1) Есептің шешімінің бар-жоқтығы туралы ешнәрсе айтылмайды;

2) Жоғарыдағы (13)-(14) есептің шешімдер жыйыны туралы дерек жоқ;

3) Осы есептің шешімі (15) түрінде боларына кім кепілдік береді, бұл сәттегі қалдық $R_n(x,\tau,\varepsilon)$ мүше туралы мәлімет жоқ;

4) Жоғарыдағы (16) теңдікте бірдей дәрежелі $\varepsilon$ –дардың коэффиценттерін теңестіруге кім бізге құқық берді. Солай істеуге болар еді, егер $u(x,\tau,\varepsilon)$ –ның $\varepsilon$ –ге тәуелділігі аналитикалық болса, яғни ол әрбір шегеленген $x$ –тың мәні үшін $\varepsilon$ –ның аналитикалық функциясы болса. Ең жоқ дегенде, бұлай жасау үшін қалдық мүше $R_n(x,\tau,\varepsilon)$ туралы алдыналар мәлімет керек;

5) Қалдық $R_n(x,\tau,\varepsilon)$ мүшенің бағасы туралы ешнәрсе жоқ.

Демек, бұл әдісті-те жартылай эмпиристикалық деуге болады,ал біздің әдісіміз нақты тұжырымдарға негізделген,және нәтиежеміз [2] еңбектің жетістіктерімен жақсы үйлесіп тұр.

## ӘДЕБИЕТ


[1] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимтотические методы в теорий сингулярных возмущений.-М.: Высш. шк. 1990.-200с.

[2] Вишик М.И., Люстерник А.А. Регулярное вырождение и погранслойный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук, 1957. №5. с.3-122.

[3] A. N. Tikhonov, Mat. Sbornik 27, 147-156 (1950), (in Russian).

[4] M. I. Imanaliev, Asymptotical Methods in the Theory of Singulary Perturbed Integro-Differential Systems, Ilim, Bishkek,

[5] S. Lomov, Introduction to the General Theory of Singular Perturbations, American Mathematical Society, Providence, RI,1992.

[6] V. Butuzov, Comput. Math. Math. Phys. 12, 14-34 (1972).

[7] A. Vasil'eva, and V. Tupchiev, Soviet Math. Dokl. 9, 179-183 (1968).

[8] V. Trenogin, Russian Math. Surveys 25, 119-156 (1970).

[9] T. Sh. Kal'menov, S. T. Akhmetova, and A. Sh. Shaldanbaev, Mat. Zh. Almaty 4, 41–48 (2004), (in Russian).

[10]T. Sh. Kal'menov, and U. A. Iskakova, Doklady Mathematics 45, 1460-1466 (2009).

[11]T. Sh. Kal'menov, and A. Sh. Shaldanbaev, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 18, 352–369 (2010).

[12]A. Kopzhassarova, and A.Sarsenbi, Abstract and Applied Analysis 2012, 1-6 (2012), (Article ID 576843).

[13]Orazov I., Shaldanbaev A,Sh,Shomanbayeva M.About the nature of the spectrum of the periodic problemn for the heat equation with a deviating argument.// Abstract and Applied Analysis. Volume 2013(2013).Article ID 128363,6 pages htt://dx.doi.org/10.1155/2013/128363.

[14].A. Sh. Shaldanbaev, Manat Shomanbayeva, Isabek 0razov,Solution of a singularly perturbed Cauchy problem using amethod of a deviating argument, AIP Conference Proceedings 1676, 020072 (2015); doi: 10.1063/1.4930498

[15]A. Sh. Shaldanbaev, Manat Shomanbayeva, and Asylzat Kopzhassarova,

[16]Solution of a singularly perturbed Cauchy problem for linear systems of ordinary differential equations by the method of spectral decomposition, AIP Conference Proceedings 1759, 020090 (2016); doi: 10.1063/1.4959704.

[17]Ахиезер Н.Н., Глазман Н.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.-М.:Наука ,1966.,-544с.

[18]Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.1-2. – М.: Мир, 1977.

## REFERENCES

[1] Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. Asimtoticheskie metody v teorij singuljarnyh vozmushhenij.-M.: Vyssh. shk. 1990.-200s.

[2] Vishik M.I., Ljusternik A.A. Reguljarnoe vyrozhdenie i pogranslojnyj sloj dlja linejnyh differencial'nyh uravnenij s malym parametrom // Uspehi matematicheskih nauk, 1957. №5. s.3-122.

[3] A. N. Tikhonov, Mat. Sbornik 27, 147-156 (1950), (in Russian).

[4] M. I. Imanaliev, Asymptotical Methods in the Theory of Singulary Perturbed Integro-Differential Systems, Ilim, Bishkek,

[5] S. Lomov, Introduction to the General Theory of Singular Perturbations, American Mathematical Society, Providence, RI,1992.

[6] V. Butuzov, Comput. Math. Math. Phys. 12, 14-34 (1972).

[7] A. Vasil'eva, and V. Tupchiev, Soviet Math. Dokl. 9, 179-183 (1968).

[8] V. Trenogin, Russian Math. Surveys 25, 119-156 (1970).

[9] T. Sh. Kal'menov, S. T. Akhmetova, and A. Sh. Shaldanbaev, Mat. Zh. Almaty 4, 41–48 (2004), (in Russian).

[10]T. Sh. Kal'menov, and U. A. Iskakova, Doklady Mathematics 45, 1460-1466 (2009).

[11]T. Sh. Kal'menov, and A. Sh. Shaldanbaev, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 18, 352–369 (2010).

[12]A. Kopzhassarova, and A.Sarsenbi, Abstract and Applied Analysis 2012, 1-6 (2012), (Article ID 576843).

[13]Orazov I., Shaldanbaev A,Sh,Shomanbayeva M.About the nature of the spectrum of the periodic problemn for the heat equation with a deviating argument.// Abstract and Applied Analysis. Volume 2013(2013).Article ID 128363,6 pages htt://dx.doi.org/10.1155/2013/128363.

[14].A. Sh. Shaldanbaev, Manat Shomanbayeva, Isabek 0razov,Solution of a singularly perturbed Cauchy problem using amethod of a deviating argument, AIP Conference Proceedings 1676, 020072 (2015); doi: 10.1063/1.4930498

[15]A. Sh. Shaldanbaev, Manat Shomanbayeva, and Asylzat Kopzhassarova,

[16]Solution of a singularly perturbed Cauchy problem for linear systems of ordinary differential equations by the method of spectral decomposition, AIP Conference Proceedings 1759, 020090 (2016); doi: 10.1063/1.4959704.

[17]Ahiezer N.N., Glazman N.M. Teorija linejnyh operatorov v gil'bertovom prostranstve.-M.:Nauka ,1966.,-544s.

[18]Rid M., Sajmon B. Metody sovremennoj matematicheskoj fiziki. T.1-2. – M.: Mir, 1977.

**УДК 517.94**

**Бесбаев Г.А.,[1] Шалданбаев А.Ш.,[1] Акылбаев М.И.[2]**

1Южно-Казахстанский государственный университет, г.Шымкент
[2]Казахстанский инженерно-педагогический университет Дружбы народов, г.Шымкент

# РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ ЗАДАЧИ КОШИ, ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ, ОПЕРАТОРНЫМ МЕТОДОМ

**Аннотация.** В данной работе получено спектральное разложение решении задачи Коши в простанстве с индефинитной метрикой,и с помощью этого разложения выведено погранслойное разложение решении сингулярно возмущенной задачи Коши, для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка $L_\varepsilon y = \varepsilon y''(x) + a y'(x) + by(x) = f(x)$, $a, b$ -*const*, $y(0) = 0, y'(0) = 0$; $f(x) \in L^2(0,1), y(x) \in C^2(0,1) \cap C^2[0,1]$.

**Ключевые слова:** вполне непрерывный оператор,самосопряженный оператор,терема Гилберта – Шмидта,вольтеровые операторы,индефинитная метрика,разложение Шмидта, полнота, ортонормированный базис.