OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 4, Number 314 (2017), 241 – 251

K.B. Jakupov

Institute of mathematics and mathematical modeling, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: jakupovKB@mail.ru

HOOK'S LAW IN THE THEORY OF ELASTICITY OF ANISOTROPIC BODIES

Abstract. From Hook's law, the components of the stress tensor of an anisotropic solid deformable body are derived. The dependence of the second Lame coefficient on the direction is taken into account. The asymmetry of the stress tensor of a solid deformed body is proved. New equations of the anisotropic theory of elasticity are derived. It is shown on a concrete example that the symmetrical half of the incomplete differential of displacement used in the Lame hypothesis and equations, the antisymmetric half of which is discarded, the consequence of which is the symmetry of the stress tensor, leads to absurd physical results. For the new equations, an explicit scheme of the second order of accuracy is constructed, with the use of which the elastic state of a three-layered flat bar is numerically calculated under the action on the upper face of constant tangential and normal stresses. The same scheme is applied to the Lame equations. The obtained pictures of the displacements distribution clearly demonstrate the difference in the solutions of the comparable systems of elasticity equations, as well as the inadequacy of solving the Lame equations for a given state of a deformed body. The falsity of Lame's equations is confirmed theoretically and physically.
Keywords: anisotropic, tension, stress, tensor, equations.

УДК 539.2/.6

К.Б. Джакупов

Институт математики и математического моделирования МОН РК, Алматы, Казахстан

ЗАКОН ГУКА В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ

Аннотация. По закону Гука выводится тензор напряжений анизотропного твердого деформируемого тела. Учитывается зависимость второго коэффициента Ламе от направления. Доказана несимметричность тензора напряжений твердого деформируемого тела. Выведены новые уравнения анизотропной теории упругости. Показано на конкретных распределениях перемещений под действием внешних напряжений, что используемая в гипотезе и уравнениях Ламе симметричная половина неполного дифференциала смещения, антисимметричная половина которого отбрасывается, следствием чего является симметричность тензора напряжений, приводит к абсурдным физическим результатам. Для новых уравнений построена явная схема 2-го порядка точности, которая применена в численных расчетах упругого состояния двуслойного плоского бруска при действии на верхней грани постоянных касательных и нормальных напряжений. Такая же схема применена для уравнений Ламе. Полученные картины распределения смещений наглядно демонстрируют различие решений сравниваемых систем уравнений упругости, а также неадекватность решения уравнений Ламе данному состоянию деформируемого тела. Теоретически и физически подтверждена фальшивость уравнений Ламе.
Ключевые слова: анизотропность, растяжение, напряжения, тензор, уравнения.

1. Касательные напряжения в обобщенном законе Гука

Зако́н Гу́ка — утверждение, согласно которому **деформация** возникающая в упругом теле **пропорциональна** приложенной к этому телу **силе.** Открыт в 1660 году английским учёным Робертом Гуком.

Следует иметь в виду, что закон Гука выполняется только при малых деформациях.

Для многих сред закон Гука неприменим даже при малых деформациях.

Уравнения упругости с несимметричным тензором напряжений **изотропного тела** изложен в [1] по закону Гука: $\mathbf{F} = k\mathbf{u}, k>0, \mathbf{F}_x = u\mathbf{i}, \mathbf{F}_y = v\mathbf{j}, \quad \mathbf{F}_z = w\mathbf{k}, \quad \mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + w\mathbf{k}$ – вектор перемещения, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_x + \mathbf{F}_y + \mathbf{F}_z$ – *внешняя* сила, вызывающая перемещение.

В анизотропных средах, составленных из тел с различными упругими свойствами или в анизотропных телах, свойства которых зависят от направления, закон Гука должен быть типа

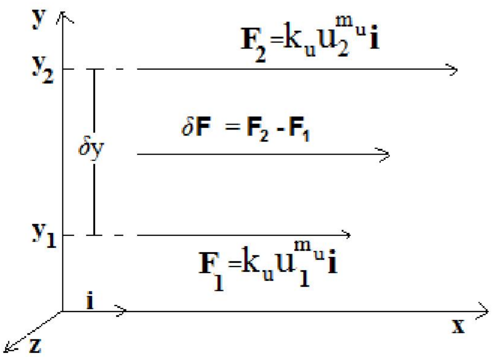
$$\mathbf{F} = k_u u\mathbf{i} + k_v v\mathbf{j} + k_w w\mathbf{k}, \; k_u > 0, k_v > 0, k_w > 0 \tag{1.1}$$

Пусть на плоскости y_1 сила вызывает перемещение по закону Гука $\mathbf{F}_1 = k_u u_1 \mathbf{i}$, также сила $\mathbf{F}_2 = k_u u_2 \mathbf{i}$ образует перемещение на плоскости $y_2 = y_1 + \delta y, \; \delta y > 0$.

Приращения сил и перемещений между плоскостями равны:

$$\delta\mathbf{F} = \mathbf{F}_2 - \mathbf{F}_1 = k_u u_2 \mathbf{i} - k_u u_1 \mathbf{i} = k_u \delta u \, \mathbf{i}, \; \delta u = u_2 - u_1 > 0.$$

Для конкретности положим $|\mathbf{F}_2| > |\mathbf{F}_1|$. В этом случае приращение силы направлено по оси x: $\delta\mathbf{F} \uparrow\uparrow \mathbf{i}$. Вводится линейная плотность $\mathbf{f} = \dfrac{\delta\mathbf{F}}{\delta y}, \quad \delta\mathbf{F} = \delta y \mathbf{f}$. По определению вектор среднего касательного напряжения $\mathbf{p}_{yxcp} = \dfrac{\delta\mathbf{F}}{\delta\sigma}, \delta\sigma = \delta x \delta z$ параллелен и одинаково направлен с силой, вызывающей данное напряжение $\mathbf{p}_{yxcp} \uparrow\uparrow \delta\mathbf{F}, \; \mathbf{p}_{yxcp} \uparrow\uparrow \mathbf{f}$.



Ввод коэффициента пропорциональности образует связи:

$$\mathbf{f} = k'\mathbf{p}_{yxcp}, k'>0, \; \delta y\mathbf{f} = k'\mathbf{p}_{yxcp}\delta y, \; \mathbf{p}_{yxcp} \uparrow\uparrow \mathbf{i}, \; k'\mathbf{p}_{yxcp}\delta y = k_u \delta u\mathbf{i}$$

Данное выражение умножается скалярно на орт $\mathbf{i}$:

$$k'\mathbf{p}_{yxcp}\delta y \cdot \mathbf{i} = k_u \delta u \; \mathbf{i} \cdot \mathbf{i}$$

В результате получаются

$$k'\mathbf{p}_{yxcp}\delta y \cdot \mathbf{i} = k'|\mathbf{p}_{yxcp}|\delta y|\mathbf{i}|\cos 0^o = k' p_{yxcp}\delta y, \; k_u \delta u \; \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = k_u \delta u$$

Равенства

$$k' p_{yxcp}\delta y = k_u \delta u \; , \; p_{yxcp} = \frac{k_u}{k'}\frac{\delta u}{\delta y}$$

в пределе дают касательное напряжение

$$p_{yx}=\lim_{\delta y\to 0}\frac{k_u}{k'}\frac{\delta u}{\delta y}=\mu_u\frac{\partial u}{\partial y},\ \ \mu_u=\frac{k_u}{k'}>0$$

Аналогично касательные напряжения по другим направлениям:

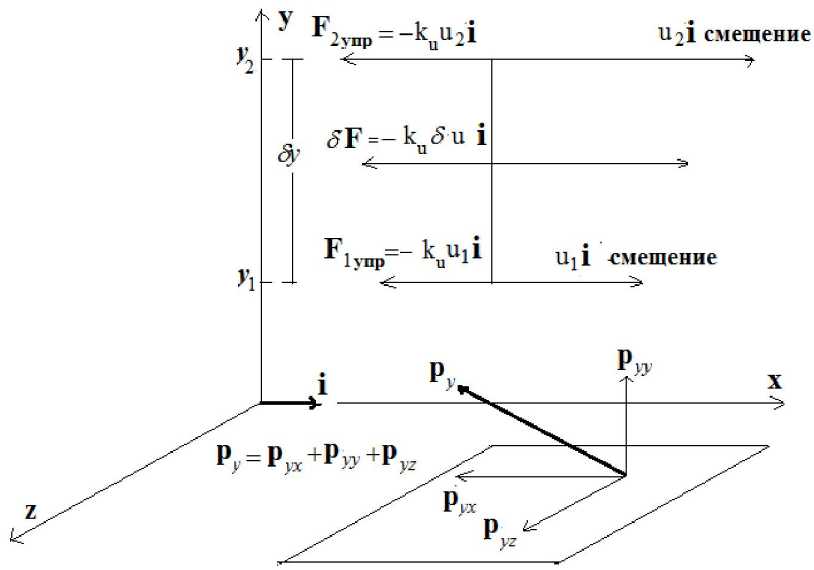
$$p_{xy}=\mu_v\frac{\partial v}{\partial x},p_{zx}=\mu_u\frac{\partial u}{\partial z},p_{xz}=\mu_w\frac{\partial w}{\partial x},p_{yz}=\mu_w\frac{\partial w}{\partial y},p_{zy}=\mu_v\frac{\partial v}{\partial z}$$

Формулы *несимметричных* касательных напряжений выведены для вызывающей растяжение тела *внешней* силы $\mathbf{F}=\mathbf{F}_x+\mathbf{F}_y+\mathbf{F}_z$. Упругая сила в деформируемом теле по третьему закону Ньютона равна внешней со зна- ком минус $\mathbf{F}_{упр}=-\mathbf{F}$. Следовательно, линейный закон Гука для сил упрегости будет иметь вид $\mathbf{F}_{упр}=-k\mathbf{u}, \mathbf{F}_{упр}=-ku\mathbf{i}-kv\mathbf{j}-kv\mathbf{k}$.

Аналогичное представление для анизотропного закона Гука $\mathbf{F}_{упр}=-k_u u\mathbf{i}-k_v v\mathbf{j}-k_w w\mathbf{k}$. Пусть на плоскости y_1 сила вызывает перемещением $\mathbf{F}_{1упр}=k_u u_1\mathbf{i}$, аналогично сила $\mathbf{F}_{2упр}=k_u u_2\mathbf{i}$ на плоскости $y_2=y_1+\delta y,\ \delta y>0$.

Приращения сил и перемещений между слоями равны

$$\delta\mathbf{F}=\mathbf{F}_{2упр}-\mathbf{F}_{1упр}=-k_u u_2\mathbf{i}+k_u u_1\mathbf{i}=-k_u\delta u\,\mathbf{i},\ \delta u=u_2-u_1>0.$$



Допустим $|\mathbf{F}_2|>|\mathbf{F}_1|$, в этом случае приращение силы направлено против оси x: $\delta\mathbf{F}\uparrow\downarrow\mathbf{i}$. Вводится линейная плотность $\mathbf{f}=\delta\mathbf{F}/\delta y,\ \delta\mathbf{F}=\delta y\mathbf{f}$.

По определению вектор среднего касательного напряжения $\mathbf{p}_{yxср}=\frac{\delta\mathbf{F}}{\delta\sigma},\delta\sigma=\delta x\delta z$ параллелен и одинаково направлен с силой, вызывающей конкретное напряжение $\mathbf{p}_{yxср}\uparrow\uparrow\delta\mathbf{F},\ \mathbf{p}_{yxср}\uparrow\uparrow\mathbf{f}$.

Введением коэффициента пропорциональности образуются связи:

$$\mathbf{f}=k'\mathbf{p}_{yxср},k'>0,\ \delta y\mathbf{f}=k'\mathbf{p}_{yxср}\delta y,\ \mathbf{p}_{yxср}\uparrow\downarrow\mathbf{i},\ k'\mathbf{p}_{yxср}\delta y=-k_u\delta u\mathbf{i}$$

Данное выражение умножается скалярно на орт $\mathbf{i}$:

$$k'\mathbf{p}_{yxср}\delta y\cdot\mathbf{i}=-k_u\delta u\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}$$

В результате получаются

$$k'\mathbf{p}_{yxcp}\delta y\cdot\mathbf{i}=k'\left|\mathbf{p}_{yxcp}\right|\delta y\left|\mathbf{i}\right|\cos 180^{o}=-k'p_{yxcp}\delta y,$$

$$-k_u\delta u\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=-k_u\delta u$$

Равенства

$$k'p_{yxcp}\delta y=k_u\delta u,\ p_{yxcp}=\frac{k_u}{k'}\frac{\delta u}{\delta y}$$

в пределе дают касательное напряжение

$$p_{yx}=\lim_{\delta y\to 0}\frac{k_u}{k'}\frac{\delta u}{\delta y}=\mu_u\frac{\partial u}{\partial y},\ \ \mu_u=\frac{k_u}{k'}>0$$

Касательные напряжения по другим направлениям аналогичны:

$$p_{xy}=\mu_v\frac{\partial v}{\partial x},p_{zx}=\mu_u\frac{\partial u}{\partial z},p_{xz}=\mu_w\frac{\partial w}{\partial x},p_{yz}=\mu_w\frac{\partial w}{\partial y},p_{zy}=\mu_v\frac{\partial v}{\partial z}$$

Таким образом, формулы напряжений для внешних сил совпадают с формулами воздействия упругих сил, поэтому дальнейшие выводы делаются только для внешних сил.

2. Связь нормальных напряжений с законом Гука

Аналогичными рассуждениями устанавливается формула составляющей $\mathbf{p}_{xx}^{o}$ нормального напряжения $\mathbf{p}_{xx}=\lambda\mathrm{div}\mathbf{u}\ \mathbf{i}+\mathbf{p}_{xx}^{o}$. Пусть внешние силы равны: $\mathbf{F}_1=k_u u_1\mathbf{i}$ на плоскости x_1 и $\mathbf{F}_2=k_u u_2\mathbf{i}$ на плоскости $x_2=x_1+\delta x,\delta x>0$. Образуются приращения сил и перемещений:

$$\delta\mathbf{F}=\mathbf{F}_2-\mathbf{F}_1=k_u u_2\mathbf{i}-k_u u_1\mathbf{i}=k_u\delta u\ \mathbf{i},\ \ \delta u\ =u_2-u_1>0.$$

По определению напряжений имеют место $\mathbf{p}_{xx\,cp}^{o}=\dfrac{\delta\mathbf{F}}{\delta\sigma},\delta\sigma=\delta y\delta z$ и одинаковая направленность векторов $\delta\mathbf{F}\uparrow\uparrow\mathbf{i}$ в силу $\left|\mathbf{F}_2\right|>\left|\mathbf{F}_1\right|$.

Через линейную плотность

$$\mathbf{f}=\frac{\delta\mathbf{F}}{\delta x},\delta\mathbf{F}=\delta x\mathbf{f},\ \mathbf{f}=k''\mathbf{p}_{xx\,cp}^{0}$$

получаются равенства $\delta\mathbf{F}=k''\delta x\mathbf{p}_{xx\,cp}^{0},\ k''\delta x\mathbf{p}_{xx\,cp}^{0}=k_u\delta u\mathbf{i}.$

Последнее выражение умножается скалярно на орт $\mathbf{i}$:

$$k''\delta x\mathbf{p}_{xx\,cp}^{0}\cdot\mathbf{i}=k_u\delta u\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}$$

Векторы параллельны по структуре $\mathbf{p}_{xxcp}^{0}\uparrow\uparrow\mathbf{i}$.

Поэтому имеют место в скалярных произведениях равенства

$$k''\delta x\mathbf{p}_{xxcp}^{0}\cdot\mathbf{i}=k''\delta x\left|\mathbf{p}_{xxcp}^{0}\right|\cdot\left|\mathbf{i}\right|\cdot\cos 0^{o}=k''\delta xp_{xxcp}^{0},\ \ k_u\delta u\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=k_u\delta u.$$

В результате получается $k''\delta xp_{xxcp}^{0}=k_u\delta u$, откуда $p_{xxcp}^{0}=\dfrac{k_u}{k''}\dfrac{\delta u}{\delta x}$.

В пределе вытекает формула составляющей нормального напряжения

$$p_{xx}^{0}=\lim_{\delta x\to 0}\frac{k_u}{k''}\frac{\delta u}{\delta x}=\mu_u\frac{\partial u}{\partial x},\ \ \mu_u=\frac{k_u}{k''}.$$

Такими же рассуждениями выводятся составляющие нормальных напряжений по другим направлениям:

$$p^{o}_{ii}=\mu_i\frac{\partial u_i}{\partial x_i},\ \ \mu_i=\frac{k_i}{k''},i=1,2,3;\ u_1\equiv u,u_2\equiv v,u_3\equiv w,x_1\equiv x,x_2\equiv y,x_3\equiv z.$$

Такие же формулы нормальных напряжений получаются для сил упругости в твердом деформируемом теле $\mathbf{F}_{упр}=-\mathbf{F}$.

Таким образом, по закону Гука получается *несимметричный* тензор напряжений в анизотропном твердом деформируемом теле:

$$p_{ji}=\delta_{ji}\lambda\mathrm{div}\mathbf{u}+\mu_i\varepsilon_{ji},\ \ \varepsilon_{ji}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j},i,j=1,2,3, \tag{2.1}$$

$\mathbf{u}=u_1\mathbf{i}+u_2\mathbf{j}+u_3\mathbf{k}$ - вектор перемещения. В нормальных напряжениях $\lambda\delta_{ji}\mathrm{div}\mathbf{u}$ по Ламе сохраняется, δ_{ji} - символ Кронеккера.

3. Уравнения теории упругости с несимметричным тензором напряжений анизотропного тела

Элементы тензора деформаций $\varepsilon_{ji}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j},i,j=1,2,3$, непосредственно вытекающие из закона Гука [1], равны коэффициентам неполного дифференциала (3.4).

Несимметричный тензор напряжений анизотропного тела

$$p_{ji}=\delta_{ji}\lambda\mathrm{div}\mathbf{u}+\mu_i\varepsilon_{ji},\ \ \varepsilon_{ji}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j},i,j=1,2,3, \tag{4.1}$$

в уравнениях динамики сплошной среды в напряжениях

$$\rho_0\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\rho_0F_i+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial p_{ji}}{\partial x_j},i=1,2,3$$

дает уравнение

$$\rho_0\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}=\rho_0F_i+\lambda\frac{\partial}{\partial x_i}\mathrm{div}\mathbf{u}+\mu_i\Delta u_i\,,i=1,2,3 \tag{4.2}$$

$$\mu_u=\mu_1,\mu_v=\mu_2,\mu_w=\mu_3.$$

4. О фальсификациях и непригодности уравнений Ламе в теории упругости анизотропных тел

Уравнения упругости твердого деформируемого тела

$$\rho_0\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}=\rho_0\mathbf{F}+(\lambda+\mu)\mathrm{graddiv}\mathbf{u}+\mu\Delta\mathbf{u} \tag{3.1}$$

построены по гипотезе Ламе о *симметричности* тензора напряжений

$$p_{ji}=\lambda\delta_{ji}\mathrm{div}\mathbf{u}+2\mu\varepsilon_{ji},\varepsilon_{ji}=\frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}),p_{ji}=p_{ij,}i,j=1,2,3, \tag{3.2}$$

Гипотеза Ламе заключается в том, что элементы ε_{ji} тензора деформаций ε должны быть равны *удвоенному* симметричному тензору скоростей деформаций, то есть *удвоенной* первой половине искусственной формулы

$$du_i = \sum_{j=1}^{3}[\frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i})+[\frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}-\frac{\partial u_j}{\partial x_i})]dx_j, i=1,2,3, \quad (3.3)$$

(вторая антисимметричная половина (3.3) игнорируется [3-11]).

Формула (3.3) образована из неполного дифференциала смещений

$$\tilde{d}u_i = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dx_j, i=1,2,3, \qquad (3.4)$$

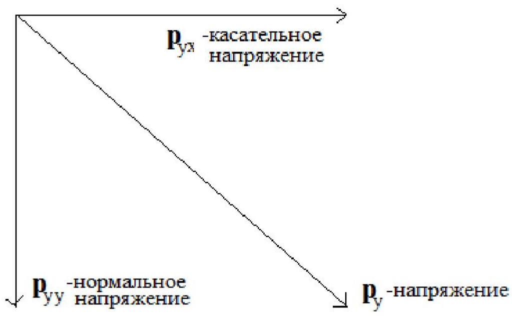
(Полный дифференциал: $d\mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}dt + \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_j}dx_j = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}dt + \tilde{d}\mathbf{u}$).

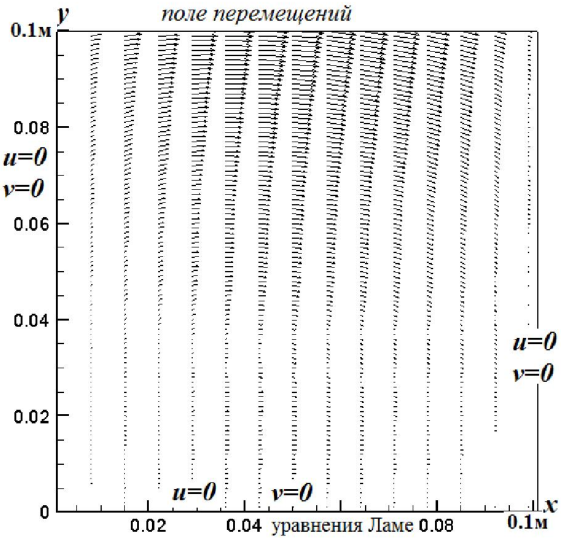
Таким образом, в [3-11] тензор напряжений Ламе (3.2) не соответствует и не вытекает из закона Гука. Очевидно, уже по построению не годится в анизотропных средах.

Изложенный выше метод автора противоположен гипотезе Ламе и физически основан на законе Гука, в точности следует определению, данному С.П. Тимощенко в [2]: «*Основная задача теории упругости заключается в том,* **чтобы по заданным действующим на твердое тело внешним силам** *находить те* **изменения формы,** *которые тело претерпевает, и те* **внутренние силы упругости,** *которые при этих изменениях формы возникают между частями тела*».

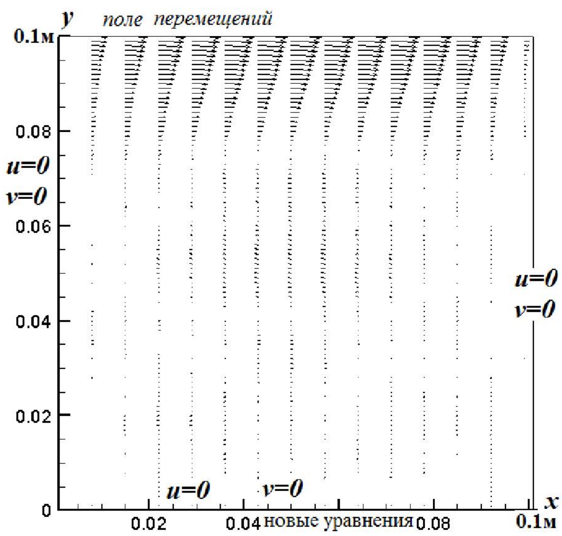
Для сравнения уравнений Ламе (3.1) с новыми уравнениями с несимметричным тензором напряжений в изотропном теле $\mu_u = \mu_v = \mu_w = \mu$:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \rho_0 \mathbf{F} + \lambda \mathrm{graddiv}\mathbf{u} + \mu \Delta \mathbf{u} \qquad (3.5)$$

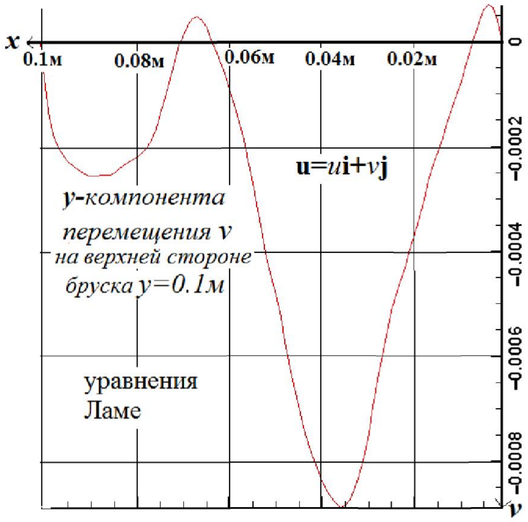




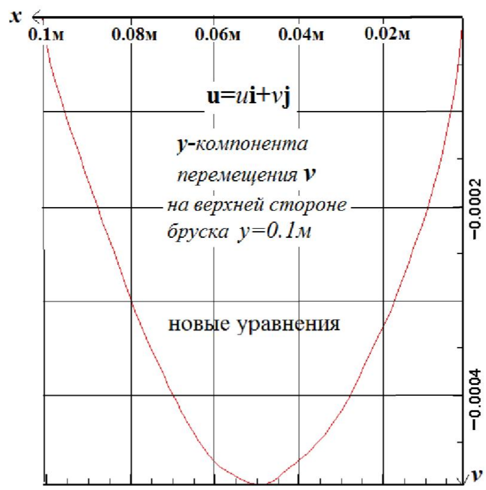
Фигура 1



Фигура 2



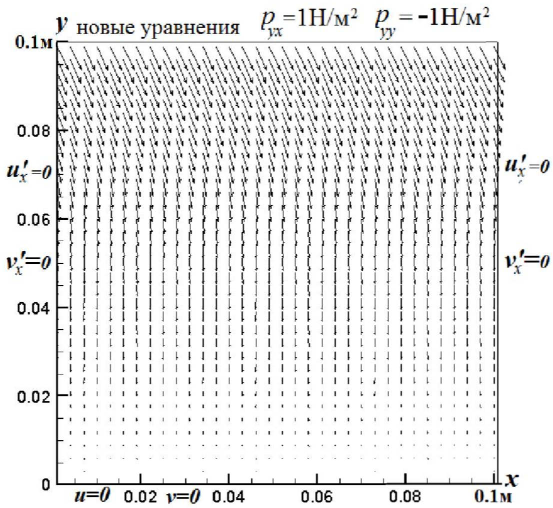
Фигура 3



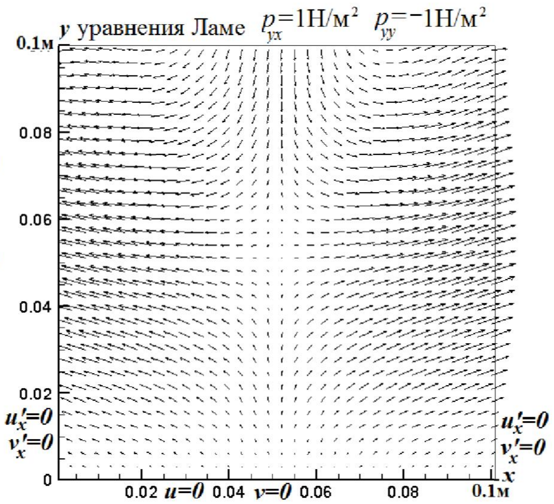
Фигура 4

выполнен расчет перемещений в квадратном деформируемом бруске размером 0.1м на 0.1м.

Вектор внешней силы $\mathbf{p}_y = \mathbf{p}_{yx} + \mathbf{p}_{yy} = p_{yx}\mathbf{i} + p_{yy}\mathbf{j}$ направлен под углом к верхней плоскости бруска. На фиг. 1 и 2 представлены поля векторов перемещений $\mathbf{u} = u\mathbf{i} + v\mathbf{j}$, на фиг. 3 и 4 эпюры поперечной скорости на верхней стороне бруска, всё на момент времени t=121.38 с. Плотность тела $\rho_0 = 7800$кг/м^3. Конкретно положено p_{yy}=-1Н/м^2, p_{yx}=10 Н/м^2. Остальные грани бруска жестко закреплены, смещения на них равны нулю. Коэффициенты Ламе выбраны равными $\lambda = 1$ *кг*/(с^{2}м), $\mu = 100$ *кг*/(с^{2}м). Двумерные уравнения Ламе (3.1) и новые уравнения (3.5) реализованы по явным схемам [2] на сетке 100х100 с шагом по времени равным 0.0005с. Под- тверждено явное различие между численными решениями, в особенности вертикальных перемещений на верхней стороне бруска на фиг. 3 и 4.



Фигура 5



Фигура 6

На фиг. 4 перемещение частиц верхней стороны бруска *y=0.1 м* происходит вниз, что подтверждается отрицательными значениями поперечного перемещения *v* по новым уравнениям. На фиг. 3 по уравнениям Ламе имеются положительные значения поперечной составляющей перемещения, что противоречит направлению действия внешней силы.

На фиг. 5 поле перемещений по новым уравнениям, на фиг. 6 поле перемещений по уравнениям *Ламе*. Напряжения действуют на всей верхней стороне бруска. Результаты фиг. 1 - 6 практически подтверждают фальшивость уравнений *Ламе* с симметричным тензором напряжений.

5. Явная схема уравнений анизотропной теории упругости

Рассматривается задача Коши-Дирихле для новых уравнений

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \rho_0 F_x + \lambda \frac{\partial p}{\partial x} + \mu_u \Delta u,$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \rho_0 F_y + \lambda \frac{\partial p}{\partial y} + \mu_v \Delta v,$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \rho_0 F_z + \lambda \frac{\partial p}{\partial z} + \mu_w \Delta w,$$

$$p = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

с начальными условиями:

$$u\big|_{t=0} = d_u(\mathbf{r}), v\big|_{t=0} = d_v(\mathbf{r}), w\big|_{t=0} = d_w(\mathbf{r}),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = d_{uu}(\mathbf{r}), \frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0} = d_{vv}(\mathbf{r}), \frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0} = d_{ww}(\mathbf{r})$$

и краевыми условиями на границе S:

$$u\big|_S = q_u(\mathbf{r}), v\big|_S = q_v(\mathbf{r}), w\big|_S = q_w(\mathbf{r}),$$

В области интегрирования задается равномерная сетка $\overline{\Omega}_h = \{x_i = ih_x, y_j = jh_y, z_k = kh_k, 0 \le i \le N_x, 0 \le j \le N_y, 0 \le k \le N_z\}$, и сетка по времени $\overline{\Omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0,1,..., N_\tau\}$.

Обозначения сеточных функций: $f_{ijk}^n \equiv f(x_i, y_j, z_k, t_n)$.

Начальные условия задаются во внутренних узлах:

$$u_{ijk}^0 = d_{uijk}, v_{ijk}^0 = d_{vijk}, w_{ijk}^0 = d_{wijk},$$

$$u_{ijk}^1 = d_{uijk} + \tau d_{uuijk}, v_{ijk}^1 = d_{vijk} + \tau d_{vvijk}, w_{ijk}^1 = d_{wijk} + \tau d_{wwijk},$$

$$1 \le i \le N_x - 1, 1 \le j \le N_y - 1, 1 \le k \le N_z - 1$$

краевые условия в граничных узлах.

Явная разностная схема:

$$Q_{uijk}^n = \mu_u [\frac{u_{i-1jk}^n - 2u_{ijk}^n + u_{i+1jk}^n}{h_x^2} + \frac{u_{ij-1k}^n - 2u_{ijk}^n + u_{ij+1k}^n}{h_y^2} +$$

$$+ \frac{u_{ijk-1}^n - 2u_{ijk}^n + u_{ijk+1}^n}{h_z^2} + \rho_0 F_{xijk}],$$

$$Q_{vijk}^n = \mu_v [\frac{v_{i-1jk}^n - 2v_{ijk}^n + v_{i+1jk}^n}{h_x^2} + \frac{v_{ij-1k}^n - 2v_{ijk}^n + v_{ij+1k}^n}{h_y^2} +$$

$$+\frac{v^n_{ijk-1}-2v^n_{ijk}+v^n_{ijk+1}}{h_z^2}+\rho_0 F_{yijk}],$$

$$Q^n_{wijk}=\mu_w[\frac{w^n_{i-1jk}-2w^n_{ijk}+w^n_{i+1jk}}{h_x^2}+\frac{w^n_{ij-1k}-2w^n_{ijk}+w^n_{ij+1k}}{h_y^2}+$$

$$+\frac{w^n_{ijk-1}-2w^n_{ijk}+w^n_{ijk+1}}{h_z^2}+\rho_0 F_{zijk}],$$

$$\rho_0\frac{u^{n+1}_{ijk}-2u^n_{ijk}+u^{n-1}_{ijk}}{\tau^2}=Q^n_{uijk}+\lambda(\frac{u^n_{i-1jk}-2u^n_{ijk}+u^n_{i+1jk}}{h_x^2}+$$

$$+\frac{v^n_{i+1j+1k}-v^n_{i+1j-1k}-v^n_{i-1j+1k}+v^n_{i-1j-1k}}{4h_xh_y}+\frac{w^n_{i+1jk+1}-w^n_{i+1jk-1}-w^n_{i-1jk+1}+w^n_{i-1jk-1}}{4h_xh_z}),$$

$$\rho_0\frac{v^{n+1}_{ijk}-2v^n_{ijk}+v^{n-1}_{ijk}}{\tau^2}=Q^n_{vijk}+\lambda(\frac{v^n_{ij-1k}-2v^n_{ijk}+v^n_{ij+1k}}{h_y^2}+$$

$$+\frac{u^n_{i+1j+1k}-u^n_{i+1j-1k}-u^n_{i-1j+1k}+u^n_{i-1j-1k}}{4h_xh_y}+\frac{w^n_{ij+1k+1}-w^n_{ij+1k-1}-w^n_{ij-1k+1}+w^n_{ij-1k-1}}{4h_zh_y}),$$

$$\rho_0\frac{w^{n+1}_{ijk}-2w^n_{ijk}+w^{n-1}_{ijk}}{\tau^2}=Q^n_{wijk}+\lambda(\frac{w^n_{ijk-1}-2w^n_{ijk}+w^n_{ijk+1}}{h_z^2}+$$

$$+\frac{u^n_{i+1jk+1}-u^n_{i+1jk-1}-u^n_{i-1jk+1}+u^n_{i-1jk-1}}{4h_xh_z}+\frac{v^n_{ij+1k+1}-v^n_{ij+1k-1}-v^n_{ij-1k+1}+v^n_{ij-1k-1}}{4h_zh_y}),$$

$$i=1,\dots,N_x-1, j=1,\dots,N_y-1, k=1,\dots,N_z-1$$

Явная схема имеет погрешность 2-го порядка по всем переменным

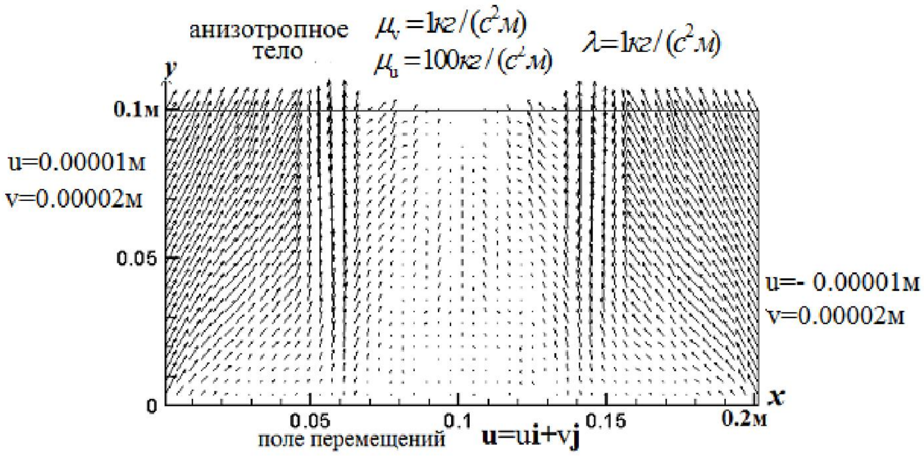
$$O(\tau^2)+O(h_x^2)+O(h_y^2)+O(h_z^2).$$

Устойчивость схемы обеспечивается условием Куранта:

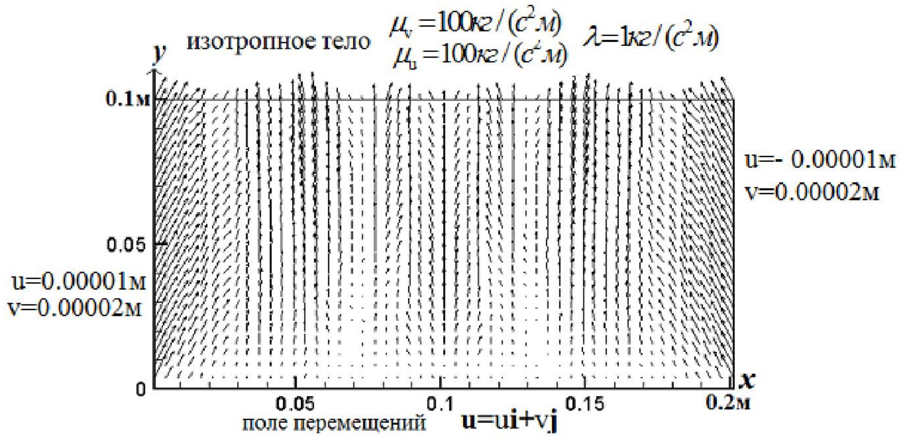
$$\frac{\tau^2\mu}{h_x^2+h_y^2+h_z^2}\le 1,\quad \mu=\max\{\mu_u,\mu_v,\mu_w\}.$$

На фиг.7 представлено поле перемещений в анизотропном теле, на фиг.8 в изотропном теле. На верхней плоскости бруска ставится краевое условие Неймана $\frac{\partial u}{\partial y}=0, \frac{\partial v}{\partial y}=0.$

Очевидно, различие в коэффициентах μ_V приводит к разным полям перемещений, следовательно, к различным полям внутренним напряжениям.



Фигура 7



Фигура 8

Выводы

Физичные выводы нормальных и касательных напряжений доказывают *несимметричность* тензора напряжений в твердом деформируемом теле как для изотропного закона Гука, так и для анизотропного. Конкретные примеры численных расчетаов состояния упругого тела показывают неадекватность и несостоятельность гипотезы о *симметричности* тензора напряжений сплошной среды и соответственно уравнений теории упругости Ламе.

Несимметричность тензора напряжений открывает широкие возможности для моделирований перемещений в твердом деформируемом теле, что пока-зано на примере анизотропного тела фиг. 7.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Джакупов К.Б. Моделирование по закону Гука в теории упругости. Несимметричность тензора напряжений // Известия НАН РК, серия физ.-мат., 6(310), ноябрь - декабрь 2016 г. с.96-103.

[2] Тимошенко С.П. Курс теории упругости.- Киев: «Наукова думка», 1972г.С.503.

[3] Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. - М.: Мир, 1974г. 318с.

[4] Седов Л.И. Механика сплошной среды, т.1. М.: «Наука»,1973г. 315с.

[5].Лурье А.И. Теория упругости. М.: «Наука»,1970г. 984с.

[6] Ильюшин А.А. Механика сплошной среды.М.: Изд-во МГУ, 1978г. 287с.

[7] Ильюшин А.А., Победря Б.Е. Основы математической теории термовязко-упругости. М.: «Наука»,1970г. 547с.

[8] Ilyushin A.A., Lenski V.S. Strength of Materials. N.Y. Pergamon press, 1967.

[9] Eringen A.C. Mechanics of Continua.N.Y. , Wiley, 1967.

[10] Новацкий В. Теория упругости. М.: «Мир», 1975.

[11] Ломакин В.А. Теория упругости неоднородных тел. М.: Изд-во МГУ, 1976.

[12] Джакупов К.Б. Коррекции теоретических парадоксов механики сплошной среды.- Алматы: Изд-во «Ғылым ордасы», 2016г. С.418.

REFERENCES

[1] Джакупов К.Б. Моделирование по закону Гука в теории упругости. Несимметричность тензора напряжений //Известия НАН РК, серия физ.-мат., 6(310), ноябрь - декабрь 2016 г. с.96-103.
[2] Тимошенко С.П. Курс теории упругости.- Киев: «Наукова думка», 1972г.С.503.
[3] Mase G.E. Theory and Problems of Continium Mechanics. M.: "Mir", 1974. P.318.
[4] Sedov L.I. Continuum Mechanics , Vol.1 . M .: "Science", 1973 . P.315.
[5] Lurie A.I. The theory of elasticity . M .: "Science" , 1970 . P.984 .
[6] Ilyushin A.A. Continuum Mechanics sredy.M .: MGU , 1978 . P.287.
[7] Ilyushin AA Pobedria BE Fundamentals of the mathematical theory of thermo – viscoelas ticity . M .: "Science" , 1970 . 547s .
[8] Ilyushin A.A., Lenski V.S. Strength of Materials. N.Y. Pergamon press, 1967 .
[9] Eringen A.C. Mechanics of Continua.N.Y. , Wiley, 1967 .
[10] Nowacki W. Theory of Elasticity . M .: "Mir" , 1975.
[11] Lomakin V.A .Theory of elasticity of inhomogeneous bodies . M.: MGU , 1976.
[12] Jakupov K.B. Correction of continuum mechanics theoretical paradoxes – Almaty: publishing house «Ғылым ордасы», 2015г. P.376.

ӘОЖ: 539.2/.6

К.Б. Жақып-тегі

Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан

ГУКТЫҢ ЗАҢЫ АНИЗОТРОПТЫҚ ДЕНЕЛЕРДІҢ СЕРПІЛІМДІК ТЕОРИЯСЫНДА

Аннотация. Тікелей Гук заңымен анизотроптық қатты майысқақ денелердің кернеулер тензорының компоненттері шығарылған. Ламенің екінші еселеушінің бағыттан тәуелділігі есептелген. Майысқақ қатты дененің серпілімдік теориясының кернеулер тензорының беттеспегендігі дәлелденген. Осыған сәйкес анизотроптық майысқақ қатты дененің серпілімдік теориясының теңдеулері жасалынған. Ламе гипотезасында толық емес жылжу дифференциалының беттескен жартысы қана пайдаланғаны көрсетілген, екінші антибеттескен жартысы лақтырылынған, соның салдарынан Ламе кернеулер тензорының беттескендігі шыққан. Жаңа теңдеулер үшін 2 ретті нақтылығы бар айқын схема жасалынған, соны пайдаланып жазық жолақтың серпілімдік күйі саналған, үстіңгі жақтауының ортасыны жанама кернеулер және тік кернеулер әсер еткенде. Дәл сондай схема Ламе теңдеулеріне де қолдалынған. Саналған жылжулардың үлестірулік суреттері салыстырынып жатқан теңдеулердің айырмашылықтарын бейнелейді және Ламе теңдеу- лерінің майысқақ қатты дененің күйіне сәйкес еместігін көрсетеді. Ламе теңдеулерінің жалғандығы теориялық және физикалық тұпатта бекітілген.

Түйін сөздер: анизотроптылық, созылу, кернеулер, тензор, теңдеулер.

Сведения об авторе:
Джакупов Кенес Бажкенович - доктор физико-математических наук, профессор, член-корреспондент Российской Академии Естествознания,
Служебный адрес: РГП Институт математики и математического моделирования КМ МОН РК, 050010, ул.Пушкина,125, г.Алматы, Казахстан,
Домашний адрес: *050014, мкр. Айнабулак-3, д.158, кв. 20, г.Алматы, Казахстан*
Контактные телефоны: 8 727 305 92 44, +7 701 667 88 59, Адрес электронной почты: E-mail: jakupovKB@mail.ru