**N E W S**
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**
ISSN 1991-346X
Volume 5, Number 315 (2017), 91 – 100

**K. Baktybaev[1], M.K. Baktybaev,[2] D.D.Naukenov[2], A.Dalelkhankyzy[3]**

[1]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan;
[2]Kazakh National Research Technical University named after K.I.Satpaev, Almaty, Kazakhstan;
[3] Almaty university of power engineering and telecommunications, Almaty, Kazakhstan
darmen.naukenov@mail.ru; dalelkhankyzy.d@gmail.com

# MICROSCOPIC JUSTIFICATION OF THE MODEL OF INTERACTING BOSONS AND A GENERELIZEDQUASISPIN FORMALISM IN THE THEORY OF THE NUCLEI

**Abstract.** A relatively simple microscopic theory of the justification of the phenomenological model of interacting bosons of collective excitation of nuclear systems is proposed, in which detailed calculations of the parameters of the phenomenological model are made on the basis of a generalized fermion quasispin formalism (GQF).This formalism makes it possible to extract the most necessary $S-D$pair part from the huge shell space, in which the collective states of the fermion systems are constructed by the action of single-particle and specified pair forces between nucleons. The use of the generalized quasispin method made it possible to solve exactly the many-particle problems for fermion systems with a certain number of particles and with given internucleon forces. The operators of the equations include quantities reflecting the nonuniform distribution of nucleons over various nondegenerate$j-$ shells, which give a consistent description of the properties of real nuclei. The application of the method to a system of interacting fermions greatly facilitates the exact solution of problems with certain symmetric-model Hamiltonians and to calculate the selectable parameters of the boson theory of collective nuclear states through the matrix elements of the fermion operators of the interaction of nucleons in the system. The separation from the complete fermionic space of $S-D$pairwise collective domains simplifies the procedure for calculating the matrix elements of the operators of the problem, expressing many-particle integrals by calculating simple two-particle ones.

The theory is applied to the study of the structure and properties of the collective states of even neodymium isotopes$^{132-138}Nd$, which were also interpreted in the model of interacting bosons. The pair interactions of nucleons are determined from the description of the spectra of the excited states of the nuclei under study. The tensor part of the pair interaction is neglected because of their smallness in comparison with the Wigner and singlet parts of them. The values of pair interactions of nucleons turned out to be close to the values of the corresponding parameters for heavy nuclei obtained in earlier studies.Using the obtained wave functions of nuclear states, the reduced probabilities of electromagnetic $E2-$ transitions between the levels of like and dissimilar bands of the spectrum are calculated. The ratios of the probabilities of transitions between different states are also calculated. The results of the calculations, both from the spectra and from the probabilities of gamma transitions between the levels, were compared with their experimental values. Discussion of the results of the calculation with experimental data for even neodymium isotopes was carried out.

**Key words:** atomic nucleus, nucleons, energies, operators, wave functions, transition probabilities.

**К. Бактыбаев[1], М.К. Бактыбаев[2] , Д.Д Наукенов[2], А. Далелханкызы[3]**

[1] Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан;
[2]Казахский национальный исследовательский технический университет им.К.И.Сатпаева, Алматы, Казахстан;
[3]Алматинский университет энергетики связи, Алматы, Казахстан

# МИКРОСКОПИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ МОДЕЛИ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ БОЗОНОВ И ОБОБЩЕННЫЙ КВАЗИСПИНОВЫЙ ФОРМАЛИЗМ В ТЕОРИИ ЯДРА

**Аннотация.** Предлагается относительно простая микросткопическая теория обоснования феноменологической модели взаимодействующих бозонов коллективного возбуждения ядерных систем, в которой производятся детальные вычисления параметров феноменологической модели на основе обобщенного фермионногоквазиспинового формализма (ОКФ). Этот формализм позволяет выделить из огромного оболочечного пространства самую необходимую $S-D$ парную ее часть, в которой действием одночастичных и заданных парных сил между нуклонами строятся коллективные состояния фермионных систем. Использование метода обобщенного квазиспина дало возможность точно решить многочастичные задачи для фермионных систем с определенным числом частиц и с заданными межнуклонными силами. В операторы уравнений входят величины отражающие неравномерное распределение нуклонов по разным невырожденным $j$ −оболочкам, что дают последовательное описание свойств реальных ядер. Применение метода к системе взаимодействующих фермионов намного облегчает точное решение задач с некоторыми симметрично-модельными гамильтонианами и вычислить выбираемые параметры бозонной теории коллективных состояний ядер через матричные элементы фермионных операторов взаимодействия нуклонов в системе. Выделение из полного фермионного пространства $S-D$ парные коллективные области упрощает процедуру вычисления матричных элементов операторов задачи, выражая многочастичные интегралы посредством вычисления простых двухчастичных.

Теория применяется к изучению структуры и свойств коллективных состояний четных изотопов неодима $^{132-138}Nd$, которые также были интерпретированы в модели взаимодействующих бозонов. Парные взаимодействия нуклонов определены из описания спектров возбужденных состояний изучаемых ядер. При этом тензорная часть парного взаимодействия пренебрежены из-за их малости по сравнению с вигнеровской и синглетной их частями. Величины парных взаимодействий нуклонов оказались близкими к значениям соответствующих параметров для тяжелых ядер, полученным в более ранних работах. Используя полученные волновые функций состояний ядер вычислены приведенные вероятности электромагнитных $E2-$ переходов между уровнями одноименных и разноименных полос спектра. Также вычислены отношения вероятностей переходов между различными состояниями. Результаты вычислений, как по спектрам так и по вероятностям $\gamma-$ переходов между уровнями были сравнены с их экспериментальными значениями. Проведены обсуждения результатов расчета с экспериментальными данными для четных изотопов $Nd$.

**Ключевые слова:** атомное ядро, нуклоны, энергии, операторы, волновые функций, вероятности переходов.

## I. Введение

Несмотря на сложность и малоизученность сил взаимодействия, атомные ядра как система, состоящая из большого числа нуклонов, по своим низколежащим спектрам проявляют относительно простую структуру. Многие закономерности состояний ядер были описаны оболочечной моделью при помощи волновых функций нуклонов, движущихся независимо друг от друга, в центральном статическом потенциале. Когда число валентных нуклонов растет, приходится учесть остаточные взаимодействия между ними, для того, чтобы описать коллективные состояния в спектре систем. Такие коллективные полосы состояний, лежащие в низких энергетических областях ядер тяжелого и среднего атомного веса, успешно описываются феноменологической моделью взаимодействующих бозонов $[МВБ][1,2]$. В феноменологических вычислениях параметры МВБ обычно выбираются удобным способом, чтобы получить лучшее описание состояний ядер, в которых параметры теории меняются плавно. Были предприняты некоторые попытки вычислить модельные параметры МВБ из определенных детальных микроскопических подходов $[3-9]$. Во многих из них производилось обрезание полногооболочечно-модельного пространства и замена его $S-D$ парной областью и использование некоторых модельных взаимодействий между нуклонами.

В представленной работе предлогается детальное микроскопическое вычисление параметров МВБ на основе обобщенного квазиспинового формализма(ОКФ), в котором модельное $S-D$ парное оболочечное пространство описывается квантовым числомобобщенной сеньорити и с заданными межнуклонными силами.

Известно, что обычный квазиспиновый формализм дает весьма приближенное описание структуры и свойств реальных ядер. Собственные функции и собственные значения гамильтониана в этой модели являются довольно грубым приближением к точным решениям уравнения Шредингера. Это связано не только с сильной идеализацией существующих ядерных сил, но и также с схематическим распределением нуклонов по вырожденным $j$ −оболочкам с равными амплитудами вероятностей.

В предлагаемом методе данной работы указанные недостатки устраняются введением новых обобщенных квазиспиновых операторов взаимодействия, более адекватно описывающих реальные свойства существующих ядер. В эти операторы входят величины отражающие неравномерное распределение нуклонов по разным невырожденным $j-$ оболочкам. В то же время обобщенные квазиспиново-групповые свойства этих операторов не теряют своих простых и привлекательных черт, присущих обычной схеме квазиспина.

Использование этого метода, называемого в дальнейшем обобщенным квазиспиновым формализмом (ОКФ), дало возможность точно решить многочастичные задачи, для фермионных систем с определенным числом частиц и с заданными межнуклонными силами. Здесь он применяется к расчету и обьяснению структуры многочастичных состояний реальных ядерных систем. Применительно к системе взаимодействующих бозонов метод ОКФ намного облегчает точное решение задач с некоторыми симметрично-модельными гамильтонианамии вычислить выбираемые параметры бозонной теории через матричные элементы фермионных операторов взаимодействия. Введение в таких расчетах понятия обобщенного квазиспина позволяет выделить из полного фермионного пространства $S-D$парные коллективные и квазичастичные его области. А это в свою очередь, облегчает процедуру вычисления матричных элементов операторов взаимодействия через нуклонные парные силы.

**II. Метод обобщенного квазиспина**

Излогая метод расчета, сначала введем понятия обобщенногоквазиспинового пространства и двойные тензора в таком пространстве. С помощью этих тензоров легко находятся собственные значения и собственные функции физических операторов в квазиспиновом(S)пространстве. Этот метод позволяет выразить многочастичные матричные элементы через двухчастичные. Такие формулы, как известно называются редукционными.

Известно,что оператор рождения частицы $a^{+}_{jm}$является сферическим тензорным оператором полуцелого ранга $j$ в пространстве углового момента. Тогда тензорные произведения этих операторов определяются в виде:

$$A^{+}(j_1j_2;JM)=(1+\delta_{j_1j_2})^{-1/2}\left[a^{+}_{j_1m_1}a^{+}_{j_2m_2}\right]^{(J)}_{M},$$

$$\tilde{A}(j_1j_2;JM)=-(1+\delta_{j_1j_2})^{-1/2}\left[\tilde{a}_{j_1j_1}\tilde{a}_{j_2j_2}\right]^{(J)}_{M}, \qquad (2.1)$$

$$U(j_1j_2;JM)=\left[a^{+}_{j_1m_1}\tilde{a}_{j_2j_2}\right]^{(J)}_{M}$$

С помощью этих операторов записываются все виды двухчастичного взаимодействия:

$$V=\sum_{j_1j_2j_3j_4}\sqrt{2J+1}G_J(j_1j_2j_3j_4)\left[A^{+}(j_1j_2J)\tilde{A}(j_3j_4J)\right]^{(0)}_{0}, \qquad (2.2)$$

где $G_J(j_1j_2j_3j_4)=\left(1+\delta_{j_1j_2}\right)\left(1+\delta_{j_3j_4}\right)/4\cdot\langle j_1j_2;J|V|j_3j_4J\rangle.$ (2.3)

Из трех тензорных операторов образуем обобщенную квазиспиновую группу:

$$S_{+}=\sum_j\alpha_jS_j^{+};S_{-}=\sum_j\frac{1}{\alpha_j}S_j^{-};S_0=\sum S_j^0=\frac{N-\Omega}{},\qquad (2.4)$$

$$[S_{+},S_{-}]=2S_0,\ [S_0,S_{\pm}]=\pm S_{\pm}\qquad (2.5)$$

где $\alpha_j$ –некоторые постоянные величины, определяющие амплитуды вероятностей заселения орбит $N=\sum_j N_j$ , $\Omega=\sum_j\alpha_j\Omega_j$ , $\Omega_j=j+1/2$

Эти три обобщенные квазиспиновые операторы $S_0,S_{\pm}$ также обладают коммутационными свойствами обычных квазиспиновых операторов и являются генераторами алгебры Ли. Как видно из (2.5) обобщенные квазиспиновые операторы состоят из обычных квазиспиновых операторов$S_j^{\pm},S_j^0$.

$$S_j^{+}=\sqrt{\Omega}A^{+}(j_1j_2;00);S_j^{-}=\sqrt{\Omega}\tilde{A}(j_1j_2;00),S_j^0=\frac{1}{2}(N^j-\Omega^j)\qquad (2.6)$$

где $N^j=\sum_m a^{+}_{jm}a_{jm}=\sum(-)^{j-m}a^{+}_{jm}\tilde{a}_{j-m}$.

В случае $\alpha_j = 1$ из равенств (2.4) и (2.5) получаем обычную вырожденную квазиспиновую группу. Все группы (2.4) и (2.5) являются изоморфными друг-другу. По этому представление любой группы (2.5) будет эквивалентно представлению обычной вырожденной группы. Тогда если через $R$обозначить преобразование, переводящее базисы обычной квазиспиновой группы $|\varphi_i\rangle$в базисы обобщенной группы $|\Psi_i\rangle$, то

Можно также выполнить преобразование операторов из одного базиса в другой, например для одночастичных операторов:

$$C_{jm}^{+} = Ra_{jm}^{+}R^{-1} = \sqrt{\alpha_j}a_{jm}^{+}, \quad (2.7)$$
$$C_{jm} = Ra_{jm}R^{-1} = \frac{1}{\sqrt{\alpha_j}}a_{jm},$$

и должно выполняться равенство $C_{jm}^{+} = (C_{jm})^{+}$, в котором + означает операции эрмитового сопряжения с одновременной заменой $\sqrt{\alpha_j}$ на $\frac{1}{\sqrt{\alpha_j}}$ во всех фермионных операторах. Эти операторы , теперь выражаются через произведения новых $C_{jm}$.

Из-за изоморфности всех групп (2.4) и (2.5) при любых значениях $\alpha_j$в обобщенном квазиспиновом формализме также можно ввести полный оператор обобщенногоквазиспина$S$:

$$S^2 = S_+S_- + S_0^2 - S_0 \quad (2.8)$$

Новые обобщенные операторы удовлетворяют таким же коммутационным соотношениям , каким подчиняются операторы угловых моментов , т.е. свойства операторов квазиспина и углового момента аналогичны. Векторы состояний характеризуются новыми квантовыми числами $s$ и $s_0, = -s, -s+1, \dots s$ ,которые определяют собственные значения операторов полного квазиспина$S$ и его проекции $S_0$. Теперь эти числа и образуют обобщенное квазиспиновое пространство, волновые функций которого обозначим $|s, s_0, q\rangle$. Используя правила коммутации (2.5), получим:

$$S_-|s, s_0, q\rangle = const|J, J_0 - 1, q\rangle, \quad (2.9)$$

$$S_-|s, s_0, q\rangle = const|J, J_0 + 1, q\rangle$$

$S_-|s, s_0 = -s, q\rangle$ =0(2.10). Последнее равенство (2.10) означает, что в данном состоянии с $s_0 = -s$, $N = \Omega - 2s$. Значения квантовых чисел $s_0$ и $s$ определяются также альтернативными числами обобщенной сеньерити $v$и полного числа нуклонов $N$с помощью соотношений:

$$s = \frac{1}{2}(\Omega - v), s_0 = \frac{1}{2}(N - \Omega) \quad (2.11)$$

Квантовое число $v$ определяет число неспаренных частиц в состоянии с обобщенным квазиспином $s$. Если в системе все частицы спарены, то $v = 0$ и $s = \Omega/2$. В полном неспаренном состоянии $v = \Omega$ а обобщенный квазиспин $s = 0$. Таким образом, обобщенный квазиспин приобретает смысл квантового числа, классифицирующего состояния системы по их трансформационным свойствам по отношению к вращениям системы координат в квазиспиновом пространстве.

Гамильтониан спаривательного взаимодействия

$$H_s = \varepsilon N - GS_+S_- \quad (2.12)$$

также диагонален в представлении обобщенного квазиспина как и в обычном квазиспиновом пространстве. Собственные значения $H_s$:

$$E_s(N, v) = \varepsilon N - \frac{G}{4}(N - v)(2\Omega + 2 - N - v) \quad (2.13)$$

согласуется с выводами метода обобщенной сеньерити обычного квазиспина. [10,11]. Волновые функции основного состояния для системы $N$ четных частиц:

$$\left|s = \frac{\Omega}{2}, s_0, J = 0, M = 0\right\rangle = K_{n,0}^{\Omega}(S_+)^n|0\rangle, \quad (2.14)$$

волновые функции возбужденных состоянии с $JM$:

$$|s, s_0, JM\rangle = K^{\Omega}_{n,v}(S_+)^n \big|J, J_0^{'} = -J, JM\big\rangle, \tag{2.15}$$

где $n = \frac{1}{2}(N - v)$число спаренных частиц и $K^{\Omega}_{n,v}$ –нормировочные константы, которые вычисляются из условия нормировки волновых функций.

$$(K^{\Omega}_{n,n})^2 = \{\langle s, -s, JM|(S_-)^n(S_+)^n|s, -s, JM\rangle\}^{-1}.$$

Хотя, в общем случае $\alpha_j \neq 1$оператор $H_s$ неэрмитов, его собственные значения вещественные, по форме формально совпадают с собственными значениями $H_s$ в обычном квазиспиновом пространстве. Но все физические величины здесь определяются посредством постоянных $\alpha_j$, описывающих вероятности распределения частиц по невырожденным состояниям.

## III. Задача с полным гамильтонианом в представлении обобщенногоквазиспина

Рассмотрим многочастичную задачу в пространстве обобщенного квазиспина с произвольным оператором парного взаимодействия. Полный гамильтониан в этом случае удобно разбить на две части, выделив из него спаривательное взаимодействие $H_s$, в представлении обобщенного квазиспина: $H = H_s + W$,где $W$ – оператор, выражающий остальную часть взаимодействия частиц, но диагональную в представлении обобщенного квазиспина

$$W = \sum_{j_1 j_2 j_3 j_4} \langle j_1 j_2 J|V^{'}|j_3 j_4 J\rangle A_+(j_1 j_2 JM) A_-(j_3 j_4 JM) \tag{3.1}$$

Тогда задача на собственные значения полного гамильтониана $H$, диагонального в $s$ –представлении сводиться к решению уравнения

$$H|s, s_0, q\rangle = E(n = s + s_0, v = \Omega - 2s, q\,)|s, s_0, q\rangle. \tag{3.2}$$

Полная энергия системы также делится на две части:

$$E(n, v, q) = E_s(N = 2n + v, v) + E^{'}(n, v, q), \tag{3.3}$$

где $E_s$ –собственные значения спаривательной части гамильтониана $H_s$.

Найдем условия, при которых полный гамильтониан $H$ будет диагонален в представлении обобщенного квазиспина. Для этого достаточно , чтобы функции (2.15) были собственными функциями оператора $W$:

$$W|s, s_0, q\rangle = E^{'}(n, v, q)|s, s_0, q\rangle. \tag{3.4}$$

Это уравнение можно свести к нескольким легко решаемым, независящим от$n$ уравнениям. Для этой цели рассмотрим коммутатор:

$$[W, S_+] =$$
$$2\sum \langle j_1 j_2 J|V^{'}|j_3 j_4 J\rangle A_+(j_1 j_2 JM)\{\frac{\sqrt{\Omega^{j_3}}\alpha j_3 \delta^{00}_{JM}}{\sqrt{2}} - (-)^{J-M}\alpha j_3 T^J_{-M}(j_3 j_4) + (-)^{j_3+j_4-M}\alpha J_4 T^J_{-M}(j_4 j_3)\} \tag{3.5}$$

где

$$T^J_M(jj^{'}) = (2\sqrt{1+\delta_{jj^{'}}})^2 \sum_{mm^{'}}(jj^{'}m - m^{'}/JM) c^+_{jm}\tilde{c}_{j^{'}m^{'}} \tag{3.6}$$

одночастичный оператор, удовлетворяющий соотношениям:

$$\left[T^J_M(jj^{'}), S^{j^{''}}_+\right] = 2\delta_{jj^{''}} A_+(jj^{'}JM). \tag{3.7}$$

Этот оператор разрывает пару частиц в состоянии $S_+|0\rangle$ и переводит их в возбужденное состояние $A_+\big(jj^{'}JM\big)$. Кроме того введем оператор рождения $v$ неспаренных частиц с общим угловым моментом $J$:

$$Q^+(v, JM)|0\rangle = \sum_j \gamma^{v,J}_j\, Q^+(j^v JM)|0\rangle. \tag{3.8}$$

Из условия нормировки волновых функций имеем: $\sum_j (\gamma^{v,J}_j)^2 = 1$

Тогда уравнение (3,4) можно переписать в виде:

$$W(S_+)^n Q^+(v,JM)|0\rangle = E'(n,v,J)(S_+)^n Q^+(v,JM)|0\rangle \tag{3.9}$$

Это уравнени будет удовлетворено, если только выполняются равенства:

$$\big[[W,S_+],Q^+(v,JM)\big] = \lambda(v,J)S_+Q^+(v,JM)$$
$$WQ^+(v,JM)|0\rangle = E'(0,v,J)Q^+(v,JM)|0\rangle$$
$$E'(n,v,J) = E'(0,v,J) + n\lambda(v,J)$$

В итоге условия диагонализации полного гамильтониана $H = H_s + W$в $s-$ представлении сведется к решению системы уравнений

$$HS_+|0\rangle = E_0 S_+|0\rangle$$

$$\big[[H,S_+],S_+\big] = 2G(S_+)^2$$

$$HQ^+(v,JM)|0\rangle = E(v,J)Q^+(v,JM)|0\rangle, \tag{3.10}$$
$$\big[[H,S_+],Q^+(v,JM)\big] = (vG + \lambda(v,J))S_+Q^+(v,JM),$$

где $E_0 = E_s(N = 2, v = 0) = 2\varepsilon - G\Omega$полная энергия системы определяется равенством (3.3).

Таким образом, решение задачи с полным гамильтонианом $H$ приводит к снятию вырождения состояний по угловому моменту $J$ в мультиплетах, характеризующихся квантовым числом обобщенной сеньорити$v$,положения которых линейно зависят от числа пар $n$ в системе.

Как было отмечено, квазиспиновый метод позволяет выразить многочастичные матричные элементы через двухчастичные. В частности, важно выразить $N$ —частичные матричные элементы через матричные элементы частиц с сеньорити$v$. Существуют редукционные формулы определяющие сложные матричные элементы физических операторов через их выражения зависящие от числа частиц $n$ и $v[11-13]$. Для этого операторы $a_{jm}^+$и $\tilde{a}_{jm}$записываются как компоненты двойного сферического и неприводимого тензора рангов ½ и $j$ в пространствах как угловых моментов так и квазиспинов, т.е

$$T_{1/2,m}^{(1/2,j)} = a_{jm}^+ \tag{3.11}$$

$$T_{1/2,m}^{(1/2,j)} = \tilde{a}_{jm}$$

Операторы, состоящие из произведений $a^+$и $a$ можно выразить через введенные двойные тензора $T$. Например, для случая $k$ —четных чисел имеем

$$T_{1q}^{(1,k)}(jj) = A^+(jjkq)$$

$$T_{-1,q}^{(1,k)}(jj) = -\left\{U(jjkq) + \sqrt{\frac{\Omega}{2}}\delta(k,0)\right\} \tag{3.12}$$

$$T_{-1q}^{(1,k)}(jj) = \tilde{A}(jjkq)$$

Любой одночастичный оператор$\sum_i f_i^{(k)}$пропорционален двойному тензору $k$ —ранга в обычном и первого ранга в квазиспиновом пространстве$T^{(1,k)}(jj)$ если он векторный потенциал, а если же он скалярный, то он пропорционален двойному тензору $T^{(0,k)}(jj)$. Поэтому, для скалярного одночастичного потенциала пишем:

$$< j^n v\alpha J \| \sum_i f_i^{(k)} \| j^n v' \alpha' J >= \delta_{vv'} < j^v v\alpha J \left\| T_{0,q}^{(0,k)} \right\| j v' \alpha' J' >,$$

а для векторного потенциала:

$$< j^n v\alpha J \| \sum_i f_i^{(k)} \| j^n v' \alpha' J >= \frac{f_{10}(n)}{f_{10}(v)} < j^v v\alpha J \left\| T_0^{(1,k)} \right\| j^v v' \alpha' J' >, \qquad (3.13)$$

где $v' = v, v+2, f_{10}(n) = ((\Omega - v)/2, 1, (n-\Omega)/2, 0 | (\Omega - v)/2, (n-\Omega)/2)$, $f_{10}$ –коэффициент Клебша-Гордона.

Аналогичным путем можно вычислить двухчастичные матричные элементы, используя двойные тензора. Такие формулы записываются для скалярных двухчастичных операторов парного взаимодействия, которые выражаются через двойные тензора в виде:

$$V' = -\sum_J \sqrt{2J+1} G_J \left[ T_{(jj)}^{(1,J)} \times T_{(jj)}^{(1,J)} \right]_{00}^{(\lambda,0)} (111-1|\lambda 0),$$

где $G_J = \langle j^2 J | V | j^2 J \rangle$ , $\lambda = 0,1,2$ – определяют ранги тензоров в $s$ –пространстве.

Диагональные по сеньорити $v$ матричные элементы этого оператора равны:

$$\langle j^n v\alpha J | V | j^n v\alpha' J \rangle = \left\langle j^n v\alpha J \middle| T_0^{(0)} \middle| j^n v\alpha' J \right\rangle + \frac{f_2(n)}{f_2(v)} \left\langle j^n v\alpha J \middle| T_0^{(2)} \middle| j^n v\alpha' J \right\rangle - (n-\Omega) F_0, \qquad (3.14)$$

где $f_2(n) = ((\Omega - v)/2, 2, (n-\Omega)/2, 0 | (\Omega - v)/2, (n-\Omega)/2)$ –коэффициент Клебша- Гордона и $F_0 = \frac{1}{2\Omega} \sum_J (2J+1) G_J$.

Оператор мультиполь-мультипольного взаимодействия часто записывается в феноменологической форме:

$$V_\lambda = (2\lambda + 1) K^\lambda \sum_{i<j} (U_i^{(\lambda)} \cdot U_j^{(\lambda)}) \qquad (3.15)$$

в которой $K^\lambda = const$ и $U_i^{(\lambda)}$ – единичный сферический тензор. Если число $\lambda$ нечетно, то $V_\lambda$ –квазиспиновый скаляр, поэтому, он выразится через $T^{(0,\lambda)}$:

$$V_\lambda^{неч} = \frac{1}{2} (2\lambda+1)^{-3/2} \cdot K^\lambda \cdot (-)^\lambda \left[ T^{(0,\lambda)} \times T^{(0,\lambda)} \right]^{(0,0)} - \frac{N}{4\Omega} K^\lambda (2\lambda + 1)$$

Тогда матричный элемент этого оператора легко выразится линейно по квантовому числу $n$:

$$\langle j^n v\alpha J | V^{неч} | j^n v\alpha' J \rangle = \delta_{vv'} \left[ \frac{1}{2} (n-v) G_0 \delta_{\alpha\alpha'} + \langle j^v v\alpha J | V^{неч} | j^v v\alpha \ \ J \rangle \right] \qquad (3.16)$$

В случае четного $\lambda$ оператор мультипольного взаимодействия содержит квазиспиновые скалярные и тензорные части:

$$V^{чет} = \frac{1}{4} \sum_{\lambda \neq 0} K^\lambda (-)^\lambda \left[ T^{(1,\lambda)} \times T^{(1,\lambda)} \right]^{(0,0)} - \frac{N}{4\Omega} \sum_\lambda (2\lambda+1) K^\lambda \qquad (3.17)$$

Потенциал парного нуклон-нуклонного взаимодействия выбран в простейшем виде:

$$V(1,2) = (U_\omega + U_s \pi_s + U_\tau S_{12}) f(r, r_0) + U_c \ , \qquad (3.18)$$

в котором $U_\omega$,$U_s$,$U_\tau$ – параметры Вигнеровских, синглерных и тензорных сил, $\pi_s$ и $S_{12}$ – операторы синглерного и тензорного проектирования; $f(r, r_0)$ – радиальная зависимость ядерных сил, выбранная в виде потенциала Гаусса, $U_c$ –Кулоновский потенциал. Парный потенциал нуклонных взаимодействий состоит из трех частей: $V = V_{pp} + V_{nn} + V_{np}$ ,взаимодействия одноименных нуклонов и нейтрон-протонной части.

**IV. Применение метода к изучению структуры четных изотопов неодима $^{132-138}Nd$ и обсуждение результатов исследований.**

Метод применим к четным изотопам $^{132-138}Nd$. Эти ядра интерпретированы в МВБ [11]. В нашем подходе в качестве одночастичных энергии взяты нижние состояния ядер $^{133}_{51}Sb$, $^{131}_{50}Sn$взяты из [11], которые даны в Таблице-1.

Таблица 1 - Одночастичные (дырочные) энергии протонов и нейтронов в ядрах ${}^{133}_{51}Sb,\ {}^{131}_{50}Sn$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon_p$(*МэВ*) | $g_{7/2}$ | $d_{5/2}$ | $d_{3/2}$ | $h_{11/2}$ | $s_{1/2}$ |
| | 0 | 0.96 | 2.69 | 2.76 | 2.99 |
| $\varepsilon_n$(*МэВ*) | $d_{3/2}$ | $h_{11/2}$ | $s_{1/2}$ | $d_{5/2}$ | $g_{7/2}$ |
| | 0 | 0.24 | 0.33 | 1.66 | 2.34 |

Парные взаимодействия нуклонов можно определить из описания спектров возбуждения изотопов изучаемых ядер $Nd$. Хотя одначастичные и $V_{pp}$ глубины энергии с изменением масс изотопов должны были медленно изменяться но они недолжны отличаться друг от друга намного. В данной работе мы их выбираем равными: $U_{\omega}^{p} = 26\,МэВ$ , $U_{s}^{p} = 18\,МэВ$. Величину тензорного взаимодействия считали пренебрежимо малыми по сравнению с$U_{\omega}$и $U_s$.

Параметры $nn$ и $np$взаимодействия даны в Таблице-2.

Таблица 2 - Параметры $V_{nn}$ и $V_{np}$ для изотопов $Nd$(МэВ)

| | $U_{\omega}^{n}$ | $U_{s}^{n}$ | $U_{\omega}^{np}$ | $U_{s}^{np}$ |
|---|---|---|---|---|
| ${}^{138}Nd$ | -24 | -18 | -32 | -20 |
| ${}^{136}Nd$ | -22 | -16 | -30 | -18 |
| ${}^{134}Nd$ | -21 | -13 | -27 | -15 |
| ${}^{132}Nd$ | -18 | -12 | -23 | -13 |

Эти величины близки к значениям соответствующих параметров потенциала для тяжелых ядер, полученным в более ранних работах [15,16]. Как видно, эти параметры меняются с изменением числа нейтронов монотонно и медленно. Кроме того, $V_{pp} > V_{nn}$для всех изотопов. Это связано с тем , что одно-частичные энергии расщепляются для протонов несколько больше чем для нейтронных дырок. Таблица показывает, что глубина нейтрон-протонного взаимодействия также несколько больше для всех изотопов и она также медленно уменьшается с уменьшением числа нейтронов.

Таблица 3 - Спектры изотопов $Nd$(МэВ). Экспериментальные значения взяты из[17]

| $J^{\pi}$ \ Ядра | ${}^{132}Nd$ | | ${}^{134}Nd$ | | ${}^{136}Nd$ | | ${}^{138}Nd$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Эксп. | Теор. | Эксп. | Теор. | Эксп. | Теор. | Эксп. | Теор. |
| $0_1^+$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $2_1^+$ | 0.21 | 0.22 | 0.25 | 0.27 | 0.37 | 0.38 | 0,52 | 0,54 |
| $4_1^+$ | 0.61 | 0.63 | 0.79 | 0.81 | 0.98 | 1.01 | 1,24 | 1,25 |
| $6_1^+$ | 1.13 | 1.16 | 1.42 | 1.44 | 1.75 | 1.78 | 2,13 | 2,16 |
| $8_1^+$ | 1.71 | 1.76 | 2.13 | 2.19 | 2.63 | 2.71 | 3,14 | 3,16 |
| $10_1^+$ | 2.31 | 2.37 | 2.82 | 2.91 | 3.55 | 3.61 | - | 4,09 |
| $2_2^+$ | 0.82 | 0.85 | 0.75 | 0.81 | 0.86 | 0.89 | 1,01 | 1,13 |
| $3_1^+$ | 1.12 | 1.16 | 1.09 | 1.17 | 1.23 | 1.29 | 1,45 | 1,58 |
| $4_2^+$ | 1.39 | 1.45 | 1.31 | 1.42 | 1.54 | 1.62 | 1,84 | 2,01 |
| $5_1^+$ | - | 2.06 | - | 2.08 | 2.05 | 2.18 | - | 2,31 |
| $6_2^+$ | - | 2.7 | 1.91 | 2.78 | 2.44 | 2.55 | - | 2,71 |
| $8_2^+$ | - | 3.3 | 2.47 | 3.37 | - | 3.41 | - | 3,99 |
| $10_2^+$ | - | 3.9 | 3.05 | 3.93 | - | 4.05 | - | 4,45 |

Используя полученные величины из первого уравнения равенств (3.10) можно определить энергии связи основных состояний ядер и установить структуру оператора $S_+$. Результаты расчетов показывают неплохое согласие вычисленных величин с экспериментальными их значениями. Вычисленный и экспериментальный спектр ядер ${}^{132-138}Nd$приведены в Таблице-3. Экспериментальные значения энергии уровней взяты из справочника [17]. Экспериментальные и теоретические значения энергий состояний в общем неплохо согласуются между собой. Особенно, как видно, хорошо для состояний ираст полосы. Но для $\beta$ и $\gamma$ −полос наблюдаются некоторые расхождения. Эти расхождения растут для более высоко расположенных уровней. Это объясняется не только выбором интенсивности $pp, nn, np$ –взаимодействий, но и также, повидимому, ограниченным учетом только $S$ и $D$пар в вычислениях. Кроме того, мы полностью исключили из рассмотрения вклад тензорной части парного взаимодействия.

Таблица-4. Вероятности переходов между ираст-состояниями

| Ядра $J_i^\pi \to J_f^\pi$ | $^{132}Nd$ | | $^{134}Nd$ | | $^{136}Nd$ | | $^{138}Nd$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Эксп. | Теор. | Эксп. | Теор. | Эксп. | Теор. | Эксп. | Теор. |
| $2_1 \to 0_1$ | 0.46$\pm$0.4 | 0.39 | 0.24$\pm$0.02 | 0.22 | - | 0.2 | - | 0.18 |
| $4_1 \to 2_1$ | 0.47$\pm$0.2 | 0.51 | $> 0.54$ | 0.55 | - | 0.47 | - | 0,35 |
| $6_1 \to 4_1$ | 0.33$\pm$0.04 | 0.41 | 0.11$\pm$0.02 | 0.15 | - | 0.22 | - | 0.16 |
| $8_1 \to 4_1$ | 0.23$\pm$0.03 | 0.29 | 0.10$\pm$0.02 | 0.14 | - | 0.18 | - | 0.13 |
| $10_1 \to 8_1$ | >93 | 0.18 | - | 0.11 | - | 0.14 | - | 0.11 |

Используя полученные волновые функций состояний вычислены приведенные вероятности $E2$ – переходов между уровнями ираст-полосы, а также отношения переходов вероятностей между различными состояниями. Результаты вычислений и их экспериментальные значения приведены в таблицах 4 и 5, соответственно. Эти величины вероятностей вычислены в приближении когда одночастичные радиальные интегралы заменены выражением $3R^\lambda/(\lambda+3)$, что соответствует волновой функции, постоянной внутри ядра радиусом $R$ и равной нулю вне его.

Таблица 5 - Отношения вероятностей переходов в изотопах $Nd$

| Ядра $\frac{J_i - J_f}{J_i' - J_f'}$ | $^{132}Nd$ | | $^{134}Nd$ | | $^{136}Nd$ | | $^{138}Nd$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Эксп. | Теор. | Эксп. | Теор. | Эксп. | Теор. | Эксп. | Теор. |
| $6_1 \to 4_1/4_1 \to 2_1$ | - | 0.52 | - | 0.36 | $\sim$0.18 | 0.22 | - | 0.16 |
| $8_1 \to 6_1/6_1 \to 4_1$ | - | 0.91 | - | 0.97 | $\sim$1 | 1.2 | - | 1.1 |
| $2_2 \to 2_1/2_2 \to 0_1$ | - | 26 | - | 22 | 16$\pm$1 | 24 | 91 | 47 |
| $3_1 \to 4_1/3_1 \to 2_1$ | - | 19 | - | 17 | 10$\pm$2 | 16 | - | 29 |
| $3_1 \to 2_2/3_1 \to 2_1$ | - | 17 | - | 14 | 20$\pm$2 | 24 | 125 | 93 |
| $8_2 \to 6_2/8_2 \to 6_1$ | - | 22 | 25$\pm$3 | 28 | - | 31 | - | 42 |
| $5_1 \to 4_2/5_1 \to 4_1$ | - | 19 | - | 18 | 13$\pm$4 | 16 | - | 26 |
| $5_1 \to 4_2/5_1 \to 3_1$ | - | 0.94 | - | 0.86 | 0.51$\pm$0.15 | 0.94 | - | 1.04 |

Из таблиц видно, что удовлетворительное согласие между вычисленными и опытными значениями указанных величин находятся в пределах $70 \div 75\%$. Как видно из таблицы-5, отношения вероятностей переходов внутри одинаковых полос (ираст,$\beta и \gamma$) находятся в пределах одного порядка, тогда как они между уровнями разных полос различаются в два порядка. Таковыми являются, например отношения $3_1 \to 4_1/3_1 \to 2_1$ , $8_2 \to 6_2/8_2 \to 6_1$, $5_1 \to 4_2/5_1 \to 4_1$. Такие простые расчеты хорошо передают резкое падение $B(E2)$от ядра к ядру, что является следствием конфигурационных смешиваний волновых функций с малыми компанентами.

**V. Заключение**

Предложено относительно простое, в то же время детальное микроскопическое вычисление параметров МВБ на основе обобщенного квазиспинового формализма, в котором учитывается модельное $SD$ –парное оболочечное пространство. Теория вполне удовлетворительно описывает нижние коллективные состояния ядер среднего и тяжелого атомных весов. В частности, теория приложена к изучению структуры и свойств четных изотопов неодима $Nd$.

**ЛИТЕРАТУРА**

[1] ArimaA.,Iachello F. Interacting boson model of collective states I.Ann.Phys.1976, v.99, p.253-317. II. Ann. Phys. 1978, v.111, p.201-238, III.Ann.Phys.1978, v.115, p.325-366.

[2] Бактыбаев К. Описание коллективных возбуждений ядер в модели взаимодействующих бозонов. ЯФ.,1979.т.30, вып.4(10), стр.963-973

[3] Scholten O. Microscopic calculation for the interacting boson model.Phys.Rev.C28.1783-1790.

[4] Y-A Luo, F.Pan.Ch.Bahri, J.P.Drayer-Phys.Rev.C 71044304(2005).SD-Pair shall model and the interacting boson model.

[5] K.Baktybayev,A.Dalelkhankyzy, K.Ramankulov,N.koilyk- Adv.Studies Theor.phys.,Vol.8, 2014,no.10,475-484.Description of Collective States of $^{102,104,106,108,110}Pd$ Isotopes in Nucleon-pair Shell Model.

[6] K.Baktybayev,A.Dalelkhankyzy and N.koilyk-Advanced Studies in Theoretical Physics, Vol.9, 2015,no.10,483-493.The Scattering Processes $^3He$ on Spherical Nuclei $^{28,30,32}Si$ and the Strong Coupling Method Channels.

[7] K.Baktybayev,A.Dalelkhankyzy, K.Ramankulov,N.koilyk -Advanced Studies in Theoretical Physics, Vol.7, 2013,no.12,595-603.The Nucleon-Pair Shell Description of the Collective Excitations of Spherical Nuclei.

[8] Y.M.Zhao,N.Yoshinagaet.all-Nucleon-pair approximation of the shell model: Unified formalism for both odd and even systems, Phys.Rev.C.v.62.014304

[9] Y.A.Luo,I.Q.Chen // Shell model calculation in the SD- subspace.Phys.Rev.C58(1998).p.589-592

[10] Talmi I.-On a group-theoretical treatment of generalized seniority.Phys.Lett.55 B.p.255(1975)

[11] Бактыбаев К., Абельдина Ж.К.-формализм обобщенного квазиспина в теории ядра. Изв.АНСССР, сер.физ.1979,т.43.стр.296-312.

[12] LowsonR.D.,Macfarlane M.H.-The quasi-spin formalism and the dependence of nuclear matrix elements on particles number.Nucl.Phys.1965,v.66,p.80.

[13] Ichimura M., Arima A.-Quasi-spin formalism and matrix elements in the shell model.Progr.Theor.Phys.1966,v.36,p.296-312.

[14] Luo I.A.,J-Q.Chen,J.P.Drayer-Nucleon-pair shall model calculation of the even-even $Xe$ and $Ba$ nuclei, Nucl.Phys.2000. A 669, p.101-118.

[15] Слив Л.А. Новые данные по исследованию около магических ядер-Изв.АН СССР, 1972, сер.физ.т.36,стр.2026.

[16] Исаков В.И.,Харитонов Ю.И.-Матричные элементы парного взаимодействия в ядрах.Препринт ЛИЯФ,1973, №47.

[17] Бегжанов Р.Б. и др. Справочник по ядерной физике, 1989,книга 1.

[18] Lederer C.M., Shirley V.S. Table of isotopes 7$^{th}$ ed. N.Y.1978.

**Қ. Бақтыбаев[1], М.К. Бактыбаев,[2] Д.Д Наукенов[2], А. Далелханкызы[3]**

[1]Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлтық Университеті, Алматы, Қазақстан;
[2] Қ.И.Сәтбаев атындағы Қазақ Ұлттық Зерттеу Техникалық Университеті, Алматы, Қазақстан;
[3]Алматы энергетика және байланыс университеті, Алматы, Қазақстан

## ӨЗАРА ӘРЕКЕТТЕСУШІ БОЗОНДАР МОДЕЛІНІҢ МИКРОСКОПТЫҚ НЕГІЗДЕМЕСІ ЖӘНЕ ЯДРОЛЫҚ ТЕОРИЯДАҒЫ ЖАЛПЫЛАНҒАН КВАЗИСПИНДІК ФОРМАЛИЗМ

**Аннотация:** жалпыланған квазиспин формализм негізінде әсерлесуші бозондар моделінің параметрлерін микроскоптық фермиондық жолмен оңай есептеу әдісі жасалған. Әдіс $^{132-138}Nd$ ядролар изотоптарының коллективтік күйлерінің құрылысын зерттеуге қолданылған. Ядролардың спектрлерімен олардағы электромагниттік ауысулар ықтималдығы есептелген және олар эксперименттегі мәндерімен салыстырылған.

**Тірек сөздер:** атом ядросы, нуклондар, энергиялар, операторлар, толқындық функция, ауысым ықтималдығы.

**Сведения об авторах:**

Бактыбаев К.Б. - д.ф.-м.н., профессор, Казахский национальный университет им. Аль-Фараби, пр. аль-Фараби 71, Алматы, Казахстан,+77714573147 ;

Бактыбаев М.К. - к.ф.-м.н.,ассоц.профессор, Казахский национальный исследовательский технический университет им.К.И.Сатпаева, пр. Сатпаева 22, Алматы, Казахстан

Наукенов Д.Д. - магистр, ассистент,Казахский национальный исследовательский технический университет им.К.И.Сатпаева, пр. Сатпаева 22, Алматы, Казахстан, e-mail: darmen.naukenov@mail.ru

Далелханкызы А. - phd докторант, Алматинский университет энергетики и связи, Алматы, Казахстан,e-mail:dalelkhankyzy.d@gmail.com