N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 5, Number 315 (2017), 112 – 126

UDC 517.94

A.B.Imanbayeva, A.Sh. Shaldanbayev, A.A. Kopzhasarova

Southern Kazakhstan state university of Auyezov M. O, Shymkent
shaldanbaev51@mail.ru

ASYMPTOTIC DECOMPOSITION THE DECISION IS SINGULAR THE INDIGNANT TASK OF CAUCHY FOR THE SYSTEM OF THE ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH CONSTANT COEFFICIENTS

Abstract: In the real work, the spectral method, has received frontier layer decomposition the decision is singular the indignant task of Cauchy for linear system ordinary differential the equation with constant coefficients: $L_\varepsilon\vec{x} = \varepsilon\dot{\vec{x}} + A\vec{x} = \overrightarrow{f(t)}$.

Keywords: singulyarny, self-conjugate operator, spectral method, Gilbert-Schmidt's theorem, spectral decomposition, interface, asymptotic decomposition.

УДК 517.94

А.Б.Иманбаева, А.А.Копжасарова, А.Ш.Шалданбаев

Южно-казахстанский государственный университет им. М.О Ауезова, г.Шымкент

Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Аннотация: В настоящей работе, спектральным методом, получено погранслойное разложение решений сингулярно возмущенной задачи Коши для линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнении с постоянными коэффициентами: $L_\varepsilon\vec{x} = \varepsilon\dot{\vec{x}} + A\vec{x} = \overrightarrow{f(t)}$.

Ключевые слова: сингулярный, самосопряженный оператор, спектральный метод, теорема Гильберта-Шмидта, спектральное разложение, пограничный слой, асимптотическое разложение.

1.Введение.Пусть A – квадратная матрица порядка n, элементами которой служат комплексные числа. Линейная система

$$\dot{x} = Ax, t \in [0,1] \tag{1.1}$$

называется линейной однородной системой порядка n.

Известно, что для любого ξ и для $\tau \in [0,1]$ существует единственное решение φ системы (1.1) на интервале $[0,1]$, удовлетворяющее $\varphi(\tau) = \xi$.

Лемма 1.1.Множество всех решений системы (1.1) на интервале $[0,1]$ образуютn - мерное векторное пространство над полем комплексных чисел.

Определение 1.1. Всякое множество $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ линейно независимых решений системы (1.1) называется базисом или фундаментальным множеством решений системы (1.1).

Определение 1.2. Если Φ - матрица, n столбцов которой являются n линейно независимыми решениями на $[0,1]$, то Φ называется фундаментальной матрицей системы (1.1). Очевидно, Φ удовлетворяет матричному уравнению

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t), t \in [0,1]. \tag{1.2}$$

Под матричным дифференциальным уравнением, соответствующим системе (1.1) не $[0,1]$, подразумеваем задачу отыскания квадратной матрицы Φпорядка n, столбцы которой являются решениями системы (1.1) на $[0,1]$. Эта задача обозначается так:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), (t \in [0,1]). \tag{1.3}$$

Лемма 1.2. Для того, чтобы решение-матрица уравнения (1.3) была фундаментальной матрицей, необходимо и достаточно, чтобы $det\Phi(t) \neq 0$ для$t \in [0,1]$.

Лемма 1.3. Если Φ - фундаментальная матрица системы (1.1) и C - (комплексная) постоянная неособая матрица, то $\Phi \cdot C$ также является фундаментальной матрицей системы (1.1). Каждая фундаментальная матрица системы (1.1) может быть представлена в такой форме при помощи некоторой неособой матрицы C.

Заметим, что если Φ - фундаментальная матрица системы (1.1) и C - постоянная неособая матрица, то $C \cdot \Phi$, вообще говоря, не является фундаментальной матрицей.

Две различные однородные системы не могут иметь одну и ту же фундаментальную матрицу, ибо из уравнения (1.1) следует, что $A = \dot{\Phi}(t)\Phi^{-1}(t)$.

Сопряженные системы. Если Φ - фундаментальная матрица для системы (1.1), то

$$(\Phi^{-1})^{\cdot} = -\Phi^{-1}\dot{\Phi}\Phi^{-1} = -\Phi^{-1}A,$$

или переходя к сопряженным матрицам,

$$(\Phi *^{-1})^{\cdot} = -A^*(A^*)^{-1}.$$

Поэтому $\Phi *^{-1}$ - фундаментальная матрица для системы

$$\dot{x} = -A^*x, t \in [0,1]. \tag{1.4}$$

Система (1.4) называется сопряженной для системы (1.1) и матричное уравнение

$$\dot{x} = -A^*x, (t \in [0,1]) \tag{1.5}$$

называется сопряженной для уравнения (1.3).

Лемма 1.4. Если Φ - фундаментальная матрица для системы (1.1), то $\psi(t)$ - есть фундаментальная матрица для сопряженной системы (1.4) в том и только в том случае, когда

$$\psi^*\Phi = C, \tag{1.6}$$

где C – постоянная неособая матрица.

Если $A = -A^*$, то $\Phi *^{-1}$, будучи фундаментальной матрицей для системы (1.4), является также фундаментальной матрицей для системы (1.1). Поэтому в силу леммы 1.3

$$\Phi = \Phi *^{-1} C \text{ или } \Phi^*\Phi = C, \tag{1.7}$$

где C – постоянная неособая матрица. Из уравнения (1.7), в частности, следует, что евклидова длина каждого вектора-решения системы (1.1) постоянна.

Определение 1.3.Пусть A - неособая квадратная матрица порядка n из комплексных чисел и f - непрерывный вектор на $[0,1]$, не равный тождественно нулю. Система уравнений

$$\dot{x} = Ax + f(t), (t \in [0,1]) \tag{1.8}$$

называется линейной неоднородной системой порядка n.

Если координаты $f(t)$ непрерывна на $[0,1]$, то существует единственное решение φ системы (1.8), для которого

$$\varphi(\tau) = \xi,$$

где $\tau \in [0,1]$ и $|\xi| < \infty, |\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_n^2}$.

Если известна фундаментальная матрица Φ системы (1.1), то легко найти решение системы (1.8).

Лемма 1.5. Фундаментальная матрица Φ системы (1.1) дается формулой

$$\Phi(t) = e^{tA}(|t| < \infty) \tag{1.9}$$

и решение системы (1.1) удовлетворяющее условию

$$\varphi(\tau) = \xi(|\tau| < \infty, |\xi| < \infty)$$

имеет вид

$$\varphi(t) = e^{(t-\tau)A}\xi(|t| < \infty).$$

Решение φ системы (1.8) удовлетворяющее условию $\varphi(\tau) = \xi$, где $\tau \in [0,1], |\xi| < \infty$ имеет вид:

$$\varphi(t) = e^{(t-\tau)A}\xi + \int_\tau^t e^{(t-s)A} f(s)ds, \ (t \in [0,1]). \tag{1.10}$$

Определение 1.4. Ряд

$$e^A = E + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A^n}{n!}, \tag{1.11}$$

называется экспонентой матрицы A.

Определение 1.5. Фундаментальную матрицу, нормированной условий

$$\Phi(\tau) = I \tag{1.12}$$

принято называть матрицантом или матрицей Коши, например $e^{(t-\tau)A}$ - является матрицантом системы (1.1).

Постановка задачи.

Рассмотрим в пространстве сингулярно возмущенную задачу Коши:

$$L_\varepsilon \vec{x} = \varepsilon \dot{\vec{x}} + A\vec{x} = \overrightarrow{f(t)} t \in [0,1], \tag{1.12}$$

$$\vec{x}(0) = 0, (1.13)$$

где

$$\overrightarrow{x(t)} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn} \end{pmatrix}, \overrightarrow{f(t)} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix},$$

$a_{ij}(i,j = \overline{1,n})$ - вещественные коэффициенты, $\varepsilon > 0$ - малый параметр, L^2 - пространство Гильберта векторозначных функций со скалярным произведением

$$(\vec{y}, \vec{z}) = \sum_{k=1}^n \int_0^1 y_k(t)\overline{z_k(t)}dt \tag{1.14}$$

и нормой

$$\|\vec{y}\| = \left(\sum_{k=1}^n \int_0^1 |y_k(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.15}$$

Спрашивается, при каких условиях на матрицу A, и правую часть $\overrightarrow{f(t)}$ имеет место предельное соотношение, в том или ином смысле

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \vec{x}(t,\varepsilon) = \overrightarrow{x_0}(t), \tag{1.16}$$

где $\overrightarrow{x_0}(t)$ - есть решение невозмущенного уравнения

$$A\overrightarrow{x_0}(t) = \overrightarrow{f(t)}. \tag{1.17}$$

Через W_2^1 - обозначим пространство Соболева векторозначных функций с нормой:

$$\|\vec{x}(t)\|_1 = \left\{\sum_{k=1}^{n}\left[\int_0^1 |x_k(t)|^2 dt + \int_0^1 |\dot{x_k}(t)|^2 dt\right]\right\}^{\frac{1}{2}},$$

где $(\cdot)$ - означает дифференцирование по переменной t.

Существуют различные методы исследования сингулярно возмущенных задач [1-15],среди них в последней работе сделана попытка построения общей теории таких задач.Основным недостатком этих работ является отсутствие явной оценки остаточного члена асимптотического разложения через коэффициенты системы уравнений.В настоящей работе предложен новый метод,основанный на спектральную теорию функционально –дифференциальных уравнений [15].

2.Методы исследования

Лемма 2.1. Для любой непрерывной функции $\overrightarrow{f(t)}$ задача Коши

$$L_\varepsilon \vec{x} = \varepsilon\dot{\vec{x}} + A\vec{x} = \overrightarrow{f(t)}, \tag{2.1}$$

$$\vec{x}(0) = 0, \tag{2.2}$$

$$\overrightarrow{x(t)} = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \dots, & a_{2n}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn} \end{pmatrix}, \overrightarrow{f(t)} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

имеет единственное решение

$$\vec{x}(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K_\varepsilon(t-\tau)\vec{f}(\tau)d\tau, \tag{2.4}$$

где $K_\varepsilon(t-\tau)$ - есть матрицант системы уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon z(t) + Az(t) = 0, \\ \quad z(0) = I. \end{cases} \tag{2.5), (2.6}$$

Доказательство. Продифференцировав формулу (2.4), имеем

$$\dot{\vec{x}}(t) = \frac{1}{\varepsilon}K_\varepsilon(0)\overrightarrow{f(t)} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \frac{\partial K}{\partial t}(t-\tau)\,\vec{f}(\tau)d\tau,$$

$$\varepsilon\dot{\vec{x}}(t) = K_\varepsilon(0)\vec{f}(t) + \int_0^t \frac{\partial K}{\partial t}(t-\tau)\,\vec{f}(\tau)d\tau = \vec{f}(t) + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \varepsilon\frac{\partial K}{\partial t}(t-\tau)\,\vec{f}(\tau)d\tau = \vec{f}(t) -$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t AK_\varepsilon(t-\tau)\vec{f}(\tau)d\tau = \vec{f}(t) - A\vec{x}(t), \Rightarrow \varepsilon\dot{\vec{x}}(t) + A\vec{x}(t) = \vec{f}(t).$$

Определение 2.1. Интегрального оператора

$$K_\varepsilon\vec{f}(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K_\varepsilon(t-\tau)\vec{f}(\tau)d\tau = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 \theta(t-\tau)K\,(t-\tau)\vec{f}(\tau)d\tau$$

назовём оператором Коши.

Лемма 2.2. Если $Su(x) = u(1-x)$, то имеет место формула

$$SK_\varepsilon = K_\varepsilon^* S,$$

где K_ε^* - сопряженный оператора Коши.

Доказательство. Сопряженный оператор K_ε^* имеет вид:

$$K_\varepsilon^* \vec{g}(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^1 \theta(\tau - t) K(\tau - t)\vec{f}(\tau)d\tau = \frac{1}{\varepsilon}\int_t^1 K\,(\tau - t)\vec{f}(\tau)d\tau,$$

поэтому

$$K_\varepsilon^* S\vec{f}(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_t^1 K\,(\tau - t)S\vec{f}(\tau)d\tau = \frac{1}{\varepsilon}\int_t^1 K(\tau - t)\vec{f}(1-\tau)d\tau = \begin{vmatrix} 1-\tau = \xi, \tau = 1-\xi, \\ d\tau = -d\xi \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{\varepsilon}\int_{1-t}^0 K(1-\xi-t)\,\vec{f}(\xi)d\xi = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{1-t} K(1-\xi-t)\,\vec{f}(\xi)d\xi =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int_0^{1-t} K(1-t-\xi)\,\vec{f}(\xi)d\xi = SK\vec{f}(t).$$

Следствие 2.1.Оператор SK симметрический в пространстве L^2.

Доказательство.$(SK_\varepsilon)^* = K_\varepsilon^* S^* = K_\varepsilon^* S = SK_\varepsilon$.

Следствие 2.2.Оператор $\overline{SK}$ вполне непрерывен и самосопряжен в пространстве L^2.

Если $SK_\varepsilon\vec{f}(t) = 0$, то $K_\varepsilon\vec{f}(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K(t-\tau)\vec{f}(\tau)d\tau = 0, => \int_0^t K(t-\tau)\vec{f}(\tau)\,d\tau = 0, => \vec{f}(\tau) = 0$, поскольку однородное вольтерровое уравнение имеет лишь тривиальное решение.

Теорема 2.1. Если $Su(x) = u(1-x)$, то

(а) оператор $\overline{SK_\varepsilon}$ вполне непрерывен и самосопряжен;

(б) ортонормированные собственные векторы оператора $\overline{SK_\varepsilon}$ образуют базис пространства L^2.

Лемма 2.3.

Если имеет место неравенство

$$(A\vec{u}, \vec{u}) \geq \alpha \cdot \|\vec{u}\|^2, \alpha > 0,$$

то

$$\|L_\varepsilon^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha},$$

где оператор определен формулами

$$L_\varepsilon\vec{x} = \varepsilon\dot{\vec{x}} + A\vec{x},$$

$$D(L_\varepsilon) = \left\{\vec{x} \in C^1(0,1) \cap C[0,1], \overrightarrow{x(0)} = 0\right\}.$$

Доказательство. Пусть $\vec{x} \in D(L_\varepsilon)$, тогда

$$\varepsilon\dot{\vec{x}} + A\vec{x} = \overrightarrow{f(t)} \in L^2.$$

Умножив обе части этого уравнения скалярно на $\vec{x}$, имеем

$$(L_\varepsilon\vec{x}, \vec{x}) = \varepsilon(\dot{\vec{x}}, \vec{x}) + (A\vec{x}, \vec{x}) = (\vec{f}, \vec{x}),$$

$$(\dot{\vec{x}}, \vec{x}) = \sum_{k=1}^n \int_0^1 \dot{x}_k x_k\,dt = \sum_{k=1}^n \frac{x_k^2(t)}{2}\Bigg|_0^1 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n x_k^2(1) \geq 0; \;=>$$

$$\alpha \cdot \|\vec{x}\|^2 \leq (L_\varepsilon\vec{x}, \vec{x}) = (\vec{f}, \vec{x}) \leq \|\vec{f}\| \cdot \|\vec{x}\|, => \alpha \cdot \|\vec{x}\| \leq \|\vec{f}\| = \|L_\varepsilon\vec{x}\|, =>$$

$$\|\vec{x}\| \leq \frac{\|\vec{f}\|}{\alpha}, => \|L_\varepsilon^{-1}f\| \leq \frac{\|\vec{f}\|}{\alpha}, => \|L_\varepsilon^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha},$$

что и требовалось доказать.

3.Результаты исследовании

Теорема 3.1. Задача Коши

$$L_\varepsilon \vec{x} = \varepsilon \dot{\vec{x}} + A\vec{x} = \overrightarrow{f(t)}, \tag{3.1}$$

$$\vec{x}(0) = 0, \tag{3.2}$$

сильно разрешима, и ее сильное решение имеет вид:

$$\vec{x}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(S\vec{f}, \overrightarrow{\varphi_m})}{\lambda_m} \overrightarrow{\varphi_m}(t), \tag{3.3}$$

и принадлежит пространству W_2^1, где

$$SL_\varepsilon \overrightarrow{\varphi_m}(t) = \lambda_m \cdot \overrightarrow{\varphi_m}(t), S\vec{f}(t) = \vec{f}(1-t), \vec{f}(t) \in L^2. \tag{3.4}$$

Доказательство. Действуя оператором S на обе части уравнения (3.1), имеем

$$SL_\varepsilon \vec{x} = S\vec{f}(x), => \vec{x}(t) = (SL_\varepsilon)^{-1} S\vec{f}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \left((SL_\varepsilon)^{-1} S\vec{f}, \overrightarrow{\varphi_m}\right) \overrightarrow{\varphi_m}(t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(S\vec{f}, \overrightarrow{\varphi_m})}{\lambda_m} \overrightarrow{\varphi_m}(t),$$

где λ_m^{-1} - собственные значения оператора $(SL_\varepsilon)^{-1}$, а $\overrightarrow{\varphi_m}(t)$ соответствующие им собственные векторы, т.е.

$$(SL_\varepsilon)^{-1} \overrightarrow{\varphi_m}(t) = \lambda_m^{-1} \overrightarrow{\varphi_m}(t) \text{ или } \lambda_m \overrightarrow{\varphi_m}(t) = SL_\varepsilon \overrightarrow{\varphi_m}(t), => L_\varepsilon \overrightarrow{\varphi_m}(t) = \lambda_m S\overrightarrow{\varphi_m}(t), (m = 1,2, \dots)$$

то есть

$$\begin{cases} \varepsilon \dot{\overrightarrow{\varphi_m}}(t) + A\overrightarrow{\varphi_m}(t) = \lambda_m S\overrightarrow{\varphi_m}(t), \\ \overrightarrow{\varphi_m}(0) = 0. \end{cases} \tag{3.5), (3.6}$$

Включение $\vec{x}(t) \in W_2^1$ следует из доказанных нами априорных оценок. **Теорема 3.1** доказана.

Если правая часть уравнения (3.1) является достаточно гладкой функцией, то с помощью интегрирования по частям можно преобразовать формулу (3.3), с целью вывода асимптотического разложения решения $\vec{x}(t)$. В силу постоянства и симметричности матрицы A имеет место формула $(A^*)^{-1}S = SA^{-1}$, поэтому

$$\left(S\vec{f}, A^{-1}S\overrightarrow{\varphi_m}\right) = \left((A^{-1})^* S\vec{f}, S\overrightarrow{\varphi_m}\right) = \left((A^*)^{-1} S\vec{f}, S\overrightarrow{\varphi_m}\right) = \left(SA^{-1}\vec{f}, S\overrightarrow{\varphi_m}\right) = \left(A^{-1}\vec{f}, \overrightarrow{\varphi_m}\right);$$

С помощью интегрирования по частям, имеем

$$\left(S\vec{f}, A^{-1}\dot{\overrightarrow{\varphi_m}}\right) = \left((A^{-1})^* S\vec{f}, \dot{\overrightarrow{\varphi_m}}\right) = \left(SA^{-1}\vec{f}, \dot{\overrightarrow{\varphi_m}}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left[SA^{-1}\vec{f}(t)\right]_k \varphi_m^k(t)\Big|_0^1 - \left(\overrightarrow{\varphi_m}, (SA^{\dot{-}1})f\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left[A^{-1}\vec{f}(0)\right]_k \varphi_m^k(1) + \left(S\left(A^{\dot{-}1}\vec{f}\right), \overrightarrow{\varphi_m}\right) = \left(A^{-1}\vec{f}(0), \overrightarrow{\varphi_m}(1)\right) + \left(S\left(A^{\dot{-}1}\vec{f}\right), \overrightarrow{\varphi_m}\right).$$

Следовательно,

$$\left(S\vec{f}, \overrightarrow{\varphi_m}\right) = \lambda_m \left(A^{-1}\vec{f}, \overrightarrow{\varphi_m}\right) - \varepsilon\left(A^{-1}\vec{f}(0), \overrightarrow{\varphi_m}(1)\right) - \varepsilon\left(S\left(A^{\dot{-}1}\vec{f}\right), \overrightarrow{\varphi_m}\right).$$

Подставив эту формулу в (3.3), получим

$$\vec{x}\left(t,\xi,\vec{f}\right) = A^{-1}\vec{f}(t) - \varepsilon\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(A^{-1}\vec{f}(0),\overrightarrow{\varphi_m}(1)\right)}{\lambda_m}\overrightarrow{\varphi_m}(t) - \varepsilon\vec{x}\left(t,\varepsilon,\left(A^{-1}\dot{\vec{f}}\right)\right), \tag{3.7}$$

где через $\vec{x}\left(t,\xi,\vec{f}\right)$ - обозначено решение задачи Коши с правой частью $\vec{f}(t)$.

Найдём сумму ряда стоящей в правой части полученной формулы, для этого воспользуемся уравнением собственных векторов (3.5)-(3.6) и уравнением матриканта, согласно которым

$$\varepsilon\dot{\overrightarrow{\varphi_m}} + A\overrightarrow{\varphi_m} = \lambda_m S\overrightarrow{\varphi_m}(m = 1,2,\dots),$$

$$\overrightarrow{\varphi_m}(0) = 0,$$

и

$$\varepsilon\dot{\Phi}_\varepsilon(t) + A\Phi(t) = 0,$$

$$\Phi(0) = I,$$

где $\Phi_\varepsilon(t) = e^{-\frac{A}{\varepsilon}t}$ - экспонента от матрицы $-\frac{A}{\varepsilon}$.

Пусть матрица $e^{-\frac{A}{\varepsilon}t}$ имеет следующий вид:

$$e^{-\frac{A}{\varepsilon}t} = \begin{pmatrix} e_{11}(\varepsilon,t), e_{12}(\varepsilon,t),\dots, e_{1n}(\varepsilon,t) \\ e_{21}(\varepsilon,t), e_{22}(\varepsilon,t),\dots, e_{2n}(\varepsilon,t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e_{n1}(\varepsilon,t), e_{n2}(\varepsilon,t),\dots, e_{nn}(\varepsilon,t) \end{pmatrix}.$$

Обозначим через - $\overrightarrow{e_k}(\varepsilon,t)k$- того столбца этой матрицы, т.е.

$$\overrightarrow{e_k}(\varepsilon,t) = \begin{pmatrix} e_{1k}(\varepsilon,t) \\ e_{2k}(\varepsilon,t) \\ \vdots \\ e_{nk}(\varepsilon,t) \end{pmatrix},$$

которая является решением задачи Коши:

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{e}_k(t) + A\overrightarrow{e_k}(t) = 0, \\ e_{ij}(\varepsilon,t) = \delta_{ij}, \end{cases}$$

где δ_{ij} - символ Кронекера. Действуя оператором S на обе части этого уравнения, имеем

$$\varepsilon S\dot{\overrightarrow{e_k}}(t) + SA\overrightarrow{e_k}(t) = 0.$$

Найдём Фурье коэффициентов вектора $SA\overrightarrow{e_k}(t)$, для этого умножим скалярно на $\overrightarrow{\varphi_m}(t)$ обе части последнего уравнения. Введём ещё одно обозначение, полагая

$$\overrightarrow{\varphi_m}(t) = \begin{pmatrix} \varphi_m^1(t) \\ \varphi_m^2(t) \\ \vdots \\ \varphi_m^n(t) \end{pmatrix},$$

которое пригодится нам в ближайшем будущем. После умножения получим скалярное уравнение:

$$\varepsilon\left(S\dot{\overrightarrow{e_k}},\overrightarrow{\varphi_m}\right) + \left(SA\overrightarrow{e_k},\overrightarrow{\varphi_m}\right) = 0, m = 1,2,\dots$$

из которого

$$(SA\overrightarrow{e_k},\overrightarrow{\varphi_m}) = \left(-\varepsilon S\dot{\overrightarrow{e_k}},\overrightarrow{\varphi_m}\right) = \varepsilon\left((S\overrightarrow{e_k}),\overrightarrow{\varphi_m}\right) = \varepsilon\sum_{l=1}^{n}\varphi_m^l(t)Se_{lk}(t) - \varepsilon\left(S\overrightarrow{e_k},\dot{\overrightarrow{\varphi_m}}\right) =$$

$$= \varepsilon\sum_{l=1}^{n}\varphi_m^l(1)\,e_{lk}(0) - \varepsilon\left(S\overrightarrow{e_k},\dot{\overrightarrow{\varphi_m}}\right) = \varepsilon\varphi_m^{(k)}(1) - \varepsilon\left(S\overrightarrow{e_k},\dot{\overrightarrow{\varphi_m}}\right) = \varepsilon\varphi_m^k(1) - (S\overrightarrow{e_k},\lambda_m S\overrightarrow{\varphi_m} - A\overrightarrow{\varphi_m})$$

$$= \varepsilon\varphi_m^{(k)}(1) - \lambda_m(S\overrightarrow{e_k},S\overrightarrow{\varphi_m}) + (S\overrightarrow{e_k},A\overrightarrow{\varphi_m}) = \varepsilon\varphi_m^{(k)}(1) - \lambda_m(\overrightarrow{e_k},\overrightarrow{\varphi_m}) + (A^*S\overrightarrow{e_k},\overrightarrow{\varphi_m}) =$$

$$= \varepsilon\varphi_m^{(k)}(1) - \lambda_m(\overrightarrow{e_k},\overrightarrow{\varphi_m}) + (SA\overrightarrow{e_k},\overrightarrow{\varphi_m});$$

Следовательно, имеет место формула:

$$\frac{\varepsilon\varphi_m^k(1)}{\lambda_m} = (\overrightarrow{e_k},\overrightarrow{\varphi_m}),\, k = 1,2,\dots,n;\, m = 1,2,\dots, \tag{3.8}$$

поэтому

$$\overrightarrow{e_k}(t) = \textstyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\varepsilon\varphi_m^k(1)}{\lambda_m}\overrightarrow{\varphi_m}(t). \tag{3.9}$$

Тогда

$$\varepsilon\textstyle\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(A^{-1}\vec{f}(0),\overrightarrow{\varphi_m}(1)\right)}{\lambda_m}\overrightarrow{\varphi_m}(t) = \sum_{k=1}^{n}\left[A^{-1}\vec{f}(0)\right]_k\cdot\overrightarrow{e_k}(t). \tag{3.10}$$

Подставив (3.10) в (3.7), получим

$$\vec{x}\left(t,\varepsilon,\vec{f}\right) = A^{-1}\vec{f}(t) - \textstyle\sum_{k=1}^{n}\left[A^{-1}\vec{f}(0)\right]_k\cdot\overrightarrow{e_k}(t) - \varepsilon\vec{x}\left(t,\varepsilon,\left(A^{-1}\dot{\vec{f}}\right)\right), \tag{3.11}$$

где $\overrightarrow{e_k}(t)$ - есть k - ый столбец матрицанта.

Заметим, что при $t = 0$ имеет место формула

$$\sum_{k=1}^{n}\left[A^{-1}\vec{f}(0)\right]_k\cdot\overrightarrow{e_k}(0) = A^{-1}\vec{f}(0),$$

поскольку система $\{\overrightarrow{e_k}(0)\}$ - ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}_n$.

Подставив в место вектора $\vec{f}$ вектор $\left(A^{-1}\dot{\vec{f}}\right)$ из формулы (3.11), получим

$$\vec{x}\left(t,\varepsilon,\left(A^{-1}\dot{\vec{f}}\right)\right) = A^{-1}\left(A^{-1}\dot{\vec{f}}\right)(t) - \sum_{k=1}^{n}\left[A^{-1}\left(A^{-1}\dot{\vec{f}}(0)\right)\right]_k\cdot\overrightarrow{e_k}(t) -$$

$$-\varepsilon\vec{x}\left(t,\varepsilon,\left(\frac{d}{dt}A^{-1}\right)^2\vec{f}\right).$$

Полагая $D^\circ = I, D = \frac{d}{dt}A^{-1}$, перепишем полученную формулу

$$\vec{x}\left(t,\varepsilon,D\vec{f}\right) = A^{-1}D\vec{f}(t) - \sum_{k=1}^{n}\left[(A^{-1}D\vec{f})(0)\right]_k\cdot\overrightarrow{e_k}(t) - \varepsilon\vec{x}\left(t,\varepsilon,D^2\vec{f}\right).$$

Подставив эту формулу в (3.11), имеем

$$\vec{x}\left(t,\varepsilon,\vec{f}\right) = A^{-1}\vec{f}(t) - \sum_{k=1}^{n}\left[A^{-1}\vec{f}(0)\right]_k\cdot\overrightarrow{e_k}(t) -$$

$$-\varepsilon\left[A^{-1}D\vec{f}(t)-\sum_{k=1}^{n}\left[A^{-1}D\vec{f}(0)\right]_k\cdot\vec{e_k}(t)-\varepsilon\vec{x}\left(t,\varepsilon,D^2\vec{f}\right)\right]==A^{-1}D^{\circ}\vec{f}(t)-$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\left[A^{-1}D^{\circ}\vec{f}(0)\right]_k\cdot\vec{e_k}(t)-\left[A^{-1}D\vec{f}(t)-\sum_{k=1}^{n}\left[A^{-1}D\vec{f}(0)\right]_k\cdot\vec{e_k}(t)\right]\varepsilon+$$

$$+\varepsilon^2\vec{x}\left(t,\varepsilon,D^2\vec{f}\right)=\sum_{i=0}^{1}(-1)^i\left\{A^{-1}D^i\vec{f}(t)-\sum_{k=1}^{n}\left[A^{-1}D^i\vec{f}(0)\right]_k\cdot\vec{e_k}(t)\right\}\varepsilon^i+$$

$$+(-1)^2\varepsilon^2\vec{x}\left(t,\varepsilon,D^2\vec{f}\right).$$

Теперь воспользуемся методом математической индукции. Предположим, что при $l=m$ формула верна

$$\vec{x}\left(t,\varepsilon,\vec{f}\right)=\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\left\{A^{-1}D^i\vec{f}(t)-\sum_{k=1}^{n}\left[A^{-1}D^i\vec{f}(0)\right]_k\cdot\vec{e_k}(t)\right\}\varepsilon^i+$$

$$(-1)^{m+1}\varepsilon^{m+1}\vec{x}\left(t,\varepsilon,D^{m+1}\vec{f}\right),\tag{3.12}$$

и покажем, что тогда она верна и при $l=m+1$. В самом деле, из формулы (3.11), имеем

$$\vec{x}\left(t,\varepsilon,D^{m+1}\vec{f}\right)=A^{-1}D^{m+1}\vec{f}(t)-\sum_{k=1}^{n}\left[A^{-1}D^{m+1}\vec{f}(0)\right]_k\cdot\vec{e_k}(t)-\varepsilon\vec{x}\left(t,\varepsilon,D^{m+2}\vec{f}\right).$$

Подставив это выражение в предыдущую формулу, получим

$$\vec{x}\left(t,\varepsilon,\vec{f}\right)=\sum_{i=0}^{m}(-1)^i\left\{A^{-1}D^i\vec{f}(t)-\sum_{k=1}^{n}\left[A^{-1}D^i\vec{f}(0)\right]_k\cdot\vec{e_k}(t)\right\}\varepsilon^i+$$

$$+(-1)^{m+1}\left[A^{-1}D^{m+1}\vec{f}(t)-\sum_{k=1}^{n}\left[A^{-1}D^{m+1}\vec{f}(0)\right]_k\cdot\vec{e_k}(t)\right]\varepsilon^{m+1}+$$

$$(-1)^{m+2}\varepsilon^{m+2}\vec{x}\left(t,\varepsilon,D^{m+2}\vec{f}\right)=$$

$$\sum_{i=0}^{m+1}(-1)^i\left\{A^{-1}D^i\vec{f}(t)-\sum_{k=1}^{n}\left[A^{-1}D^i\vec{f}(0)\right]_k\cdot\vec{e_k}(t)\right\}\varepsilon^i+(-1)^{m+2}\varepsilon^{m+2}\vec{x}\left(t,\varepsilon,D^{m+2}\vec{f}\right).$$

Следовательно, если $\vec{f}(t)\in W_2^m$, то имеет место формула

$$\vec{x}\left(t,\varepsilon,\vec{f}\right)=\sum_{i=0}^{m-1}(-1)^i\left[A^{-1}D^i\vec{f}(t)-\sum_{k=1}^{n}\left[A^{-1}D^i\vec{f}(0)\right]_k\cdot\vec{e_k}(t)\right]\varepsilon^i+$$

$$+(-1)^m\varepsilon^m\vec{x}\left(t,\varepsilon,D^m\vec{f}\right),$$

где остаток допускает следующую оценку

$$\left\|\vec{x}\left(t,\varepsilon,D^m\vec{f}\right)\right\|\le\frac{\left\|D^m\vec{f}\right\|}{\alpha},$$

где

$$D\vec{f}=\frac{d}{dt}A^{-1}\vec{f}(t).$$

Нами доказана следующая основная теорема.

Теорема 3.2. Если $\vec{f}(t) \in W_2^m$ и матрица A с постоянными коэффициентами симметрична и положительно определена в пространстве L^2, т.е.

$$(A\vec{u}, \vec{u}) \geq \alpha \cdot \|\vec{u}\|^2, \alpha > 0, \forall \vec{u} \in L^2, \tag{3.10}$$

то задача Коши

$$\vec{x} = \varepsilon\dot{\vec{x}}(t) + A\vec{x}(t) = \overrightarrow{f(t)}, \tag{3.1}$$

$$\vec{x}(0) = 0, \tag{3.2}$$

сильно разрешима, и ее сильное решение допускает асимптотическое представление вида:

$$\vec{x}(t, \varepsilon, \vec{f}) = \sum_{i=0}^{m-1} (-1)^i \left[A^{-1}D^i\vec{f}(t) - \sum_{k=1}^{n} \left[A^{-1}D^i\vec{f}(0)\right]_k \cdot \overrightarrow{e_k}(t)\right]\varepsilon^i +$$
$$+(-1)^m\varepsilon^m\vec{x}(t, \varepsilon, D^m\vec{f}), \tag{3.11}$$

где $D^\circ = I, D = \frac{d}{dt}A^{-1}$ и остаток допускает оценку:

$$\left\|\vec{x}(t, \varepsilon, D^m\vec{f})\right\| \leq \frac{\|D^m\vec{f}\|}{\alpha}. \tag{3.12}$$

4.Обсуждениерезультатов

Замечание 4.1. Симметричность матрицы A является следствием $SA = A^*S$, можно избавиться от этого условия с помощью прямых вычислений?

Решение.

Решение задачи Коши (2.1)-(2.2) имеет вид

$$\vec{x}(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K_\varepsilon(t-\tau)\vec{f}(\tau)d\tau,$$

поэтому

$$\vec{x}\left(t, \varepsilon, \frac{d}{dt}A^{-1}f(t)\right) = \frac{1}{\varepsilon}\int_0^t K_\varepsilon(t-\tau)\frac{d}{dt}A^{-1}\vec{f}(\tau)d\tau = \frac{1}{\varepsilon}\left[K_\varepsilon(t-\tau)A^{-1}\vec{f}(\tau)\right]\Big|_0^t -$$
$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \frac{\partial K_\varepsilon}{\partial\tau}(t-\tau)A^{-1}\vec{f}(\tau)d\tau = \frac{1}{\varepsilon}K_\varepsilon(0)A^{-1}\vec{f}(t) - \frac{1}{\varepsilon}K_\varepsilon(t)A^{-1}\vec{f}(0) -$$
$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (A^*)^{-1}\frac{\partial K_\varepsilon}{\partial\tau}(t-\tau)\vec{f}(\tau)d\tau = \Big| K_\varepsilon(t-\tau) = e^{-\frac{(t-\tau)}{\varepsilon}A},$$
$$\frac{\partial K_\varepsilon}{\partial\tau} = e^{-\frac{(t-\tau)}{\varepsilon}A} \cdot \frac{A}{\varepsilon} = K_\varepsilon(t-\tau)\frac{A}{\varepsilon}\Big| = \frac{1}{\varepsilon}K_\varepsilon(0)A^{-1}\vec{f}(t) - \frac{1}{\varepsilon}K_\varepsilon(t)A^{-1}\vec{f}(0)$$
$$-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t (A^*)^{-1}K_\varepsilon(t-\tau)\frac{A}{\varepsilon}\vec{f}(\tau)d\tau = \frac{1}{\varepsilon}\underbrace{K_\varepsilon(0)}_{I}A^{-1}\vec{f}(t) - -\frac{1}{\varepsilon}K_\varepsilon(t)A^{-1}\vec{f}(0)$$
$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t A^*(A^*)^{-1}K_\varepsilon(t-\tau)\frac{A}{\varepsilon}\vec{f}(\tau)d\tau = \frac{1}{\varepsilon}A^{-1}\vec{f}(t) - \frac{K_\varepsilon(t)}{\varepsilon}A^{-1}\vec{f}(0) -$$

$$-\frac{1}{\varepsilon^2}\int_0^t K_\varepsilon(t-\tau)\vec{f}(\tau)d\tau = \frac{1}{\varepsilon}A^{-1}\vec{f}(t) - \frac{K_\varepsilon(t)}{\varepsilon}A^{-1}\vec{f}(0) - \frac{1}{\varepsilon}\vec{x}\big(t,\varepsilon,\vec{f}\big), =>$$

$$\varepsilon\vec{x}\left(t,\varepsilon,\frac{d}{dt}A^{-1}\vec{f}(t)\right) = A^{-1}\vec{f}(t) - K_\varepsilon(t)A^{-1}\vec{f}(0) - \vec{x}\big(t,\varepsilon,\vec{f}\big), =>$$

$$\vec{x}\big(t,\varepsilon,\vec{f}\big) = A^{-1}\vec{f}(t) - K_\varepsilon(t)A^{-1}\vec{f}(0) - \varepsilon\vec{x}\left(t,\varepsilon,\frac{d}{dt}A^{-1}\vec{f}(t)\right) =$$

$$= A^{-1}\vec{f}(t) - e^{-\frac{tA}{\varepsilon}}A^{-1}\vec{f}(0) - \varepsilon\vec{x}\left(t,\varepsilon,\frac{d}{dt}A^{-1}\vec{f}(t)\right).$$

Теорема 4.1.

Если $f(t) \in W_2^1$ и матрица A с постоянными коэффициентами положительно определена в пространстве L^2, т.е. для любого $\vec{u}(t) \in L^2$ имеет место неравенство

$$(A\vec{u},\vec{u}) \geq \alpha \cdot \|\vec{u}\|^2, \alpha > 0, \forall\vec{u} \in L^2,$$

то задача Коши

$$\vec{x} = \varepsilon\dot{\vec{x}}(t) + A\vec{x}(t) = \overrightarrow{f(t)},$$

$$\vec{x}(0) = 0,$$

имеет единственное решение из класса W_2^2 и это решение допускает представления вида:

$$\vec{x}\big(t,\varepsilon,\vec{f}\big) = A^{-1}\vec{f}(t) - e^{-\frac{tA}{\varepsilon}}A^{-1}\vec{f}(0) - \varepsilon\vec{x}\left(t,\varepsilon,\frac{d}{dt}A^{-1}\vec{f}(t)\right).$$

Замечание4.2.

$$\sum_{k=1}^n \left[A^{-1}\vec{f}(0)\right]_k \cdot \overrightarrow{e_k}(t) = e^{-\frac{tA}{\varepsilon}}A^{-1}\vec{f}(0).$$

Доказательство.

$$e^{-\frac{tA}{\varepsilon}}A^{-1}\vec{f}(0) = e^{-\frac{tA}{\varepsilon}}\begin{pmatrix} A^{-1}\overrightarrow{f_1} \\ A^{-1}\overrightarrow{f_2} \\ \vdots \\ A^{-1}\overrightarrow{f_n}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{11}(\varepsilon,t), e_{12}(\varepsilon,t), \dots, e_{1n}(\varepsilon,t) \\ e_{21}(\varepsilon,t), e_{22}(\varepsilon,t), \dots, e_{2n}(\varepsilon,t) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ e_{n1}(\varepsilon,t), e_{n2}(\varepsilon,t), \dots, e_{nn}(\varepsilon,t)\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A^{-1}\overrightarrow{f_1} \\ A^{-1}\overrightarrow{f_2} \\ \vdots \\ A^{-1}\overrightarrow{f_n}\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n e_{1j}(t,\varepsilon)\left(A^{-1}\vec{f}\right)_j \\ \sum_{j=1}^n e_{2j}(t,\varepsilon)\left(A^{-1}\vec{f}\right)_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n e_{nj}(t,\varepsilon)\left(A^{-1}\vec{f}\right)_j \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n \left(A^{-1}\vec{f}\right)_j \begin{pmatrix} e_{1j}(\varepsilon,t) \\ e_{1j}(\varepsilon,t) \\ \vdots \\ e_{nj}(\varepsilon,t)\end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n \left(A^{-1}\vec{f}\right)_j \overrightarrow{e_j}(t,\varepsilon).$$

Замечание 4.3. Можно ли ослабить условия положительной определенности матрицы A, т.е. условия

$$(A\vec{u},\vec{u}) \geq \alpha \cdot \|\vec{u}\|^2, \alpha > 0?$$

Решение. Предположим, что при некотором $\overrightarrow{u_0} \neq 0$ имеет место равенство $A\overrightarrow{u_0} = 0$, тогда $detA = 0$.

Рассмотрим задачу Коши

$$\varepsilon\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix} = \overrightarrow{f(t)}, \tag{3.13}$$

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, \tag{3.14}$$

где

$$detA = 0, A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, trA = a_{11} + a_{22} > 0. \tag{3.15}$$

Редуцируем задачу Коши (3.13)-(3.15) к задаче Коши для уравнения второго порядка. Перепишем уравнения (3.13) в развёрнутом виде

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{x_1} + a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = f_1(t), \\ \varepsilon\dot{x_2} + a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = f_2(t), \end{cases}$$

где точка $(\cdot)$ - означает дифференцирования по переменной t. Продифференцировав первое уравнение по t и умножив полученное уравнение на ε, имеем

$$\varepsilon\ddot{x_1} + a_{11}\dot{x_1} + a_{12}\dot{x_2} = \dot{f_1}(t)/\cdot\, \varepsilon,$$
$$\varepsilon^2\ddot{x_1} + a_{11}\varepsilon\dot{x_1} + a_{12}\varepsilon\dot{x_2} = \varepsilon\dot{f_1}(t).$$

Воспользовавшись вторым уравнением системы, исключим из этого уравнения величину $\varepsilon\dot{x_2}$.

$$\varepsilon^2\ddot{x_1} + a_{11}\varepsilon\dot{x_1} + a_{12}(f_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2) = \varepsilon\dot{f_1}(t),$$
$$\varepsilon^2\ddot{x_1} + a_{11}\varepsilon\dot{x_1} + a_{12}a_{21}x_1 - a_{12}a_{22}x_2(f_2 - a_{21}x_1 - a_{22}x_2) = \varepsilon\dot{f_1}(t),$$
$$\varepsilon^2\ddot{x_1} + a_{11}\varepsilon\dot{x_1} + a_{12}a_{21}x_1 + a_{22}[\varepsilon\dot{x_1} + a_{11}x_1 - f_1] = \varepsilon\dot{f_1} - a_{12}f_2(t),$$
$$\varepsilon^2\ddot{x_1} + \varepsilon(a_{11} + a_{22})\dot{x_1} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = \varepsilon\dot{f_1} + a_{22}f_1(t) - a_{12}f_2(t),$$
$$\varepsilon^2\ddot{x_1} + \varepsilon trA\dot{x_1} + detA\dot{x_1} = \varepsilon\dot{f_1} + a_{22}f_1(t) - a_{12}f_2(t).$$

В нашем случае $detA = 0$, поэтому уравнение принимает вид:

$$\varepsilon^2\ddot{x_1} + \varepsilon trA\dot{x_1} = \varepsilon\dot{f_1} + a_{22}f_1(t) - a_{12}f_2(t),$$
$$x_1(0) = 0, \dot{x_1}(0) = \frac{f_1(0)}{\varepsilon}.$$

Разделив обе части дифференциального уравнения на ε, получим задачу Коши следующего вида:

$$\begin{cases} \varepsilon\ddot{x_1} + trA\dot{x_1} = \dot{f_1}(t) + \frac{a_{22}f_1(t) - a_{12}f_2(t)}{\varepsilon}, \\ x_1(0) = 0, \quad \dot{x_1}(0) = \frac{f_1(0)}{\varepsilon}. \end{cases}$$

Пусть $y(t) = \dot{x_1}(t) - \frac{f_1(0)}{\varepsilon}$, тогда $y(0) = 0$ и $\dot{x_1}(t) = y(t) + \frac{f_1(0)}{\varepsilon}$, поэтому

$$\varepsilon\dot{y} + trA \cdot \left[y(t) + \frac{f_1(0)}{\varepsilon}\right] = \dot{f_1}(t) + \frac{a_{22}f_1(t) - a_{12}f_2(t)}{\varepsilon},$$

$$\varepsilon\dot{y} + trAy(t) = \dot{f_1}(t) + \frac{a_{22}f_1(t) - a_{12}f_2(t)}{\varepsilon} - \frac{f_1(0)}{\varepsilon}trA.$$

Таким образом, относительно неизвестной задача принимает следующий вид:

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{y} + trAy(t) = \dot{f_1}(t) + \frac{a_{22}f_1(t) - a_{12}f_2(t)}{\varepsilon} - \frac{f_1(0)}{\varepsilon}trA = F(t), \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

По нашему предположению $trA > 0$, известно, что если $a > 0, f(t) \in C^1[0,1]$ и

$$\begin{cases} \varepsilon\dot{z} + az = f(t), \\ z(0) = 0, \end{cases}$$

то

$$z(t, \varepsilon, f) = \frac{f(t)}{a} - \frac{f(0)}{a}e_\varepsilon(t) - \frac{\varepsilon}{a}y\left(t, \varepsilon, \dot{f}\right) \text{ и } \|z(t, \varepsilon, f)\| \le \frac{\|f\|}{a},$$

поэтому

$$y(t, \varepsilon, F) = \frac{\dot{f_1}(t)}{trA} + \frac{a_{22}f_1(t) - a_{12}f_2(t)}{\varepsilon trA} - \frac{f_1(0)}{\varepsilon} -$$

$$-\left[\frac{\dot{f}_1(0)}{trA}+\frac{a_{22}f_1(0)-a_{12}f_2(0)}{\varepsilon trA}-\frac{f_1(0)}{\varepsilon}\right]\cdot e_\varepsilon(t)-\frac{\varepsilon}{a}y\left(t,\varepsilon,\ddot{f}_1+\frac{a_{22}\dot{f}_1-a_{12}\dot{f}_2}{\varepsilon}\right)=$$

$$=\frac{\dot{f}_1(t)}{trA}++\frac{a_{22}f_1(t)-a_{12}f_2(t)}{\varepsilon trA}-\frac{f_1(0)}{\varepsilon}-$$

$$-\left[\frac{\dot{f}_1(0)}{trA}+\frac{a_{22}f_1(0)-a_{12}f_2(0)}{\varepsilon trA}-\frac{f_1(0)}{\varepsilon}\right]e_\varepsilon(t)-\frac{\varepsilon}{trA}y\left(t,\varepsilon,\ddot{f}_1\right)-$$

$$-\frac{1}{trA}y\left(t,\varepsilon,a_{22}\dot{f}_1-a_{12}\dot{f}_2\right)=\frac{\dot{f}_1(t)}{trA}+\frac{a_{22}f_1(t)-a_{12}f_2(t)}{\varepsilon trA}-\frac{f_1(0)}{\varepsilon}-\left[\frac{\dot{f}_1(0)}{trA}+\right.$$

$$\left.+\frac{a_{22}f_1(0)-a_{12}f_2(0)}{\varepsilon trA}-\frac{f_1(0)}{\varepsilon}\right]\cdot e_\varepsilon(t)-\frac{\varepsilon}{trA}y\left(t,\varepsilon,\ddot{f}_1\right)-\frac{1}{trA}\left[\frac{a_{22}\dot{f}_1-a_{12}\dot{f}_2}{trA}-\right.$$

$$\left.-\frac{a_{22}\dot{f}_1(0)-a_{12}\dot{f}_2(0)}{trA}e_\varepsilon(t)-\frac{\varepsilon}{trA}y\left(t,\varepsilon,a_{22}\ddot{f}_1-a_{12}\ddot{f}_2\right)\right]=$$

$$=\frac{\dot{f}_1(t)}{trA}-\frac{a_{22}\dot{f}_1-a_{12}\dot{f}_2}{(trA)^2}++\frac{a_{22}f_1(t)-a_{12}f_2(t)}{\varepsilon trA}-\frac{f_1(0)}{\varepsilon}-$$

$$-\left[\frac{\dot{f}_1(0)}{trA}+\frac{a_{22}f_1(0)-a_{12}f_2(0)}{\varepsilon trA}-\frac{f_1(0)}{\varepsilon}-\frac{a_{22}\dot{f}_1(0)-a_{12}\dot{f}_2(0)}{(trA)^2}\right]e_\varepsilon(t)+$$

$$+\frac{\varepsilon}{(trA)^2}y\left(t,\varepsilon,a_{22}\ddot{f}_1-a_{12}\ddot{f}_1\right)-\frac{\varepsilon}{trA}y\left(t,\varepsilon,\ddot{f}_1\right).$$

Следовательно,

$$x_1(t)=\int_0^t\left[y_1(\xi)+\frac{f_1(0)}{\varepsilon}\right]d\xi=\int_0^t y_1(\xi)d\xi+\frac{f_1(0)\cdot t}{\varepsilon}=\frac{f_1(t)-f_1(0)}{trA}-$$

$$-\frac{a_{22}[f_1(t)-f_1(0)]-a_{12}[f_2(t)-f_2(0)]}{(trA)^2}+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon trA}\int_0^t[a_{22}f_1(\xi)-a_{12}f_2(\xi)-f_1(0)trA]d\xi-$$

$$-\left[\frac{\dot{f}_1(0)}{trA}+\frac{a_{22}f_1(0)-a_{12}f_2(0)}{\varepsilon trA}-\frac{f_1(0)}{\varepsilon}-\frac{a_{22}\dot{f}_1(0)-a_{12}\dot{f}_2(0)}{(trA)^2}\right]\int_0^t e_\varepsilon(t)dt+$$

$$+\frac{\varepsilon}{(trA)^2}\int_0^t y\left(\xi,\varepsilon,a_{22}\ddot{f}_1-a_{12}\ddot{f}_1\right)d\xi-\frac{\varepsilon}{trA}\int_0^t y\left(\xi,\varepsilon,\ddot{f}_1\right)d\xi+\frac{f_1(0)\cdot t}{\varepsilon}=$$

$$=\left|\varepsilon\dot{e}_\varepsilon+trAe_\varepsilon=0,e_\varepsilon(0)=1,=>\int_0^t e_\varepsilon(\xi)d\xi=-\frac{\varepsilon[e_\varepsilon(t)-1]}{trA}\right|=$$

$$=\frac{f_1(t)-f_1(0)}{trA}-\frac{a_{22}[f_1(t)-f_1(0)]-a_{12}[f_2(t)-f_2(0)]}{(trA)^2}+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon trA}\int_0^t[a_{22}f_1(\xi)-a_{12}f_2(\xi)]\,d\xi+\left[\frac{\dot{f}_1(0)}{trA}\varepsilon+\right.$$

$$\left.+\frac{a_{22}f_1(0)-a_{12}f_2(0)}{trA}-f_1(0)-\frac{a_{22}\dot{f}_1(0)-a_{12}\dot{f}_2(0)}{(trA)^2}\varepsilon\right]\cdot\frac{e_\varepsilon(t)-1}{trA}+$$

$$+\frac{\varepsilon}{(trA)^2}\int_0^t y\left(\xi,\varepsilon,a_{22}\ddot{f}_1-a_{12}\ddot{f}_1\right)d\xi-\frac{\varepsilon}{trA}\int_0^t y\left(\xi,\varepsilon,\ddot{f}_1\right)d\xi\,;$$

Тогда для нормы $x_1(t)$ имеем оценку:

$$\|x_1(t)\| \le \frac{\|f_1(t)\| + |f_1(0)|}{trA} + \frac{|a_{22}|[\|f_1(t)\| + |f_1(0)|] + |a_{12}|[\|f_2(t)\| + |f_2(0)|]}{(trA)^2}$$

$$+\frac{1}{\varepsilon trA}\left\|\int_0^t [a_{22}f_1(\xi) - a_{12}f_2(\xi)]d\xi\right\| + \left|\frac{\dot{f}_1(0)}{trA}\varepsilon + \frac{a_{22}f_1(0) - a_{12}f_2(0)}{trA} - f_1(0) -\right.$$

$$\left.-\frac{a_{22}\dot{f}_1(0) - a_{12}\dot{f}_2(0)}{(trA)^2}\varepsilon\right| \cdot \frac{\|e_\varepsilon\| + 1}{trA} + \frac{\varepsilon}{(trA)^2} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\|a_{22}\ddot{f}_1 - a_{12}\ddot{f}_1\|}{trA} +$$

$$+\frac{\varepsilon}{trA} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\|\ddot{f}_1\|}{trA}.$$

Следовательно, если $\int_0^t [a_{22}f_1(\xi) - a_{12}f_2(\xi)]d\xi \ne 0$, то $\lim_{\varepsilon\to+0}\|x_1(t)\| = +\infty$.

Этот факт является нежелательным.

5.Выводы.

Асимптотическое разложение решения сингулярно возмущенной задачи Коши, для системы обыкновенных дифференциальных уравнений ,с постоянными коэффициентами можно получить с помощью спектральной теории,при этом возможно оценка остаточного член через коэффициенты системы уравнений.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Тихонов А.Н. О зависимости решений дифференциальных уравнений от малого параметра. // Математический сборник. 1948. Т.22. - №2. – с.193-204.

[2] Тихонов А.Н. О системах дифференциальных уравнений, содержащих параметры. // Математический сборник. 1950. 27(69) – с.147-156.

[3] Тихонов А.Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. // Математический сборник. 1952. Т.31(73). - №3. – с.575-586.

[4] Вишик М.И., Люстерник Л.А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. // УМН. 1957. Т.12. - №5. – с.3-122.

[5] Вишик М.И., Люстерник Л.А. Об асимптотике решений краевых задач для квазилинейных дифференциальных уравнений. // ДАН СССР. 1958. Т.121. - №5. – с.778-781.

[6] Васильева А.Б. Асимптотика решений некоторых задач для обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной. // УМН. 1963. Т.18. - №3. – с.15-86.

[7] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические разложения решений сингулярно возмущенных уравнений. М.: Наука, 1973. 272с.

[8] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. – М.: Высш. шк., 1990. – 200с.

[9] Иманалиев М.И. Асимптотические методы в теории сингулярно возмущенных интегро – дифференциальных систем. Фрунзе. Илим. 1972. 356с.

[10] Иманалиев М.И. Колебания и устойчивость сингулярно возмущенных интегро – дифференциальных систем. Фрунзе. Илим. 1974. 352с.

[11] Бутузов В.Ф. Об асимптотике решений сингулярно возмущенных уравнений эллиптического типа в прямоугольной области.// Дифференциальные уравнения. 1975. Т.2. - №6. – с.1030-1041.

[12] Бутузов В.Ф. Угловой погранслой в смешанных сингулярно возмущенных задачах для гиперболических уравнений.// Математический сборник. 1977. Т.104. - №3. – с.460-485.

[13] Тупчиев В.А. Асимптотика решения краевой задачи для системы дифференциальных уравнений первого порядка с малым параметром при производных. // ДАН СССР. 1962. Т.143. - №6. – с.1296-1299.

[14] Треногин В.А. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных. // Математический сборник. 1952. Т.31(73). - №3. – с.575-586.

[15] Ломов С.А. Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 400с.

[16] Кальменов Т.Ш.,Ахметова С.Т.К спектральной теории с отклонящимся аргументом,Математический журнал,Алматы,т.4.,№3.с.41-48,2004.

[17] Кальменов Т.Ш.,Садыбеков М.А.,Дифференциальные уравнения, 26 (1), 55–59 (1990).

[18] Кальменов Т.Ш.,Искакова У.А.Дифференциальные уравнения, 45 (10), 1460–1466 (2009).

[19] Orazov I., ShaldanbaevA,Sh,ShomanbayevaM.About the nature of the spectrum of the periodic problemn for the heat equation with a deviating argument.// Abstract and Applied Analysis. Volume 2013(2013).Article ID 128363,6 pages htt://dx.doi.org/10.1155/2013/128363.

[20] Kal'menov T.Sh. and Shaldanbayev A.S. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 18 (5), 471–492 (2010).

[21] Shaldanbayev A.Sh., Orazov I., and Shomanbayeva M. AIP Conference Proceedings 1676, 020072 (2015); http://dx.doi.org/10.1063/1.4930498.

[22] Садыбеков М.А.,Турметов Б.Х.,Торебек Б.Т.,Дифференциальные уравнения электронный журнал, 2014, N157(2014).

[23]] Садыбеков М.А.,Турметов Б.Х., Дифференциальные уравнения электронный журнал, 50:2, 268–273 (2014).

[24] Кальменов Т.Ш.,Садыбеков М.А.,Искакова У.А.Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 24:6,777–783 (2016).
[25] Садыбеков М.А.,ДілдәбекГ.,Тенгаева А, Filomat 31:4, 981–987 (2017).
[26] Садыбеков М.А.,Иманбаев Н.С., Mathematical Notes, 101:5, 878–887 (2017).
[27] Садыбеков М.А., Торебек Б.Т.,Турметов Б.Х.,Сибирский математический журнал58:1, 153–158 (2017).
[28] Кальменов Т.Ш.,Садыбеков М.А.,Сибирский математический журнал 58:2, 227–231 (2017).

REFERENCES

[1] Tikhonov A.N. Mat. Sbornik 22 (2) 193–204 (1948). (In Russian.)А.Н.Тихонов
[2] Tikhonov A.N. Mat. Sbornik 27 (69) 147–156 (1950). (In Russian.)
[3] Tikhonov A.N. Mat. Sbornik 31 (33) 575âA ¸S-586 (1952). (In Russian.) ˘
[4] Vishik M. and Lyusternik L. Usp.Mat.Nauk 12, 3–122 (1957). (In Russian.)
[5] Vishik M. and Lyusternik L. Reports of the Academy of Sciences of USSR 121 (5), 778–781 (1958). (In Russian.)
[6] Vasil'eva A. Usp.Mat.Nauk 18 (3), 15–86 (1963). (In Russian.)
[7] Vasil'eva A. and Butuzov V. Asymptotic Expansions of the Solutions of Singularly Perturbed Equations, Nauka,Moscow, 1973. (In Russian).
[8] Vasil'eva A. and Butuzov V. Asymptotic Methods in the Theory of Singularly Perturbation, VischajaShkola, Moscow, 1990. (In Russian).
[9] Imanaliev M.I. Asymptotical Methods in the Theory of Singulary Perturbed Integro-Differential Systems, Bishkek, Ilim, 1972. (in Russian).
[10] Imanaliev M.I. Oscillations and stability of singularly perturbed integro - differential systems, Bishkek, Ilim,1974. (in Russian).
[11] Butuzov V. Comput. Math. Math. Phys., 12(3), 14–34 (1972).
[12] Butuzov V. The angular boundary layer in mixed singularly perturbed problems for hyperbolic equations, Math.,USSR-Sb. 33, 403–425 (1977).
[13] Tupchiev V., Reports of the Academy of Sciences of USSR 143 (6) ,1296–1299 (1962).
[14] Trenogin V. Russian Math. Surveys 25, pp. 119–156 (1970).
[15] S. Lomov, Introduction to the General Theory of Singular Perturbations, American Mathematical Society,Providence, RI, 1992.
[16] Kal'menov T.Sh., Akhmetova S.T., Shaldanbaev A.Sh. "On the spectral theory of the equations with deviating argument," Mat. Zh. Almaty, vol. 4, № 3. pp. 41-48, 2004. (In Russian).
[17] Kal'menov T.Sh. and Sadybekov M.A. Differential Equations 26 (1), 55–59 (1990).
[18] Kal'menov T.Sh. and Iskakova U.A. Differential Equations 45 (10), 1460–1466 (2009).
[19]Orazov I., ShaldanbaevA,Sh,ShomanbayevaM.About the nature of the spectrum
of the periodic problemn for the heat equation with a deviating argument.// Abstract and Applied Analysis. Volume 2013(2013).Article ID 128363,6 pages htt://dx.doi.org/10.1155/2013/128363.
[20] Kal'menov T.Sh. and Shaldanbayev A.S. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 18 (5), 471–492 (2010).
[21] Shaldanbayev A.Sh., Orazov I., and Shomanbayeva M. AIP Conference Proceedings 1676, 020072 (2015); http://dx.doi.org/10.1063/1.4930498.
[22] Sadybekov M. A., Turmetov B. Kh. and Torebek B. T. Electronic Journal of Differential Equations 2014,Article Number 157 (2014).
[23] Sadybekov M. A. and Turmetov B. Kh. Differential Equations 50:2, 268–273 (2014).
[24] Kal'menov T. S., Sadybekov M. A. and Iskakova U. A. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 24:6, 777–783 (2016).
[25] Sadybekov M., Dildabek G. and Tengayeva A. Filomat 31:4, 981–987 (2017).
[26] Sadybekov M. A. and Imanbaev N. S. Mathematical Notes, 101:5, 878–887 (2017).
[27] Sadybekov M. A., Torebek B. T. and Turmetov B. Kh. Siberian Mathematical Journal 58:1, 153–158 (2017).
[28] Kal'menov T. Sh. and Sadybekov M. A. Siberian Mathematical Journal 58:2, 227–231 (2017).

ӘОК 517.94

А.Б.Иманбаева, А.Ш.Шалданбаев, А.А.Копжасарова

М.О. Әуезов атындағы Оңтүстік-Қазақстан мемлекеттік университеті, Шымкент қ.

КОЭФФИЦИЕНТТЕРІ ТҰРАҚТЫ КӘДІМГІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР СИСТЕМАСЫНЫҢ СИНГУЛЯР ӘСЕРЛЕНГЕН КОШИ ЕСЕБІН СПЕКТРӘЛДІК ӘДІСПЕН ШЕШУ

Аннотация: Бұл еңбекте спектрәлдік әдіс бойынша, коэффициенттері тұрақты кәдімгі дифференциалдық теңдеулер системасының сингуляр әсерленген Коши есебі шешілді $L_\varepsilon\vec{x} = \varepsilon\dot{\vec{x}} + A\vec{x} = \overrightarrow{f(t)}$.

Ключевые слова: сингуляр әсерленген, спектрәлді әдіс, Гильберт-Шмидттің теоремасы, қаспақ, асимптотикалық таралым.