N E W S
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES
ISSN 1991-346X
Volume 5, Number 315 (2017), 127 – 133

UDC 517.94

A.A. Kopzhasarova, A.Sh. Shaldanbayev, A.B. Imanbayeva

Southern Kazakhstan state university of Auyezov M.
shaldanbaev51@mail.ru

THE DECISION IS SINGULAR THE INDIGNANT TASK OF CAUCHY BY A SIMILARITY METHOD

Abstract: In the real work, the similarity method, has received frontier layer decomposition of the decision is singular the indignant task of Cauchy:

$L_\varepsilon y$=εy' (x) +q(x)y (x) =f(x), y(0)=0,

where q(x) ≥ α> 0, $f(x) \in W_2^n[0,1]$, $q(x) \in W_2^n[0,1]$.

Keywords:singulyarny, self-conjugate operator, similarity method, Gilbert-Schmidt's theorem, spectral decomposition, interface, asymptotic decomposition.

УДК 517.94

А.А.Копжасарова, А.Ш.Шалданбаев, Иманбаева А.Б.

Южно-Казахстанский государственный университет им. М.О. Ауезова, г.Шымкент

Решение сингулярно возмущенной задачи Коши методом подобия

Аннотация: В настоящей работе, методом подобия, получено погранслойное разложение решения сингулярно возмущенной задачи Коши:

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y'(x) + q(x)y(x) = f(x), y(0) = 0,$$

где $q(x) \geq \alpha > 0, f(x) \in W_2^n[0,1], q(x) \in W_2^n[0,1]$.

Ключевые слова: сингулярный, самосопряженный оператор, метод подобия, теорема Гильберта-Шмидта, спектральное разложение, пограничный слой, асимптотическое разложение.

1.Введение. Рассмотрим в пространстве $L^2(0,1)$ сингулярно возмущенную задачу Коши:

$$L_\varepsilon y = \varepsilon y'(x) + q(x)y(x) = f(x), 0 < x \leq 1 \tag{1.1}$$

$$y(0) = 0, \tag{1.2}$$

где $f(x) \in L^2(0,1), q(x) \in C[0,1]$, $\varepsilon > 0$ - малый параметр.

Определение 1.1. Регулярным решением начальной задачи (1.1)-(1.2) называется непрерывно дифференцируемая в $(0,1]$ и непрерывная в $[0,1]$ функция $y(x)$, удовлетворяющая уравнения (1.1) и начального условия (1.2).

Определение 1.2. Функция $y(x)$ называется сильным решением начальной задачи (1.1)-(1.2), если существует последовательность регулярных решений $\{y_n(x)\}$, $n = 1,2, \ldots$ начальных задач (1.1)-(1.2), такая, что $Ly \to f$, $y_n \to y$ в пространстве $L^2(0,1)$.

Определение 1.3. Начальная задача (1.1)-(1.2) называется сильно разрешимой, если для любого $f(x) \in L^2(0,1)$ существует единственное сильное решение начальной задачи (1.1)-(1.2).

Отметим, что при изучении различных сингулярно возмущенных задач возникает необходимость изучения задачи (1.1)-(1.2) [1.].Существуют различные методы решения этой задачи [1-5],но все они,или почти все являются полуэмпирическими.В этих работах точно указываются порядок остаточного члена по малому параметруε,но коэффициент при параметре остается не известным [6-8].Среди прикладников бытует мнение,что сингулярно возмущенные задачи стоять обособленно от остальной математики,поэтому широко известные методы здесь не применимы.Но как показаны в работах [9-15],такие задачи можно решать методами спектральной теории операторов [16-17],что и сделано в данной работе.

2.Метод исследования.

Сначала покажем сильную разрешимость начальной задачи (1.1)-(1.2).

Теорема 2.1.Если $q(x)$ непрерывная функция на отрезке $[0,1]$, удовлетворяющая условию

$$q(x) \geq \min q(x) = \alpha > 0, \tag{2.1}$$

то начальная задача (1.1)-(1.2) сильно разрешимо в пространстве $L^2(0,1)$ и это сильное решение имеет вид:

$$y(x, \varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Tf, S\varphi_n)}{\varepsilon \cdot \mu_n} \cdot T^{-1}\varphi_n(x), \tag{2.2}$$

где

$$Tf(x) = exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x q(t)dt\right) \cdot f(x), T^{-1}g(x) = exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x q(t)dt\right) \cdot g(x),$$

$$\varphi_n(x) = \sqrt{2}\sin\mu_n x\,, \mu_n = (-1)^n \left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right), n = 0,1,2, \ldots, S\varphi_n(x) = \varphi_n(1-x), n = 0,1,2, \ldots$$

Доказательство.

(а) Единственность. Предварительно докажем одну лемму, которая может иметь и самостоятельное значение.

Лемма 2.1. Если $q(x)$ непрерывная в $[0,1]$ функция, удовлетворяющая условию

$$q(x) \geq \alpha > 0, \tag{2.1}$$

то для любой функции $y(x) \in C^1(0,1] \cap C[0,1]$ и удовлетворяющей условию $y(0) = 0$ имеет место неравенство:

$$\|L_\varepsilon y\| \geq \alpha \cdot \|y\|. \text{ (2.3)}$$

Доказательство. Умножив обе части уравнения (1.1) скалярно на $y(x)$, получим:

$$\varepsilon(y', y) + \left(q(xy, y)\right) = (f(x), y),$$

или

$$\frac{\varepsilon y^2(1)}{2} + \int_0^1 q(x)y^2 dx = \int_0^1 f(x)y(x)dx.$$

Отсюда в силу неравенства (2.1), имеем

$$\alpha \cdot \|y\|^2 \leq \frac{\varepsilon y^2(1)}{2} + \int_0^1 q(x)y^2 dx = (f, y) \leq |(f, y)| \leq \|y\| \cdot \|f\|.$$

Сократив обе части полученного неравенства на $\|y\|$, получим требуемое утверждение леммы. Из этой леммы следует единственность сильного решения.

Предположим, что начальная задача (1.1)-(1.2) имеет более двух решений, тогда существуют по крайней мере два решения: $u(x)$ и $v(x)$ такие, что $\|u(x)-v(x)\| \neq 0$, и $u_n \to u$, $L_\varepsilon u_n \to f$; $v_n \to v$, $L_\varepsilon v_n \to f$, $(n \to \infty)$, где $\{u_n(x)\}$ и $\{v_n(x)\}$ последовательности классических решений задачи (1.1)-(1.2). Тогда их разность $z_n = u_n - v_n$ является решением регулярной задачи $L_\varepsilon z_n = f_n - g_n, n = 1,2, \ldots$, поэтому в силу неравенства (2.3) имеет место неравенства:

$$\alpha \cdot \|z_n\| \leq \|L_\varepsilon z_n\| = \|f_n - g_n\|, n = 1,2, \ldots$$

Переходя к пределу в этом неравенстве ,при$n \to \infty$, получим

$$\alpha \cdot \|u - v\| = 0, => \|u - v\| = 0,$$

что противоречит нашему предположению, мы пришли к противоречию, стало быть не верно наше предположение о существовании более двух решений. Следовательно, существует не более одного решения.

(б) Существование решения. Пусть

$$y_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(Tf, S\varphi_n)}{\varepsilon \cdot \mu_n} \cdot T^{-1}\varphi_n(x) = T^{-1} \sum_{n=0}^{N} \frac{(Tf, S\varphi_n)}{\varepsilon \cdot \mu_n} \cdot \varphi_n(x),$$

тогда

$$y_N(x) = exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x q(t)dt\right) \cdot \sum_{n=0}^{N} \frac{(Tf, S\varphi_n)}{\varepsilon \cdot \mu_n} \cdot \varphi_n(x),$$

поэтому

$$y'_N(x) = -\frac{q(x)}{\varepsilon} y_N(x) + exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x q(t)dt\right) \cdot \sum_{n=0}^{N} \frac{(Tf, S\varphi_n)}{\varepsilon \cdot \mu_n} \cdot \varphi'_n(x) = -\frac{q(x)}{\varepsilon} y_N(x) +$$

$$+exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x q(t)dt\right) \cdot \sum_{n=0}^{N} \frac{(Tf, S\varphi_n)}{\varepsilon} \cdot S\varphi_n.$$

Следовательно,

$$L_\varepsilon y_N = \varepsilon \cdot y'_N + q(x) y_N(x) = exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x q(t)dt\right) \cdot \sum_{n=0}^{N} (Tf, S\varphi_n) \cdot S\varphi_n.$$

Оператор S является унитарным оператором, поэтому он переводит ортонормированный базис в ортонормированный базис, стало быть, имеет место Фурье разложение:

$$Tf(x) = \sum_{n=0}^{N} (Tf, S\varphi_n) \cdot S\varphi_n(x),$$

следовательно, последовательность $\sum_{n=0}^{N}(Tf, S\varphi_n) \cdot S\varphi_n(x)$ является фундаментальной в $L^2(0,1)$. Тогда из непрерывности оператора T^{-1} следует фундаментальность последовательности $\{L_\varepsilon y_N\}$, $N = 1,2, \ldots$ в $L^2(0,1)$, а из априорной оценки (2.3) видно фундаментальность $\{y_N\}$ в $L^2(0,1)$.

Заметим, также, что функция

$$exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x q(t)dt\right) \cdot \sum_{n=0}^{N} (Tf, S\varphi_n) \cdot S\varphi_n$$

непрерывно в $[0,1]$, поэтому $\{y_N(x)\}$- есть последовательность классических решений. Итак, нами установлено, что $y_N(x) \to y(x)$,$L_\varepsilon y_N = g_n \to g$ в $L^2(0,1)$, поэтому функция $y(x)$ является сильным решением начальной задачи (1.1)-(1.2).

Теперь исследуем гладкость полученного сильного решения. В силу (2.1) и (2.3) имеет место неравенство

$$\|q(x)y_N(x) - q(x)y_{N'}(x)\| = \|q(x)[y_N(x) - y_{N'}(x)]\| = \left[\int_0^1 q^2(x)[y_N(x) - y_{N'}(x)]^2dx\right]^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\max_{0\leq x\leq 1}|q| \cdot \|y_N - y_{N'}\| \leq \frac{\max|q|}{\alpha}\|L_\varepsilon y_N - L_\varepsilon y_{N'}\|,$$

поэтому последовательность $\{q(x)y_N(x)\}$ также фундаментальна в пространстве $L^2(0,1)$, следовательно, последовательность $\{y_{N'}\}, N = 1,2,\ldots$ также фундаментальна в пространстве $L^2(0,1)$. Таким образом, существуют функции $y(x)$ и$y'(x)$ из $L^2(0,1)$, такие, что $y_N(x) \to y(x), y_{N'}(x) \to y'(x)$в $L^2(0,1)$, а это означает, что функция $y(x)$ является элементом пространства Соболева $W_2^{'}[0,1]$. Известно, что элементы этого пространства есть абсолютно непрерывные функции, имеющие обобщенные производные первого порядка, суммируемые с квадратом в $[0,1]$.

Переходя к пределу при $N \to \infty$ в формуле

$$y_N(x) = \sum_{n=0}^{N} \frac{(Tf, S\varphi_n)}{\varepsilon \cdot \mu_n} \cdot T^{-1}\varphi_n(x),$$

получим

$$y(x,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Tf, S\varphi_n)}{\varepsilon \cdot \mu_n} \cdot T^{-1}\varphi_n(x),$$

а переходя к пределу при $N \to \infty$, в равенстве

$$L_\varepsilon y_N = \varepsilon \cdot y'_N + q(x)y_N(x) = exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x q(t)dt\right) \cdot \sum_{n=0}^{N}(Tf, S\varphi_n) \cdot S\varphi_n =$$

$$T^{-1} \cdot \sum_{n=0}^{N}(Tf, S\varphi_n) \cdot S\varphi_n\,(x),$$

получим

$$L_\varepsilon y = T^{-1} \cdot Tf = f(x).$$

Следствие 2.1. Для любого сильного решения задачи Коши имеет место неравенство:

$$\|y\| \leq \frac{1}{\alpha} \cdot \|f\|,$$

иначе говоря,

$$\|L_\varepsilon^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}. \quad (2.4)$$

3.Результаты исследований

Нами доказана следующая основная,

Теорема 3.1. Если

(а) $f(x) \in W_2^n[0,1]$,$q(x) \in W_2^n[0,1]$;

(б) $q(x) \geq \alpha > 0$,

то сильное решение сингулярно возмущенной задачи Коши (1.1)-(1.2) принадлежит пространству $W_2^{n+1}[0,1]$, и удовлетворяет оценке:

$$\left\|y(x,\varepsilon,f) - \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[\frac{J^kf(x)}{q(x)} - \frac{J^kf(0)}{q(0)} \cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x q(t)dt}\right] \cdot \varepsilon^k\right\| \leq \frac{\varepsilon^n}{\alpha} \cdot \|J^nf\|,$$

где $Jf(x) = \frac{d}{dx}\frac{f(x)}{q(x)}$, $J^0 = I$ - единичный оператор.

4.Обсуждение результатов

Вывод асимптотического разложения.

Из Фурье представления сильного решения сингулярно возмущенной задачи можно вывести погранслойное разложение, оно появляется из формулы коэффициентов Фурье, при интегрировании по частям. Предполагая функции $f(x)$ и$g(x)$достаточно гладкими, преобразуем коэффициентов Фурье формулы (2.2), с целью вывода погранслойного разложения.

$$(Tf, S\varphi_n) = \int_0^1 e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x q(t)dt} f(x)\varphi_n(1-x)dx = \int_0^1 f(x)\,\varphi_n(1-x)\frac{\varepsilon}{q(x)} de^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x q(t)dt} =$$

$$\varepsilon\int_0^1 \frac{f(x)}{q(x)}\varphi_n(1-x)de^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x q(t)dt} = \varepsilon\frac{f(x)}{q(x)}\varphi_n(1-x)\cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x q(t)dt}\Big|_0^1 -$$

$$-\varepsilon\int_0^1 \left[\left(\frac{f}{q}\right)'\varphi_n(1-x) - \frac{f}{q}\varphi'_n(1-x)\right]\cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x q(t)dt}dx = -\frac{f(0)\varphi_n(1)}{q(0)}\cdot\varepsilon -$$

$$-\varepsilon\int_0^1 \left[\frac{f(x)}{q(x)}\right]' e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x q(t)dt}\cdot\varphi_n(1-x)dx + \varepsilon\int_0^1 \frac{f(x)}{q(x)}\varphi'_n(1-x)\cdot e^{\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x q(t)dt}dx =$$

$$= -\frac{f(0)}{q(0)}\varphi_n(1)\cdot\varepsilon - \varepsilon\left(T\left(\frac{f}{q}\right)', S\varphi_n\right) + \varepsilon\mu_n\left(T\left(\frac{f}{q}\right), \varphi_n\right);$$

Подставив это выражение в формулу (2.2), получим формулу подчиняющемуся индуктивному методу

$$y(x,\varepsilon) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(Tf, S\varphi_n)}{\varepsilon\cdot\mu_n}\cdot T^{-1}\varphi_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\left[-\frac{f(0)\varphi_n(1)}{q(0)\mu_n} - \frac{\left(T\left(\frac{f}{q}\right)', S\varphi_n\right)}{\mu_n} + \left(T\left(\frac{f}{q}\right), \varphi_n\right)\right]\cdot$$

$$\cdot T^{-1}\varphi_n(x) = T^{-1}\left[-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(0)\varphi_n(1)}{\mu_n}\varphi_n(x)\right] - \varepsilon y\left(x,\varepsilon,\left(\frac{f}{q}\right)'\right) + T^{-1}T\left(\frac{f}{q}\right) =$$

$$\frac{f(x)}{q(x)} - T^{-1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f(0)\varphi_n(1)}{q(0)\mu_n}\varphi_n(x) - \varepsilon y\left(x,\varepsilon,\left(\frac{f}{q}\right)'\right) =$$

$$= \frac{f(x)}{q(x)} - \frac{f(0)}{q(0)}\cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x q(t)dt} - \varepsilon y\left(x,\varepsilon,\left(\frac{f}{q}\right)'\right), (3.1)$$

где для удобства использовано обозначение $y(x,\varepsilon) = y(x,\varepsilon,f)$ – решение сингулярно возмущенной задачи Коши с правой частью f. Поясним появление второго члена:

$\varphi_n(x) = \sqrt{2}\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x, n = 0,1,2, \ldots$ отсюда $\varphi_n(1) = (-1)^n\sqrt{2}, n = 0,1,2, \ldots$

$$\varphi_n(1)\cdot\varphi_n(x) = 2(-1)^n\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x, n = 0,1,2, \ldots,$$

$$\frac{\varphi_n(1)\cdot\varphi_n(x)}{\mu_n} = \frac{2(-1)^n\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x}{(-1)^n\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)} = \frac{2\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x}{\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Единицу разложим в ряд Фурье по системе $\{\varphi_n(x)\}$.

$1 = \sum_{n=0}^{\infty}(1,\varphi_n)\,\varphi_n(x)$, где $(1,\varphi_n)$ - Фурье коэффициенты.

$$(1,\varphi_n) = \int_0^1 \sqrt{2}\sin\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)xdx = -\frac{\sqrt{2}\cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right)x}{n\pi + \frac{\pi}{2}}\Bigg|_0^1 = \frac{\sqrt{2}}{n\pi + \frac{\pi}{2}},$$

$$(1,\varphi_n)\cdot\varphi_n(x)=\frac{2\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)x}{\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{\varphi_n(1)\cdot\varphi_n(x)}{\mu_n}.$$

Формула (3.1) позволяет применить, метод математической индукции, для вывода формулы остаточного члена погранслойного разложения. Для удобства дальнейших вычислений вводим оператор:

$$Jf(x)=\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{q(x)},$$

которая делит функцию $f(x)$ на$q(x)$, затем дифференцирует полученный результат один раз. Тогда полученная нами формула (3.1) принимает вид:

$$y(x,\varepsilon,f)=\frac{f(x)}{q(x)}-\frac{f(0)}{q(0)}\cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x q(t)dt}-\varepsilon y(x,\varepsilon,Jf).$$

Предположим, что при $m=n$ верна формула

$$y(x,\varepsilon,f)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[\frac{J^kf(x)}{q(x)}-\frac{J^kf(0)}{q(0)}\cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x q(t)dt}\right]\cdot\varepsilon^k+(-1)^n y(x,\varepsilon,J^nf)\cdot\varepsilon^k,$$

где$J^0=I$. Покажем, что тогда она имеет место и при $m=n+1$. В самом деле, по реккурентной формуле, имеем:

$$y(x,\varepsilon,J^nf)=\frac{J^nf(x)}{q(x)}-\frac{J^nf(0)}{q(0)}\cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x q(t)dt}-\varepsilon\cdot y(x,\varepsilon,J^{n+1}f),$$

поэтому

$$y(x,\varepsilon,f)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[\frac{J^kf(x)}{q(x)}-\frac{J^kf(0)}{q(0)}\cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x q(t)dt}\right]\cdot\varepsilon^k+$$
$$+(-1)^n\left[\frac{J^nf(x)}{q(x)}-\frac{J^nf(0)}{q(0)}\cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x q(t)dt}\right]\cdot\varepsilon^n+(-1)^{n+1}y(x,\varepsilon,J^{n+1}f)\cdot\varepsilon^{n+1}.$$

Таким образом,

$$y(x,\varepsilon,f)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\left[\frac{J^kf(x)}{q(x)}-\frac{J^kf(0)}{q(0)}\cdot e^{-\frac{1}{\varepsilon}\int_0^x q(t)dt}\right]\cdot\varepsilon^k+(-1)^n y(x,\varepsilon,J^nf)\cdot\varepsilon^n$$

где $J^0=I$ - единичный оператор, а остаточный член $y(x,\varepsilon,J^nf)$ является решением задачи Коши:

$$\varepsilon y'(x)+q(x)y=J^nf,\; y(0)=0,$$

и поэтому удовлетворяет оценке:

$$\|y(x,\varepsilon,J^nf)\|\le\frac{\|J^nf(x)\|}{\alpha}.$$

5.Выводы.Если коэфициент уравнения строго положителный,то остаток погранслойного разложения допускает оценку через этот коэфициент.Если требуемая точнось равна δ, то достаточно брать $\frac{\|J^nf(x)\|}{\alpha}\varepsilon^n<\delta$.По видимому,это весомый аргумент при численом решении задачи Коши,особенно в той ситуации, когда величина α очень мала.

ЛИТЕРАТУРА

[1] Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимтотические методы в теорий сингулярных возмущений. -М.: Высш. шк. 1990. -200с.

[2] Вишик М.И., Люстерник А.А. Регулярное вырождение и погранслойный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи математических наук, 1957. №5. с.3-122.

[3] Tikhonov A. N. Mat. Sbornik 27, 147-156 (1950), (in Russian).

[4] Imanaliev M. I. Asymptotical Methods in the Theory of Singulary Perturbed Integro-Differential Systems, Ilim,Bishkek,

[5] Lomov S. Introduction to the General Theory of Singular Perturbations, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.
[6] Butuzov V. Comput. Math. Math. Phys. 12, 14-34 (1972).
[7] Vasil'eva A., and Tupchiev V. Soviet Math. Dokl. 9, 179-183 (1968).
[8] Trenogin V. Russian Math. Surveys 25, 119-156 (1970).
[9] Kal'menov T. Sh., Akhmetova S. T., and. Shaldanbaev A. Sh, Mat. Zh. Almaty 4, 41–48 (2004), (in Russian).
[10] T. Sh. Kal'menov, and U. A. Iskakova, Doklady Mathematics 45, 1460-1466 (2009).
[11] T. Sh. Kal'menov, and A. Sh. Shaldanbaev, Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 18, 352–369 (2010).
[12] A. Kopzhassarova, and A.Sarsenbi, Abstract and Applied Analysis 2012, 1-6 (2012), (Article ID 576843).
[13] Orazov I., ShaldanbaevA,Sh,ShomanbayevaM.About the nature of the spectrum of the periodic problemn for the heat equation with a deviating argument.// Abstract and Applied Analysis. Volume 2013(2013). Article ID 128363,6 pages. htt://dx.doi.org/10.1155/2013/128363.
[14] Shaldanbaev A. Sh. Manat Shomanbayeva, Isabek Orazov, Solution of a singularly perturbed Cauchy problem using amethod of a deviating argument, AIP Conference Proceedings 1676, 020072 (2015); doi: 10.1063/1.4930498.
[15] A. Sh. Shaldanbaev, Manat Shomanbayeva, and Asylzat Kopzhassarova. Solution of a singularly perturbed Cauchy problem for linear systems of ordinary differential equations by the method of spectral decomposition, AIP Conference Proceedings 1759, 020090 (2016); doi: 10.1063/1.4959704.
[16] Ахиезер Н.Н., Глазман Н.М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве.-М.: Наука ,1966, 544с.
[17] Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т.1-2. – М.: Мир, 1977.

REFERENCES

[1] Vasil'eva A.B., Butuzov V.F. Asimtoticheskie metody v teorij singuljarnyh vozmushhenij.-M.: Vyssh. shk. **1990**.-200s.
[2] Vishik M.I., Ljusternik A.A. Reguljarnoe vyrozhdenie i pogranslojnyj sloj dlja linejnyh differencial'nyh uravnenij s Malym parametrom // Uspehi matematicheskih nauk, **1957.** №5. s.3-122.
[3] Tikhonov A. N. Mat. Sbornik 27, 147-156 (**1950**), (in Russian).
[4] Imanaliev M. I. Asymptotical Methods in the Theory of Singulary Perturbed Integro-Differential Systems, Ilim, Bishkek.
[5] Lomov S. Introduction to the General Theory of Singular Perturbations, American Mathematical Society, Providence, RI, 1992.
[6] Butuzov V. Comput. Math. Math. Phys. 12, 14-34 (**1972**).
[7] Vasil'eva A., and Tupchiev V. Soviet Math. Dokl. 9, 179-183 (**1968**).
[8] Trenogin V. Russian Math. Surveys 25, 119-156 (**1970**).
[9] Kal'menov T. Sh., Akhmetova S. T., and Shaldanbaev A. Sh. Mat. Zh. Almaty 4, 41–48 (**2004**), (in Russian).
[10] Kal'menov T. Sh., and Iskakova U. A. Doklady Mathematics 45, 1460-1466 (**2009**).
[11] Kal'menov T. Sh., and Shaldanbaev A. Sh. Journal of Inverse and Ill-Posed Problems 18, 352–369 **(2010).**
[12] Kopzhassarova A., and Sarsenbi A. Abstract and Applied Analysis 2012, 1-6 (**2012**), (Article ID 576843).
[13] Orazov I., ShaldanbaevA, Sh,Shomanbayeva M. About the nature of the spectrum of the periodic problemn for the heat equation with a deviating argument.// Abstract and Applied Analysis. Volume 2013(**2013**). Article ID 128363,6 pages htt://dx.doi.org/10.1155/2013/128363.
[14] Shaldanbaev A. Sh. Manat Shomanbayeva, Isabek 0razov. Solution of a singularly perturbed Cauchy problem using amethod of a deviating argument, AIP Conference Proceedings 1676, 020072 (**2015**); doi: 10.1063/1.4930498.
[15]A. Sh. Shaldanbaev, Manat Shomanbayeva, and Asylzat Kopzhassarova, Solution of a singularly perturbed Cauchy problem for linear systems of ordinary differential equations by the method of spectral decomposition, AIP Conference Proceedings 1759, 020090 (**2016**); doi: 10.1063/1.4959704.
[16] Ahiezer N.N., Glazman N.M. Teorija linejnyh operatorov v gil'bertovom prostranstve.-M.:Nauka, **1966**.,-544s.
[17] Rid M., Sajmon B. Metody sovremennoj matematicheskoj fiziki. T.1-2. – M.: Mir, **1977.**

ӘОЖ 517.94

А.А. Копжасарова, А.Ш. Шалданбаев, А.Б. Иманбаева

Әуезов атындағы Оңтүстік-Қазақсан университеті, Шымкент қ.

Ұқсастық әдісі бойынша, сингуляр әсерленген Кошидің есебін шешу

Аннотация: Бұл еңбекте, мына, $L_\varepsilon y = \varepsilon y'(x) + q(x)y(x) = f(x), y(0) = 0$, сингуляр әсерленген Коши есебінің шешімінің асимптотикалық таралымы алынды, мұндағы $q(x) \geq \alpha > 0, f(x) \in W_2^n[0,1]$, $q(x) \in W_2^n[0,1]$.

Тірек сөздер: сингуляр, жалқы оператор, ұқсастық әдісі, Гилберт пен Шмидтің теоремасы, спектрәл-дік таралым, қаспақ, асимтотикалық таралым.