**N E W S**
OF THE NATIONAL ACADEMY OF SCIENCES OF THE REPUBLIC OF KAZAKHSTAN
**PHYSICO-MATHEMATICAL SERIES**
ISSN 1991-346X
Volume 5, Number 315 (2017), 143 – 148

**S.R.Myrzakul[1], F.B.Belisarova[1], T.R.Myrzakul[1], K.R.Myrzakulov[2]**

[1]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, 050040, Kazakhstan
[2]L.N.Gumilov Eurasian National University, Astana, 010008, Kazakhstan
shynaray1981@gmail.com, farida.belisarova@kaznu.kz, tmyrzakul@gmail.com mkr_79@mail.ru

# DYNAMICS OF F-ESSENCE IN FRAME OF THE STAROBINSKY MODEL

**Abstract.** In this paper, a cosmological model of a flat and homogeneous universe was considered for the Starobinsky model, which interacts non-minimally with f-essence. For this model, the field equations were obtained and particular solutions of the coupling functions and the fermion field were considered. It is shown that a fermion field can describe the nature of the universe.

**Key words:** Flat and homogeneous universe, f-essence, fermion field, model of Starobinsky.

УДК 524.8

**Ш.Р. Мырзакул[1], Ф.Б.Белисарова[1], Т.Р. Мырзакул[1], К.Р. Мырзакулов[2]**

[1]Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, 050040, Казахстан;
[2]Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г. Астана, 010008, Казахстан

# ДИНАМИКА F-ЭССЕНЦИИ В РАМКАХ МОДЕЛИ СТАРОБИНСКОГО

**Аннотация.** В работе была рассмотрена космологическая модель плоской и однородной Вселенной для модели Старобинского $F(R) = \alpha R + \beta R^2$, которая неминимально взаимодействует с f-эссенцией. Для этой модели были получены уравнения поля и рассмотрены частные решения функций связи и фермионного поля. Показано, что фермионное поле может описывать природу Вселенной.

**Ключевые слова:** плоская и однородная Вселенная, f-эссенция, фермионное поле, модель Старобинского.

**Введение**

Как известно, основной теорией, описывающей гравитационные явления в природе, является общая теория относительности (ОТО). Правильность этой теории подтверждается различными экспериментальными и наблюдательными данными [1,2]. Однако, она не способна полностью описать некоторые эпохи эволюции Вселенной, такие как нынешнее ускоренное расширение Вселенной. В настоящее время предложены различные альтернативные теории ОТО. Одной из таких альтернативных теории является $F(R)$ теория гравитации, где $F$ является некоторой функцией от скаляра Риччи $R$ [3-5]. В работах [6-8] рассмотрены космологические аспекты $F(R)$ гравитации с различными полями материи. Известная модель Старобинского является одним из примеров модифицированной $F(R)$ гравитации [8].

В данной работе нами была рассмотрена модель Старобинского неминимально взаимодейст-вующая с f-эссенцией для однородной и изотропной метрики Фридмана-Робертсона-Уокера. Определены соответствующие уравнения движения и получены решение для масштабного фактора в виде квази-де Ситтера. Также были найдены космологические параметры такие как параметр Хаббла, параметр уравнения состояния и параметр замедления. Полученные результаты соответствуют модели темной энергии и соответственно способны описать позднюю эволюцию Вселенной.

**Действие и уравнения движения**

В этом разделе, мы зададим действие и определим уравнения движения для космологической модели Старобинского неминимально взаимодействующей с f-эссенцией для метрики Фридмана-Робертсона-Уокера. Действие для этой модели можно будет записать в следующем виде

$$S = \int d^4x\sqrt{-g}\left[h(u)\left(\alpha R + \beta R^2\right) + 2K(Y,u)\right], \tag{1}$$

где $\alpha$ и $\beta$ являются некоторыми константами, значение которых зададим ниже, $\psi$ – функция ферминого поля и $\bar{\psi}$ ее сопряженная функция, $u = \bar{\psi}\psi$ – некая билинейная функция, $h(u)$ – функция связи гравитации с фермионным полем, $K(Y,u)$ – Лагранжиан $f$ - эссенции, однако при $K(Y,u) = Y - V$, имеем стандартное уравнение Дирака для фермионного поля.

Совместно с действием (1), рассмотрим также метрику Фридмана-Робертсона-Уокера

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right), \tag{2}$$

где $a(t)$ является масштабным фактором зависящим от космологического времени $t$. Для этой метрики имеем следующие выражение

$$\sqrt{-g}=a^3,\ R = 6\left(\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2}\right),\ Y = \frac{1}{2}i\left(\bar{\psi}\gamma^0\dot{\psi} - \dot{\bar{\psi}}\gamma^0\psi\right), \tag{3}$$

Здесь точка над буквой обозначает производную по времени $t$. Тогда, для метрики (2) функцию Лагранжана можно будет записать как

$$L = 6\alpha a h\dot{a}^2 + 6\alpha a^2\dot{a}\dot{h} + \beta a^3 hR^2 + 12\beta ahR\dot{a}^2 + 12\beta a^2R\dot{a}\dot{h} + 12\beta a^2h\dot{a}\dot{R} - 2a^3K. \tag{4}$$

Далее с помощью этого точечного Лагранжиана можно будет определить уравнения движения для рассматриваемой модели как

$$3\alpha\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{h}}{h}\right) + 6\beta\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{h}}{h} + \frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{R}}{R} - \frac{1}{12}R\right)R - \frac{1}{h}\left(YK_Y - K\right) = 0, \tag{5}$$

$$\begin{aligned}&\alpha\left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{h}}{h} + \frac{\ddot{h}}{h}\right) + \\ &+ 2\beta\left[\ddot{R} + 2\left(\frac{\dot{a}}{a} + \frac{\dot{h}}{h}\right)\dot{R} + \left(\frac{\dot{a}^2}{a^2} + 2\frac{\ddot{a}}{a} + 2\frac{\dot{a}}{a}\frac{\dot{h}}{h} + \frac{\ddot{h}}{h} - \frac{1}{4}R\right)R\right] + \frac{1}{h}K = 0,\end{aligned} \tag{6}$$

$$
\begin{aligned}
&K_Y\dot{\psi}+0.5\left(3\frac{\dot a}{a}K_Y+\dot K_Y\right)\psi-iK_Y\gamma^0\psi-\\
&-3i\left[\alpha\left(\frac{\dot a^2}{a^2}+\frac{\ddot a}{a}\right)+2\beta\left(\frac{\dot a^2}{a^2}+\frac{\ddot a}{a}-\frac{1}{12}R\right)R\right]h_u\gamma^0\psi=0,
\end{aligned}
\tag{7}
$$

$$
\begin{aligned}
&K_Y\dot{\overline{\psi}}+0.5\left(3\frac{\dot a}{a^2}K_Y+\dot K_Y\right)\overline{\psi}+iK_u\overline{\psi}\gamma^0+\\
&+3i\left[\alpha\left(\frac{\dot a^2}{a^2}+\frac{\ddot a}{a}\right)+2\beta\left(\frac{\dot a^2}{a^2}+\frac{\ddot a}{a}-\frac{1}{12}R\right)R\right]h_u\overline{\psi}\gamma^0=0,
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Для описания динамики эволюции Вселенной необходимо из уравнений (5)-(8) определить явный вид масштабного фактора $a$ от времени $t$. Однако, эти уравнения являются нелинейными дифференциальными уравнениями высокого порядка, решение которых является не простой задачей. Также необходимо опрелелить явный вид функции $h(u)$ и $K(Y,u)$. В следующем разделе, для описания эволюции Вселенной попытаемся определить космологическое решение для рассматриваемой модели.

**Космологические решения**

Из метрики (2) видно, что основым параметром способным описать динамику Вселенной является масштабный фактор $a$. В этом разделе, для описания динамики эволюции Вселенной будем определять космологическое решение из системы уравнения (5)-(8). Однако, как видно эти уравнения являются нелинейными дифференциальными уравнениями высшего порядка и необходимо определить явный вид функции $h$ и $K$. Здесь мы ограничемся рассмотрениям частных решении этих функции, как

$$h=h_0u^n, K=K_0Y-V_0u, \tag{9}$$

где $K_0, V_0, n$ и $h_0$ являются некоторыми константами. Подставляя эти решения в уравнения (7) и (8) и умножая обе части уравнения (7) на функцию $\psi^+$ и соответственно, уравнение (8) умножая на функцию $\psi$, затем приравнивая эти уравнения друг к другу, получим следующие выражение

$$\dot u+3\frac{\dot a}{a}u=0. \tag{10}$$

Интегрируя это уравнение, определим зависимость билинейной функции $u$ от масштабного фактора $a$ как

$$u=\frac{u_0}{a^3}, \tag{11}$$

где $u_0$ являются константой интегрирования. Далее подставляя выражения (9) и (11) в (6), получим следующее уравнения для масштабного фактора

$$2a^{(3)}\dot{a}a^2+(2-6n)\ddot{a}\dot{a}^2a-\ddot{a}^2a^2+\frac{\alpha(1-3n)}{6\beta}\dot{a}^2a^2-3(1+2n)\dot{a}^4-\frac{\nu u_0^{1-n}}{6\beta h_0}a^{3n-1}=0, \tag{12}$$

где $a^{(3)}=\dfrac{d^3a(t)}{dt^3}$. Как видно, это уравнения является нелинейным дифференциальным уравнением третьего порядка определение точного решения которого является сложной задачей. В работе [9] были рассмотены аналитические решения модели Старобинского и определены похожие полевые уравнения и их точные решения. Здесь же ограничемся рассмотрением случая, при $n=1, \alpha=1$ и $\beta=1$, тогда уравнение (12) примет более компактную форму

$$2a^{(3)}\dot{a}a^2-4\ddot{a}\dot{a}^2a-\ddot{a}^2a^2-\frac{1}{3}\dot{a}^2a^2-9\dot{a}^4-Ca^4=0, \tag{13}$$

где $C=\dfrac{V_0u_0^{-\frac{2}{3}}}{6h_0}$. Для решения уравнения (13) ограничемся расмотрениям решения в виде де-Ситтера $a=a_0e^{\xi t}$, в этом случае имеем следующее характеристическое уравнение

$$12\xi^4+\frac{1}{3}\xi^2+C=0, \tag{14}$$

решение которого определяем в виде

$$\xi=\pm\sqrt{\frac{-1\pm\sqrt{1-432C}}{72}},$$

тогда, масштабный фактор имеет такую форму

$$a=a_0e^{\sqrt{\frac{-1\pm\sqrt{1-432C}}{72}}t}, \tag{15}$$

а функция $u$ получится в таком виде

$$u=\frac{u_0}{a_0^3e^{3\sqrt{\frac{-1\pm\sqrt{1-432C}}{72}}t}}. \tag{16}$$

Соответствено, параметр Хаббла

$$H=\frac{\dot{a}}{a}=\sqrt{\frac{-1\pm\sqrt{1-432C}}{72}}=const. \tag{17}$$

Используя уравнение для параметра уравнения состояния $\omega$ и параметра замедления $q$:

$$\omega = \frac{p}{\rho}, \tag{18}$$

$$q = -\frac{\ddot{a}a}{\dot{a}} = -\frac{\ddot{a}}{a}\frac{1}{H^2}, \tag{19}$$

определяем, что

$$\omega = -1, q = -1. \tag{20}$$

Данный результат соответствует модели темной энергии, следовательно можно прийти к выводу, что наша модель при значении констант $n = \frac{5}{3}, \alpha = 1, \beta = 1$ и рассмотрения решения для мастабного фактора в виде де-Ситтера $a = e^{\xi t}$, имеем выражение (15), которое способно описать позднию динамику эволюции Вселенной. Этот результат не противоречит современным астрономическим данным.

**Заключение**

В данной работе нами были рассмотрены некоторые космологические аспекты модели Старабинского неминимально взаимодействующей с f-эссенцией для плоской и однородной Вселенной. В пером разделе, было приведено короткое введение в теорию гравитацию. Во втором разделе, для метрики Фридмана-Робертсона-Уокера была определена функция Лагранжа (4) и используя уравнения Эйлера-Лагранжа и условие нулевой энергии определили соответствующие уравнения движения (5)-(8). Как видно, эти уравнения являются нелинейными дифференциальными уравнениями высшего порядка, решение которых является сложной задачей. Также для решения этой системы было необходимо определить явный вид функции $h(u)$ и $K(Y,u)$. В третьем разделе нами была определена следующая зависимость $u = \frac{u_0}{a^3}$, а также были рассмотрены следующие частные решения $h = h_0 u^n, K = K_0 Y - V_0 u,$. Подставляя полученные значения $u$, $h$ и $K$, и значения $n = 1, \alpha = 1$ и $\beta = 1$ в уравнение (6), и рассмотривая де-Ситтеровское решение, получили эволюцию масштабного фактора в виде (15). Найдены все необходимые космологические параметры данной модели $a$, $H$, $\omega$, $q$, которые спобены описать ускоренное расширение современной Вселенной и не противоречат современным астрономическим наблюдательным данным.

**ЛИТЕРАТУРА**

[1] Perlmutter S. et al. Measurements of omega and lambda from 42 high-redshift supernovae. // The Astophysical Journal, **517**, N2, 565-586 (1999). [arXiv:astro-ph/9812133]

[2] Riess et al. Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant. // The Astronomical Journal, **116**, N3, 1009-1038 (1998). [arXiv:astro-ph/9805201]

[3] Faulkner T. et al. Constraining f(R) Gravity as a Scalar Tensor Theory. // Physical Review D 76, 063505 (2007).[arXiv:astro-ph/0612569].

[4] Wayne Hu and Ignacy Sawicki. Models of $f(R)$ cosmic acceleration that evade solar-system tests. // Physical Review D 76, N1, 064004 (2007).[arXiv:0705.1158].

[5] Sebastiani L., Myrzakulov R. F(R) gravity and inflation. // Int.J.Geom.Meth.Mod.Phys. 12, N09, 1530003 (2015). [arXiv:1506.05330].

[6] Momeni D., Gholizade H., Raza M., Myrzakulov R. Tolman-Oppenheimer-Volkoff equations in non-local f(R) gravity.// A Int. J. Mod. Phys. A 30, 1550093, (2015). [arXiv:1601.04994].

[7] Sebastiani L., Myrzakulov R. F(R) gravity and inflation. // Int.J.Geom.Meth.Mod.Phys. 12, N09, 1530003 (2015). [arXiv:1506.05330].

[8] Starobinsky A.A. A new type of isotropic cosmological models without singularity. // Physics Letters B 91 (1), N 1, 99-102 (1980).

[9] Paliathanasis A. Analytic Solution of the Starobinsky Model for Inflation// The European Physical Journal C. – 2017. - 77, 438. [arXiv:1706.06400v2].

**Ш.Р. Мырзақұл[1], Ф.Б. Белисарова[1], Т.Р. Мырзақұл[1], К.Р. Мырзакулов[2]**

әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы қ., 050040, Қазақстан
Л.Н. Гумилев атнығы Евразиялық Ұлттық Университеті, Астана қ., 010008, Казақстан

## СТАРОБИНСКИЙ МОДЕЛІНІҢ НЕГІЗІНДЕГІ F-ЭССЕНЦИЯ ДИНАМИКАСЫ

**Аннотация.** Жұмыста f-эссенциямен минималды емес әрекеттесетін Старобинский моделі $F(R) = \alpha R + \beta R^2$ үшін жазық және біртекті Әлемнің космологиялық моделі қарастырылған. Бұл модель үшін өріс теңдеулері алынды және байланыс функциясы мен фермионды өрістер үшін дербес шешімдер қарастырылды. Фермиондық өріс Әлемнің табиғатын сипаттайтыны көрсетілген.

**Тірек сөздер:** жазық және біртекті Әлем, f-эссенция, фермиондық өріс, Старобинский моделі.