

A. B. UmbetkulovaAl-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan.
E-mail: aliya1988kz@mail.ru**MODELING OF DRILL STRING NONLINEAR
LONGITUDINAL-TRANSVERSE VIBRATIONS AND THEIR ANALYSIS**

Abstract. In this paper the nonlinear mathematical model of longitudinal-transverse vibrations of drill strings, using in the oil and gas industry, are developed. Model of the drill string elastic deformation is based on the assumption of finite deformations, which are set according to the theory of the V. V. Novozhilov finite deformations. The drill string is considered as a rotating elastic rod with acting on it a compressive force and twisting moment. Applying the Hamilton's method, a system of three interrelated nonlinear partial differential equations for the longitudinal and two lateral vibrations of the mechanical system is constructed. Due to the complexity of direct integration of nonlinear models there is using the method of separating the variables, and the system of partial differential equations is reduced to a system of nonlinear differential equations. Numerical analysis is carried out in a symbolic mathematics package Wolfram Mathematica.

Keywords: drill string, nonlinear model, longitudinal-transverse vibrations, Galerkin's method.

УДК 539.3:622.23.05

А. Б. Умбеткулова

Казахский национальный университет им. аль-Фараби, Алматы, Казахстан

**МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ПРОДОЛЬНО-ПОПЕРЕЧНЫХ
КОЛЕБАНИЙ БУРИЛЬНОЙ КОЛОННЫ И ИХ АНАЛИЗ**

Аннотация. Разработана нелинейная математическая модель продольно-поперечных колебаний буровых колонн, используемых в нефтегазодобывающей промышленности. Модель упругого деформирования колонн строится при допущении конечности деформаций, которые задаются согласно теории конечных деформаций В. В. Новожилова. Буровая колонна рассматривается как вращающийся упругий стержень с действующими на нее сжимающей нагрузкой и крутящим моментом. Применяя метод Остроградского-Гамильтона, построена система из трех нелинейных взаимозависимых уравнений в частных производных для продольных и поперечных колебаний механической системы. Из-за сложности прямого интегрирования нелинейной модели применяется метод разделения переменных, и система уравнений в частных производных сводится к системе нелинейных дифференциальных уравнений, численный анализ которых производится в пакете символьной математики Wolfram Mathematica.

Ключевые слова: буровая колонна, нелинейная модель, продольно-поперечные колебания, потенциал упругого деформирования, метод Бубнова-Галеркина.

Введение. При современном интенсивном освоении и добыче нефти большое внимание уделяется проблеме эффективного бурения скважин в нефтегазодобывающей промышленности. Безаварийность работ по бурению скважин, скорость их бурения и добычи нефти зависят от качества и совершенства буровых машин и инструментов, что делает отрасль нефтегазового оборудования одной из динамично развивающихся отраслей. Режим работы буровой машины в полной мере зависит от устойчивости и прочности буровых штанг. Потеря устойчивости прямолинейной формы буровых штанг ведет к искривлению скважин, приводящих их к негодности [[1]-[3], др.].

Поэтому исследования по моделированию динамики буровых штанг с учетом их деформационных свойств, влияния последних на динамические характеристики систем в целях оптимизации эксплуатационных режимов бурильных колонн и обеспечения безопасности работы являются одними из приоритетных направлений современных исследований в области промышленного оборудования. А разработка реалистичных моделей буровая штанга-скважина с учетом осложняющих факторов с целью повышения их прочности и надежности представляет научный и практический интерес.

Известно, что большинство работ по исследованию динамики буровых колонн направлены на моделирование и анализ вибраций колонн, вызывающих потерю устойчивости движения бурового оборудования и нарушению их прочностных свойств [[4]-[15], др.]. При этом одним из распространенных допущений авторов является наложение ограничений на величины деформаций бурильных колонн при их моделировании, то есть их малость [[8]-[12], др.], что ведет к линеаризации модели. Другим допущением моделей является ограничение степеней свободы деформирования буровой штанги, то есть раздельное исследование составляющих их сложного пространственного деформирования, как это делают авторы работ [[13]-[15], др.]. Все это вызывает ограниченность моделей и существенно сужает представление о реалистичности моделируемых процессов в системе буровая штанга-скважина, так как не представляется возможным описание большого разнообразия факторов, осложняющих движение буровой штанги.

Целью данной работы является разработка нелинейной математической модели пространственного деформирования вращающейся бурильной колонны с учетом конечных деформаций. Усложнение модели за счет нелинейности и увеличения размерности системы вследствие совместного рассмотрения компонент упругой деформации штанги приводит к повышению реалистичности движения всей системы.

Нелинейная математическая модель. Модель упругого деформирования буровых штанг будет строиться при допущении конечности деформаций, которые задаются согласно теории конечных деформаций В. В. Новожилова [[16]]. Применяется вторая система упрощений по В. В. Новожилову, согласно которой компоненты деформации и углы поворота полагаются малыми по сравнению с единицей, что позволяет пренебречь величинами второго и более порядка малости, удерживая при этом углы поворота во второй степени [[16]]. По гипотезе плоских сечений [[17], [18]] предполагается, что поперечные сечения стержня при деформации остаются плоскими и перпендикулярными к его деформированной оси, а нормальные напряжения на площадках, параллельных оси, являются пренебрежимо малыми.

Помимо поперечных колебаний буровой штанги, происходящих в двух плоскостях Oxz и Oyz , также рассматривается поступательное смещение ее поперечного сечения вдоль оси штанги z . Тогда компоненты перемещений $U(x, y, z, t), V(x, y, z, t), W(x, y, z, t)$ бурильной колонны, представленной в виде колеблющегося стержня, принимают вид:

$$\begin{aligned} U(x, y, z, t) &= u(z, t), \\ V(x, y, z, t) &= v(z, t), \\ W(x, y, z, t) &= w(z, t) - \frac{\partial u(z, t)}{\partial z} x - \frac{\partial v(z, t)}{\partial z} y, \end{aligned} \quad (1)$$

где $u(z, t), v(z, t)$ - перемещение центра изгиба поперечного сечения вдоль осей x, y вследствие изгиба, $w(z, t)$ - поступательное смещение вдоль оси z .

Для вывода математической модели применяется вариационный принцип Остроградского-Гамильтона. Определяется функционал упругого деформирования. В данном случае он имеет вид:

$$\Phi = \frac{G}{1-2\nu} \left(\frac{1}{2} (\omega_x^4 + \omega_y^4) + (1-\nu) e_{zz}^2 + e_{zz} (\omega_x^2 + \omega_y^2) + \frac{5-6\nu}{2} (\omega_x^2 \omega_y^2) \right) \quad (2)$$

где $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ - модуль сдвига, E - модуль Юнга (модуль упругости материала), ν - коэффициент

Пуассона, e_{zz} определяет относительное удлинение параллельно оси z , $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ - углы поворота относительно соответствующих осей:

$$e_{zz} = \frac{\partial W}{\partial z}, \quad \omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right), \quad \omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right), \quad \omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right). \quad (3)$$

Через найденный функционал Φ (2)-(3) определяется потенциальная энергия стержня:

$$U_0 = \int_0^l \frac{G}{1-2\nu} \left(\frac{1}{2} \left(A \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^4 + A \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^4 \right) + (1-\nu) \left(A \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + I_y \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)^2 + I_x \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right)^2 + \right. \right. \\ \left. \left. + 2I_{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + A \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial z} + A \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{5-6\nu}{2} A \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right) dz. \quad (4)$$

где I_x, I_y - осевые моменты инерции, I_{xy} - центробежный момент инерции, A - площадь поперечного сечения буровой штанги.

Кинетическая энергия стержня с учетом вращения буровой колонны записывается в следующем виде:

$$T_{кин} = \frac{1}{2} \rho \int_0^l \left[A \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + A \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + A \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 + I_y \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} \right)^2 + 2I_{xy} \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial t} \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t} + I_x \left(\frac{\partial^2 v}{\partial z \partial t} \right)^2 + \right. \\ \left. + I_p \omega^2 + A(u^2 + v^2) \omega^2 + 2\omega A v \frac{\partial u}{\partial t} - 2\omega A u \frac{\partial v}{\partial t} \right] dz, \quad (5)$$

где ρ - плотность материала буровой колонны, ω - скорость вращения стержня.

Для получения нелинейной математической модели упругих колебаний буровой колонны применяется вариационный принцип Остроградского-Гамильтона [[17]-[20]]. Данный принцип позволяет охарактеризовать движение буровой колонны в целом на произвольном промежутке времени от t_1 до t_2 :

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \delta (T_{кин} - U_0 + \Pi) dt = 0, \quad (6)$$

где Π - потенциал внешних сил, учитывающий действие внешних продольной нагрузки $N(z, t)$ и крутящего момента $M(z, t)$.

Ввиду симметричности поперечного сечения стержня вдоль осей x и y осевые моменты будут равны между собой $I_x = I_y = I$, а центробежный момент инерции будет равен нулю $I_{xy} = 0$.

Разработана следующая нелинейная модель, описывающая продольно-поперечные колебания вращающейся буровой колонны как пространственно деформируемого упругого стержневого элемента с действующими на него сжимающей нагрузкой и крутящим моментом:

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 u}{\partial z^2 \partial t^2} - \rho A \omega^2 u + 2\rho A \omega \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(N(z, t) \frac{\partial u}{\partial z} \right) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(M(z, t) \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \\ + EI \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} - \frac{EA}{(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^3 + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial u}{\partial z} \right] - \frac{EA(5-6\nu)}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] = 0, \\ \rho A \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \rho I \frac{\partial^4 v}{\partial z^2 \partial t^2} - \rho A \omega^2 v - 2\rho A \omega \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} \left(N(z, t) \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(M(z, t) \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \\ + EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - \frac{EA}{(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^3 + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial v}{\partial z} \right] - \frac{EA(5-6\nu)}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial v}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] = 0, \\ \rho A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(N(z, t) \frac{\partial w}{\partial z} \right) - \frac{EA}{2(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \right] = 0, \quad (7)$$

с краевыми условиями:

$$\begin{aligned} u(z, t) = v(z, t) = 0 \quad (z = 0, z = l) \\ EI \frac{\partial^2 u(z, t)}{\partial z^2} = EI \frac{\partial^2 v(z, t)}{\partial z^2} = 0 \quad (z = 0, z = l), \\ EA \frac{w(z, t)}{\partial z} = 0 \quad (z = 0, z = l). \end{aligned} \quad (8)$$

Модель (7) с краевыми условиями (8) носит нелинейный характер и описывает изгибно-продольные колебания буровых штанг. Она обобщает известные модели, описывающие нелинейные колебания упругого стержня, учитывая вращение стержня с учетом конечных деформаций, применяя к динамическим задачам бурового оборудования нефтегазодобывающей промышленности, в частности, буровым штангам.

Численное моделирование. Из-за сложности прямого интегрирования нелинейной модели (7), она приводится к удобному для этого виду путем применения известного метода разделения переменных – метода Бубнова-Галеркина, где форма изгиба оси буровой штанги задается спектром гармонических форм. Для получения полной картины колебательного процесса рассматриваются трехмодовые приближения, и функции перемещений $u(z, t)$, $v(z, t)$ и $w(z, t)$ представляются в виде:

$$\begin{aligned} u(z, t) &= \sum_{k=1}^3 \overline{u}_k(t) \sin\left(\frac{k\pi z}{l}\right), \\ v(z, t) &= \sum_{k=1}^3 \overline{v}_k(t) \sin\left(\frac{k\pi z}{l}\right), \\ w(z, t) &= \sum_{k=1}^3 \overline{w}_k(t) \cos\left(\frac{k\pi z}{l}\right). \end{aligned} \quad (9)$$

Базисные функции $\sin\left(\frac{k\pi z}{l}\right)$ и $\cos\left(\frac{k\pi z}{l}\right)$ выбраны таким образом, чтобы они удовлетворяли граничным условиям (8).

Реализация метода Бубнова-Галеркина и дальнейшее численное решение проводится в универсальной математической среде Wolfram Mathematica. Для расчетов используются следующие значения параметров буровой колонны: модуль Юнга $E = 0.7 \times 10^5 \text{ МПа}$, плотность материала $\rho = 2700 \text{ кг/м}^3$, коэффициент Пуассона $\nu = 0.34$ (для дюралюминиевых буровых колонн), внешний диаметр штанги $D = 0.2 \text{ м}$, внутренний диаметр $d = 0.12 \text{ м}$, длина буровой колонны $l = 150 \text{ м}$, частота вращения $\omega = 30 \text{ об/мин}$, продольная сжимающая нагрузка $N(z, t) = 2.2 \times 10^3 \text{ Н}$, крутящий момент $M(z, t) = 10^4 \text{ Н} \cdot \text{м}$. Рассматривается поперечное сечение, отступающее на расстояние $z = \frac{2}{9}l \text{ м}$ от верхнего конца штанги $\left(z_k = \frac{2}{9}\right)$.

На рисунках 1, 2 показаны поперечные и продольные колебания буровой колонны с функциями перемещений $u(z, t)$, $v(z, t)$ и $w(z, t)$ при заданных параметрах механической системы. Полученные графики показывают, что амплитуда поперечных колебаний на несколько порядков превосходит амплитуду продольных колебаний. Поперечные колебания являются доминирующими в процессе деформирования колонны.

На рисунках 3а и 3б изображено распространение нелинейных поперечных колебаний штанги по всей длине буровой колонны в фиксированные моменты времени. Колебание происходит по синусоидальной форме, разложение по трем полуволнам, как и предполагалось в представлении

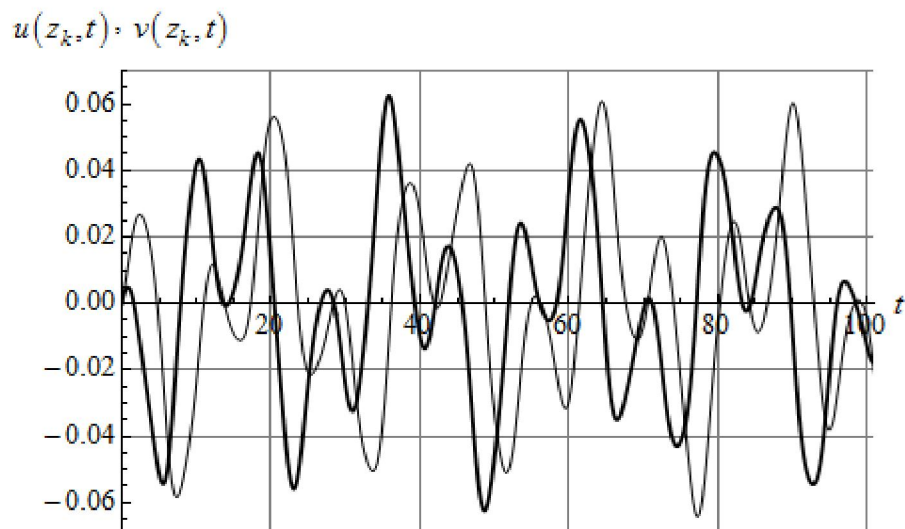


Рисунок 1 – Поперечные колебания $u(z_k, t)$ (—) и $v(z_k, t)$ (---) дюралюминиевой бурильной колонны

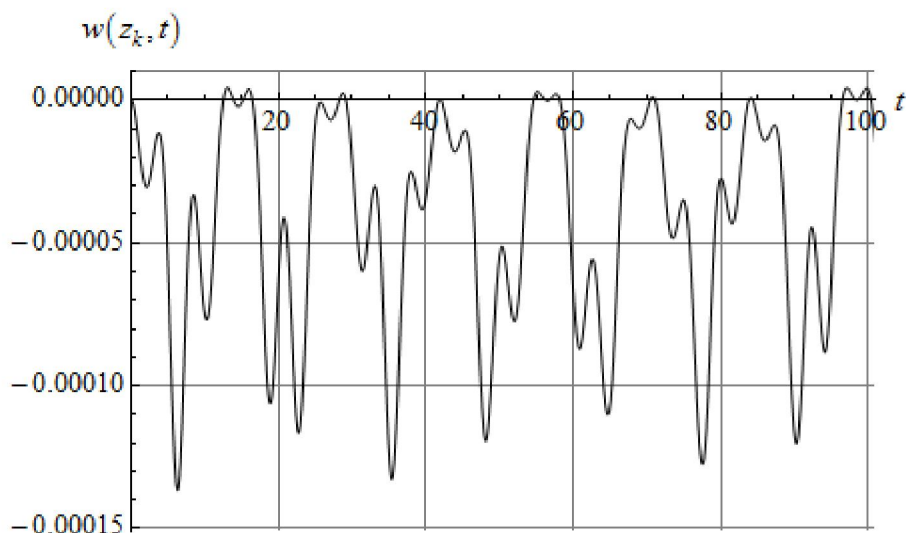


Рисунок 2 – Продольные колебания $w(z_k, t)$ дюралюминиевой бурильной колонны

решения (9). Рассмотрено распространение амплитуд продольных колебаний бурильной колонны по всей ее длине в фиксированные моменты времени (рисунки 4а-4г).

Продольные колебания происходят по косинусоидальной форме, в срединном поперечном сечении колебательного процесса не будет. В большинстве случаев распространение амплитуд колебаний по длине происходит так, как изображено на рисунке 4а. Максимальные амплитуды достигаются ближе к верхнему и нижнему концам бурильной колонны, а ближе к середине штанги – амплитуды уменьшаются. Причем, заметно, что верхняя половина бурильной колонны колеблется лишь в отрицательную сторону, а нижняя половина – в положительную сторону от недеформированного состояния. Это говорит о сжатии бурильной колонны по оси z . Однако, рассматривая многомодальное разложение решения, в определенные моменты времени распространение амплитуд продольных колебаний происходит как изображено на рисунках 4б-4г.

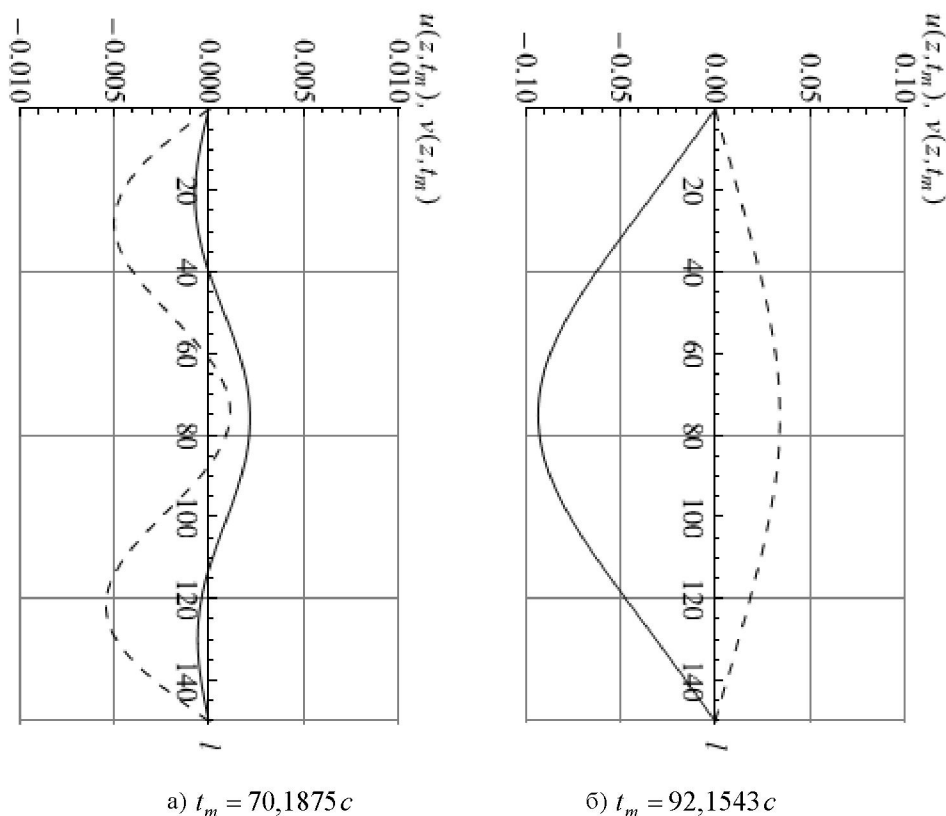


Рисунок 3 – Распространение поперечных колебаний $u(z, t_m)$ (————) и $v(z, t_m)$ (----) по длине бурильной колонны

На рисунках 5а-5б и 6а-6б исследованы параметрические кривые поперечных колебаний $u(z, t)$ и $v(z, t)$ друг относительно друга для различных длин и частот вращения бурильной колонны в точке $z = 4/9l$.

На рисунках 5а и 5б изображены кривые, полученные в течение времени $t = 180 \text{ c}$. На рисунках 6а и 6б результаты получены для колонн длиной $l = 100 \text{ м}$ при частоте вращения $\omega = 15 \text{ об/мин}$ в разные моменты времени. Установлена необходимость учета пространственных поперечных колебаний, так как присутствует вращательный процесс, и инерция от вращения оказывает существенное влияние на колебательный процесс.

На рисунках 7, 8 изображены фазовые портреты поперечных и продольных колебаний бурильной колонны. Для поперечных колебаний $v(z, t)$ фазовый портрет аналогичен фазовому портрету $u(z, t)$ (рисунок 7). Расчеты проведены при следующих параметрах: $l = 150 \text{ м}$,

$\omega = 30 \text{ об/мин}$, $t = 200 \text{ c}$, поперечное сечение $z_k = \frac{4}{9}$. Ввиду нелинейности, фазовый портрет отличается от фазового портрета классической линейной теории колебаний. Однако из рисунков установлено, что колебательный процесс устойчив с течением любого промежутка времени.

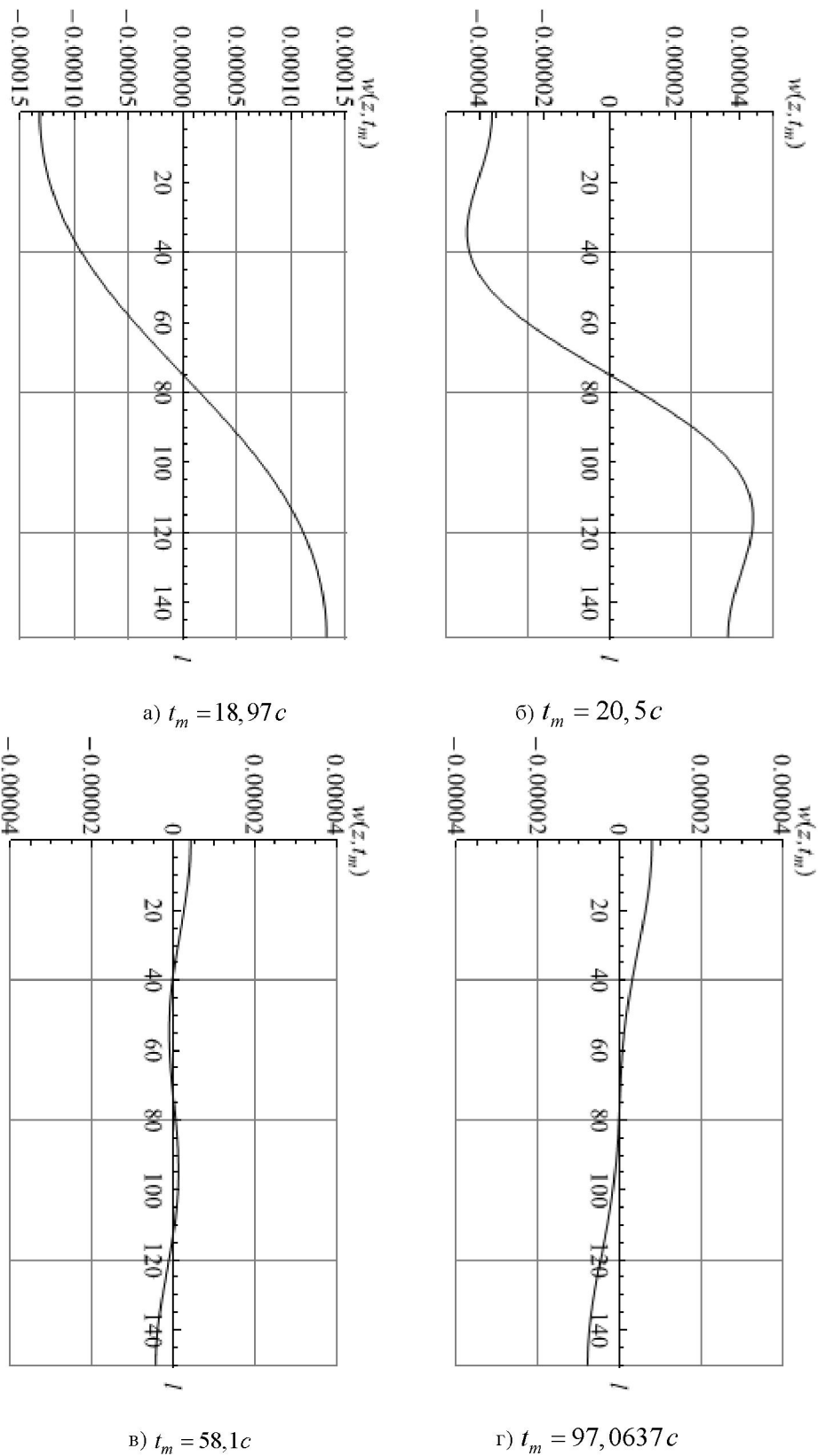
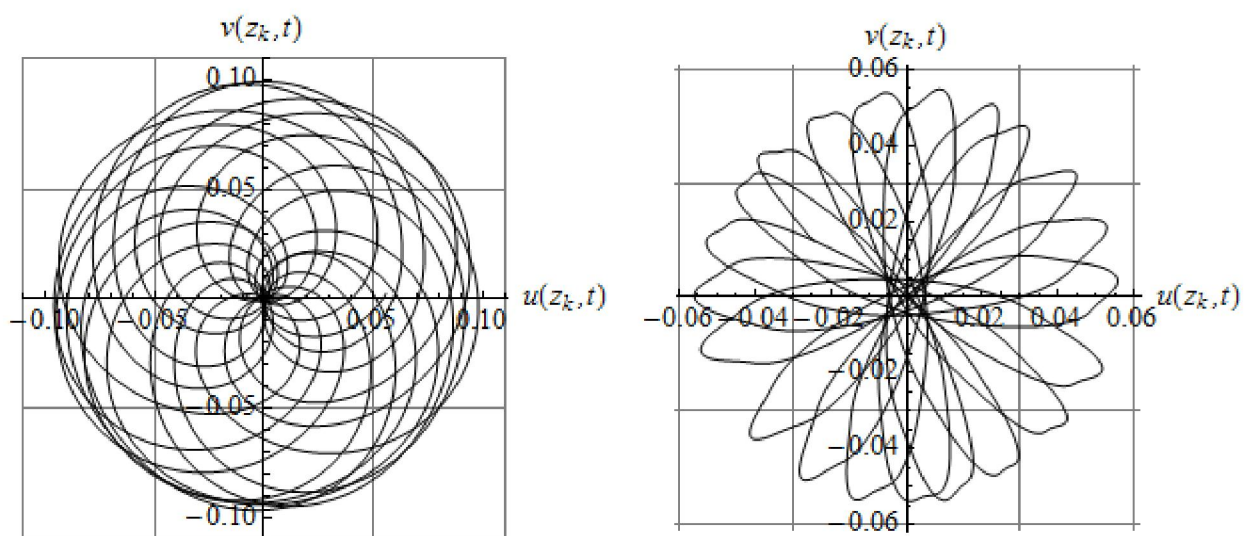
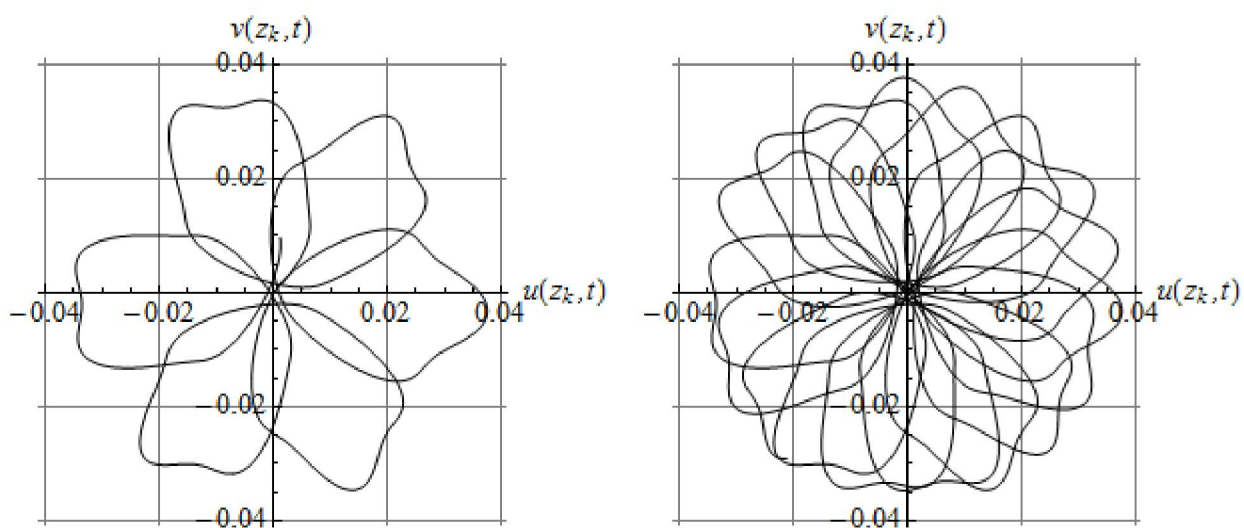


Рисунок 4 – Распространение продольных колебаний $w(z, t_m)$ по длине буровой колонны



а) $l = 150 \text{ м}, \omega = 30 \text{ об / мин}$ б) $l = 100 \text{ м}, \omega = 5 \text{ об / мин}$

Рисунок 5 – Параметрические кривые поперечных колебаний буровой колонны



а) $t = 52 \text{ с}$

б) $t = 150 \text{ с}$

Рисунок 6 – Параметрические кривые поперечных колебаний буровой колонны

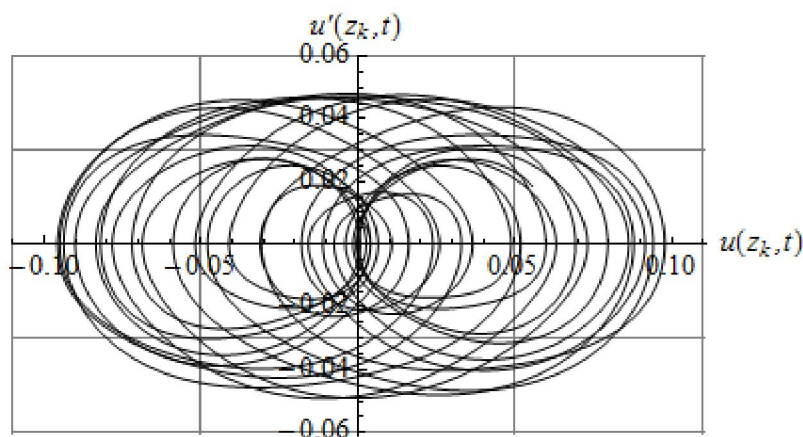


Рисунок 7 – Фазовый портрет поперечных колебаний $u(z, t)$ буровой колонны

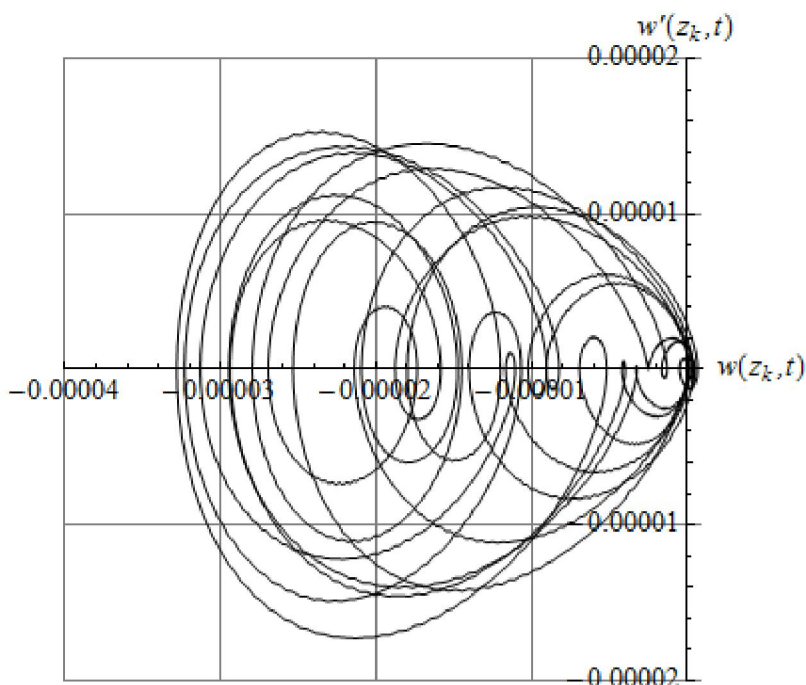


Рисунок 8 – Фазовый портрет продольных колебаний $w(z, t)$ буровой колонны

Заключение. В работе разработана нелинейная математическая модель продольно-поперечных колебаний буровых колонн, используемых в нефтегазодобывающей промышленности. В результате ее численного анализа установлен нелинейный характер колебательного процесса буровых колонн, отличный от случая, когда их деформации полагаются малыми. При анализе продольных колебаний установлено, что колебания верхней половины буровой колонны направлены вниз вдоль оси z , а колебания нижней половины – вверх. Что свидетельствует о сжатии буровой колонны при действии на нее внешних нагрузок и при эксплуатации. При изучении фазовых портретов поперечных и продольных колебаний буровой колонны установлено, что колебательные процессы, возникающие при проходке буровой колонной скважины, являются устойчивыми для выбранных геометрических и технологических характеристик буровой штанги.

Работа была выполнена в рамках проекта ГФ-4 №5453 грантового финансирования Министерства Образования и Науки Республики Казахстан.

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Вудс Г., Лубинский А. Искривление скважин при бурении. – М.: Гостоптехиздат, 1960. – 161 с.
- [2] Симонов В.В., Юнин Е.К. Влияние колебательных процессов на работу бурильного инструмента. – М.: Недра, 1977. – 217 с.
- [3] Юртаев В.Г. Динамика буровых установок. – М.: Наука, 1987. – 156 с.
- [4] Gulyaev V.I., Gaidachuk V.V., Glushakova O.V. Andronov-Hopf bifurcations in wave models of torsional vibrations of drill strings. // *International Applied Mechanics*. – 2011. – Vol. 46(11). – P. 1275-1283.
- [5] Hakimi H., Moradi S. Drillstring vibration analysis using differential quadrature method. // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. – 2010. – Vol. 70. – P. 235-242.
- [6] Vaz M.A., Patel M.N. Analysis of drill strings in vertical and deviated holes using the Galerkin technique. // *Engineering structures*. – 1995. – Vol. 17(6). – P. 437-442.
- [7] Nandakumar K., Wiercigroch M. Stability analysis of a state dependent delayed, coupled two DOF model of drill-string vibration. // *Journal of Sound and Vibration*. – 2013. – Vol. 332. – P. 2575-2592.
- [8] Gulyayev, V.I., Borshch, O.I. Free vibrations of drill strings in hyper deep vertical bore-wells. // *Journal of Petroleum Science and Engineering*. – 2011. – Vol. 78. – P. 759-764.
- [9] Гуляев В.И. и др. Квазистатические критические состояния колонн глубокого бурения. // *Проблемы прочности*. – 2006. – №5. – С. 109-119.
- [10] Гуляев В.И., Худолый С.Н., Борщ Е.И. Колебания кружения конструкции низа бурильной колонны. // *Проблемы прочности*. – 2010, №6. – С. 13-25.
- [11] Yigit, A.S., Christoforou, A.P. Coupled axial and transverse vibrations of oilwell drillstrings. // *Journal of Sound and Vibration*. – 1996. – Vol. 195 (4). – P. 617-627.
- [12] Christoforou, A.P., Yigit, A.S. Dynamic modeling of rotating drillstrings with borehole interactions. // *Journal of Sound and Vibration*. – 1997. – Vol. 206 (2). – P. 243-260.
- [13] Хаджиева Л.А., Умбеткулова А.Б. Об аппроксимации нелинейных колебаний сжато-скрученной буровой штанги при конечных деформациях // *Известия НАН РК, серия физико-математическая*. – 2014. – №1 (293). – С.69-75.
- [14] Khajiyeva L.A., Kydyrbekuly A.B., Sergaliyev A., Umbetkulova A. Simulation of Movement of Drill Rods at Large Deformations. *Advanced Materials Research*, Vol.702 (2013). Trans. Tech. Publications, Switzerland, pp. 253-258.
- [15] Christoforou A.P., Yigit A.S. Dynamic modeling of rotating drill strings with borehole interactions. *Journal of Sound and Vibration*, 206(2), 243-260, 1997.
- [16] Новожилов В.В. Основы нелинейной теории упругости. – М.- Л.: ОГИЗ, 1948. – 211с.
- [17] Вибрации в технике. Справочник: в 6-и т. – М.: Машиностроение, 1978. – Т.1. – 352с.
- [18] Вибрации в технике. Справочник: в 6-и т. – М.: Машиностроение, 1979. – Т.2. – 351с.
- [19] Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. – Изд. 2-е, переработанное. – М.: Машиностроение, 1970. – 736 с.
- [20] Филиппов А.П. и др. Численные методы в прикладной теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1968. – 250 с.

REFERENCES

- [1] Vuds G., Lubinskij A. Curvature of the Boreholes During Drilling. M.: Gostoptehizdat, 1960, 161 p. (in Russ)
- [2] Simonov V.V., Junin E.K. Influence of Oscillatory Processes at Work of Drilling Tool. M.: Nedra, 1977, 217 p. (in Russ)
- [3] Jurtayev V.G. Dynamics of Drilling Rigs. M.: Nauka, 1987, 156 p. (in Russ)
- [4] Gulyaev V.I., Gaidachuk V.V., Glushakova O.V. Andronov-Hopf bifurcations in wave models of torsional vibrations of drill strings. *International Applied Mechanics*, 2011, Vol. 46(11), pp. 1275-1283.
- [5] Hakimi H., Moradi S. Drillstring vibration analysis using differential quadrature method. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2010, Vol. 70, pp. 235-242.
- [6] Vaz M.A., Patel M.N. Analysis of drill strings in vertical and deviated holes using the Galerkin technique. *Engineering structures*, 1995, Vol. 17(6), pp. 437-442.
- [7] Nandakumar K., Wiercigroch M. Stability analysis of a state dependent delayed, coupled two DOF model of drill-string vibration. *Journal of Sound and Vibration*, 2013, Vol. 332, pp. 2575-2592.
- [8] Gulyayev, V.I., Borshch, O.I. Free Vibrations of Drill Strings in Hyper Deep Vertical Bore-wells. *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 2011, Vol. 78, pp. 759-764.
- [9] Guljaev V.I. and others. Quasi Critical State of Deep Drilling Columns. *Problemy prochnosti*, 2006, №5, pp. 109-119. (in Russ)
- [10] Guljaev V.I., Hudolij S.N., Borshh E.I. Fluctuations of Whirling Designs BHA. *Problemy prochnosti*, 2010, №6, pp. 13-25. (in Russ)
- [11] Yigit, A.S., Christoforou, A.P. Coupled axial and transverse vibrations of oilwell drillstrings. *Journal of Sound and Vibration*, 1996, Vol. 195 (4), pp. 617-627.
- [12] Christoforou, A.P., Yigit, A.S. Dynamic modeling of rotating drillstrings with borehole interactions. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, Vol. 206 (2), pp. 243-260.
- [13] Khajiyeva L.A., Umbetkulova A.B. About the Approximation of Nonlinear Fluctuations of Compressed and Twisted Drilling Rods at the Finite Deformation. *Izvestiya NAN RK, serija fiziko-matematicheskaja*, 2014, №1 (293), pp.69-75. (in Russ)
- [14] Khajiyeva L.A., Kydyrbekuly A.B., Sergaliyev A., Umbetkulova A. Simulation of Movement of Drill Rods at Large Deformations. *Advanced Materials Research*. Trans. Tech. Publications, Switzerland, 2013, Vol.702, pp. 253-258.

- [15] Christoforov A.P., Yigit A.S. Dynamic modeling of rotating drill strings with borehole interactions. *Journal of Sound and Vibration*, 1997, 206(2), pp. 243-260.
- [16] Novozhilov V.V. *Fundamentals of Nonlinear Elasticity*. M.- L.: OGIZ, 1948, 211p. (in Russ)
- [17] *Vibration in the Technique. Spravochnik: v 6-i t.* M.: Mashinostroenie, 1978, vol.1, 352p. (in Russ)
- [18] *Vibration in the Technique. Spravochnik: v 6-i t.* M.: Mashinostroenie, 1979, vol.2, 351p. (in Russ)
- [19] Philippov A.P. *Fluctuations of Deformable Systems. Izd. 2-e, pererabotannoe.* M.: Mashinostroenie, 1970, 736p. (in Russ)
- [20] Philippov A.P. and others. *Numerical Methods in Applied Theory of Elasticity*. Kiev: Nauk. dumka, 1968, 250p. (in Russ)

А. Б. Үмбетқұлова

Әль-Фараби атындағы қазақ ұлттық университеті, Алматы, Қазақстан

**БҰРҒЫЛАУ ҚАРНАҒЫНЫҢ КӨЛБЕУ-КӨЛДЕНЕҢ ТЕРБЕЛІСІН
МОДЕЛЬДЕУ ЖӘНЕ ТАЛДАУ**

Аннотация. Мақалада мұнай және газ ұңғымасын бұрғылау үшін қолданылатын бұрғылау қарнағының көлбеу-көлденең тербелесінің сызықсыз динамикалық математикалық моделі құрылған. Бұрғылау қарнағының серпімді деформация моделі В.В.Новожиловтың ақырлы деформациялар теориясына сәйкес орнатылады. Бұрғылау қарнағы серпімді айналмалы біліс ретінде қаралған, оған жүк-салмақ пен бұрау моменті әсер етеді. Остроградский-Гамильтон әдісі арқылы көлбеу және көлденең сызықсыз модельдер тікелей интеграция күрделілігіне байланысты айнымалыларды ажырату әдісін қолданып дербес туындылы теңдеу жүйесі сызықсыз дифференциалдық теңдеу жүйесіне келтіріледі. Модельді сандық талдауы символдық Wolfram Mathematica пакеті арқылы шығарылған.

Түйін сөздер: бұрғылау қарнағы, сызықсыз модель, көлбеу-көлденең тербелісі, Бубнов-Галеркин әдісі.