УДК 531.1:534

Ш. М. АЙТАЛИЕВ, А. Б. КЫДЫРБЕКУЛЫ, Л. А. ХАДЖИЕВА

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДЕФОРМИРУЕМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ЧАСТИЧНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ

Исследована устойчивость движения упругих систем с учетом геометрической и физической нелинейности, а также нелинейно-вязкого сопротивления. Предложена модель устойчивого движения упругих систем, когда колебательные процессы отсутствуют. В основе оценки лежит критерий устойчивости по Ляпунову. Методом частичной дискретизации А.Н.Тюреходжаева рассмотрена устойчивость резонансных режимов колебаний. Проведен сравнительный анализ с результатами исследования по методу Флоке.

Моделирование динамики механизмов и машин с учетом упругих свойств деформируемых звеньев и исследование вопросов устойчивости их движения представляют практический интерес. В работе исследуется устойчивость движения упругих элементов механизмов и машин с учетом геометрической и физической нелинейности, а также нелинейно-вязкого сопротивления. Как и в предыдущих работах [1–3], под устойчивым понимается движение механизма в отсутствии колебательного процесса в звеньях.

Динамические модели упругих стержневых элементов механизмов и машин. Допущения абсолютной жесткости элементов механизмов и машин игнорируют реальные динамические процессы, происходящие в них, и значительно сужают круг рассматриваемых задач, ограничиваясь исследованием квазистатических либо дорезонансных режимов работы. Указанный подход для большинства динамических задач современного машиностроения приемлем лишь как первое приближение, так как неучтенные деформации упругих элементов машин могут вызывать сложные динамические процессы, влияя при этом на прочностные и рабочие характеристики системы в целом. В работе [4] рассмотрены модели движения деформируемых стержневых элементов плоских механизмов и машин с учетом нелинейных эффектов геометрической и физической природы, а также диссипативных сил. Если при изучении дорезонансных режимов движения последние, как правило, не принимаются во внимание, то резонансные режимы движения механизмов и их устойчивость зависят от диссипативных сил и пренебрежение ими недопустимо. При исследовании динамики высокоскоростных механизмов, а также механизмов с упругими элементами с ярко выраженными демпфирующими свойствами диссипативные силы принимаются нелинейно-вязкими [2, 3].

Модели упругого движения плоских элементов механизмов и машин многомерны и нелинейны [4]. Решение их затруднено выбором рациональных методов и может быть доведено до конца лишь для сравнительно простых схем, что в значительной степени связано с отсутствием работ, обобщающих методы их решения. Ввиду малости частот возбуждения ведущего звена по сравнению с собственной частотой продольных перемещений последние при исследовании резонансных режимов движения и их устойчивости не принимаются во внимание [5]. Следуя распространенному приему решения задач механики деформируемого твердого тела путем применения методов разделения переменных, предложим представление многомерных динамических моделей механизмов и машин системой нелинейных дифференциальных уравнений относительно обобщенных функций прогиба $f_i(t)$:

$$\ddot{f}_i + \Phi(\dot{f}_i, f_i) = F_i(t) . \quad (1)$$

Функции положения упругих звеньев и их производные, характеризующие движение i-го звена как абсолютно жесткого тела, а также геометрические и физические параметры системы входят в коэффициенты при неизвестных $f_i(t)$ и функцию $F_i(t)$.

Степень нелинейности выражения $\Phi(\dot{f}_i, f_i)$ относительно обобщенной функции прогиба $f_i(t)$ соответствует допущениям модели и типу ее нелинейности (физической, геометрической) [6].

Моделирование устойчивости движения геометрически и физически нелинейных систем методом Флоке. В работе [1] предложена методика исследования резонансных режимов движения плоских механизмов и машин с упругими звеньями. Решение системы уравнений (1) аппроксимируется разложением неизвестных в ряд Фурье с неопределенными коэффициентами. Амплитуда r_{in} и фаза колебаний j_{in} i-го звена определяются методом гармонического баланса при учете конечного числа N членов разложения (n = 1 ё N) [7]. Амплитудно-частотные характеристики позволяют построить резонансные кривые для i-го ведомого звена и определить его критическую частоту колебаний. Зависимость амплитудно-частотных характеристик звеньев от геометрических и физических параметров механизма позволит отстраивать весь механизм от резонансных режимов путем исключения из рабочих режимов критических частот звеньев.

Согласно данной методике исследован случай основного резонанса и резонанса по кратным частотам для нелинейных систем с нелинейностью жесткого и мягкого типа (геометрическая и физическая нелинейность) соответственно [2, 3]:

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + k_1 \frac{df}{dt} + k_2 \left(\frac{df}{dt}\right)^2 + \alpha_1 f + \alpha_3 f^3 = F \cos \Omega t\,, \tag{2}$$

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + k_1 \frac{df}{dt} + k_2 \left(\frac{df}{dt}\right)^2 + \alpha_1 f + \alpha_2 f^2 = F_0 + F_1 \cos \Omega t\,. \tag{3}$$

Исследование резонансных режимов колебаний систем (2) и (3) заключается в установлении устойчивости их гармонических решений $f_0(t)$. Устойчивость последних зависит от характера поведения малого отклонения $d\,f$ во времени, т.е. решения уравнения возмущенного состояния системы

$$\frac{d^2 \delta f}{dt^2} + G_1(t)\frac{d\delta f}{dt} + G_2(t)\delta f = 0\,. \tag{4}$$

Если решение (4) $d\,f$ ограничено при t ® Θ, то движение системы считается устойчивым. Если $d\,f$ ® Θ при t ® Θ, то движение по определению Ляпунова неустойчиво.

При введении переменной η, задаваемой как

$$\delta f = \eta \exp\left(-0{,}5\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \dot{f}}\right)_0\right), \tag{5}$$

уравнение возмущенного состояния (4) сводится к параметрическому уравнению типа Хилла относительно переменной h:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + \eta\left[\theta_0 + \theta_{1s}\sin\Omega t + \theta_{1c}\cos\Omega t + \theta_{2s}\sin 2\Omega t + \theta_{2c}\cos 2\Omega t\right] = 0\,, \tag{6}$$

где q_0, q_{1s}, q_{1c}, q_{2s}, q_{2c} – функции от частот, амплитуд и фаз колебаний W, r_i, j_i гармонических решений уравнений (2) и (3).

Для случая резонанса системы (2) по основной частоте они задаются следующим образом:

$$\theta_0 = \alpha_1 + 1{,}5\,\alpha_3 r_1^2 - 0{,}25\,k_1^2 - 0{,}5\,k_2^2 r_1^2 \Omega^2,$$

$$\theta_{1s} = -k_2 r_1 \Omega^2 \sin\varphi_1 + k_1 k_2 r_1 \Omega \cos\varphi_1, \qquad \theta_{2s} = 1{,}5\,\alpha_3 r_1^2 \sin 2\varphi_1 + 0{,}5\,k_2^2 r_1^2 \Omega^2 \sin 2\varphi_1, \tag{7}$$

$$\theta_{1c} = -k_2 r_1 \Omega^2 \cos\varphi_1 - k_1 k_2 r_1 \Omega \sin\varphi_1, \qquad \theta_{2c} = 1{,}5\,\alpha_3 r_1^2 \cos 2\varphi_1 + 0{,}5\,k_2^2 r_1^2 \Omega^2 \cos 2\varphi_1\,.$$

Для нелинейной системы (3) q_0, q_{1s}, q_{1c}, q_{2s}, q_{2c} имеют вид

$$\theta_0 = \alpha_1 + 2\,\alpha_2 r_0 - 0{,}25\,k_1^2 - 0{,}5\,k_2^2 r_1^2 \Omega^2,$$

$$\theta_{1s} = (2\,\alpha_2 r_1 + k_2 r_1 \Omega^2)\sin\varphi_1 + k_1 k_2 r_1 \Omega \cos\varphi_1, \qquad \theta_{2s} = 0{,}5\,k_2^2 r_1^2 \Omega^2 \sin 2\varphi_1, \tag{8}$$

$\theta_{1c} = (2\,\alpha_2 r_1 + k_2 r_1 \Omega^2)\cos\varphi_1 - k_1 k_2 r_1 \Omega \sin\varphi_1$, $\qquad\qquad \theta_{2c} = 0{,}5\, k_2^2 r_1^2 \Omega^2 \cos 2\varphi_1$.

Согласно теории Флоке [8, 9] решение уравнения типа Хилла задается следующим образом:

$$\eta = e^{\mu t}\, P(t), \tag{9}$$

где *m* – характеристический показатель (действительный или мнимый); *P*(*t*) – периодическая функция, имеющая разложение в ряд Фурье:

$$P(t) = \sum_n b_n \cos(n\Omega t - \delta_n). \tag{10}$$

Задаваясь конечным числом членов разложения функции *P*(*t*) в ряд Фурье в зависимости от вида исследуемого гармонического решения $f_0(t)$ уравнений (2) и (3) и требуемой точности, можно получить первую, вторую и другие области неустойчивости резонансных кривых.

Условия устойчивости решения $f_0(t)$ получаются из анализа соотношений (5) и (9):

$$\mathrm{Re}\left(\mu - 0{,}5\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{f}}\right)_0\right) < 0\ . \tag{11}$$

Оно эквивалентно определению знака характеристического определителя D(*m*):

$$\Delta\left(0{,}5\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{f}}\right)_0\right) = 0 \ \text{– на границе между областями устойчивости и неустойчивости,} \tag{12}$$

$$\Delta\left(0{,}5\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\dot{f}}\right)_0\right) > 0 \ \text{– внутри области устойчивости решения.} \tag{13}$$

Для случая геометрически нелинейной системы границы первой и второй областей неустойчивости основного резонанса задаются характеристическими определителями:

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} \Omega^2 - \mu^2 - \theta_0 - 0{,}5\theta_{2c}) & 2\mu\Omega + 0{,}5\theta_{2s} \\ 2\mu\Omega - 0{,}5\theta_{2s}, & \mu^2 - \Omega^2 + \theta_0 - 0{,}5\theta_{2c} \end{vmatrix}, \tag{14}$$

$$\Delta(\mu) = \begin{vmatrix} \mu^2 + \theta_0 & 0{,}5\theta_{1s} & 0{,}5\theta_{1c} \\ \theta_{1s} & \mu^2 - \Omega^2 + \theta_0 - o{,}5\theta_{2c} & -2\Omega\mu + 0{,}5\theta_{2s} \\ \theta_{1c} & 2\mu\Omega + 0{,}5\theta_{2s} & \mu^2 - \Omega^2 + \theta_0 + 0{,}5\theta_{2c} \end{vmatrix}, \tag{15}$$

соответственно.

Соотношения, задающие границы областей неустойчивости, содержат в себе геометрические и физические параметры нелинейных деформируемых систем. Подбор соответствующих параметров упругой системы путем их варьирования позволит отстраивать рабочие режимы системы от нежелательных резонансных режимов движения.

Особенность данного подхода состоит в выявлении резонансов по высшим частотам на ранних этапах исследования – задание границ второй и высших областей неустойчивости основного резонанса заранее дает возможность определения частот, где следует ожидать появления резонансов по высшим модам [7]. Другим подходом к исследованию зон неустойчивости резонансных явлений является нахождение их границ непосредственно на амплитудно-частотных зависимостях с помощью критерия Рауса–Гурвица.

Моделирование устойчивости движения методом частичной дискретизации. Помимо представленной выше методики возможны другие подходы решения и анализа уравнений возмущенного состояния системы. Здесь используется метод частичной дискретизации А.Н.Тюреходжаева [10], который позволяет получить аналитическое решение уравнения типа Хилла, характеризующее поведение малого возмущения $d\,f$ во времени t.

Согласно методу частичной дискретизации, второе слагаемое уравнения (6) представляется дискретно в классе обобщенных функций:

$$\frac{d^2\eta}{dt^2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(t_k+t_{k+1})[(\theta_0+\theta_{1s}\sin\Omega t_k+\theta_{1c}\cos\Omega t_k+\theta_{2s}\sin 2\Omega t_k+\theta_{2c}\cos 2\Omega t_k)\cdot\eta(t_k)\delta(t-t_k)-$$

$$(\theta_0+\theta_{1s}\sin\Omega t_{k+1}+\theta_{1c}\cos\Omega t_{k+1}+\theta_{2s}\sin 2\Omega t_{k+1}+\theta_{2c}\cos 2\Omega t_{k+1})\cdot\eta(t_{k+1})\delta(t-t_{k+1})]=0, \qquad (16)$$

где $h\,(t_k)$ – дискретное представление функции $h\,(t)$ для значения аргумента $t=t_k$; $k=\overline{1,n}$ – число разбиений аргумента t; $d\,(t-t_k)$ – дельта-функция Дирака.

Решение уравнения (16) уже не представляет труда. В случае начальных условий при

$$t=0\ \ \eta(0)=\eta_0;\ \ \dot\eta(0)=\dot\eta_0,$$

оно имеет вид

$$\eta(t)=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(t_k+t_{k+1})[(\theta_0+\theta_{1s}\sin\Omega t_k+\theta_{1c}\cos\Omega t_k+\theta_{2s}\sin 2\Omega t_k+\theta_{2c}\cos 2\Omega t_k)\cdot\eta(t_k)H(t-t_k)-$$

$$(\theta_0+\theta_{1s}\sin\Omega t_{k+1}+\theta_{1c}\cos\Omega t_{k+1}+\theta_{2s}\sin 2\Omega t_{k+1}+\theta_{2c}\cos 2\Omega t_{k+1})\cdot\eta(t_{k+1})H(t-t_{k+1})]+\dot\eta_0 t+\eta_0, \qquad (17)$$

где $H\,(t-t_k)$ – единичная функция Хевисайда.

Задавая дискретно t, получаем рекуррентную формулу расчета неизвестной $h\,(t)$ на k-м шаге разбиения аргумента t:

$$\eta(t_k)=\frac{-(t_1+t_2)(\theta_0+\theta_{1s}\sin\Omega t_1+\theta_{1c}\cos\Omega t_1+\theta_{2s}\sin 2\Omega t_1+\theta_{2c}\cos 2\Omega t_1)\eta(t_1)\left(\dfrac{t_k+t_{k+1}}{2}-t_1\right)}{1+\dfrac{1}{2}(t_{k+1}-t_k)(t_{k+1}-t_{k-1})(\theta_0+\theta_{1s}\sin\Omega t_k+\theta_{1c}\cos\Omega t_k+\theta_{2s}\sin 2\Omega t_k+\theta_{2c}\cos 2\Omega t_k)}-$$

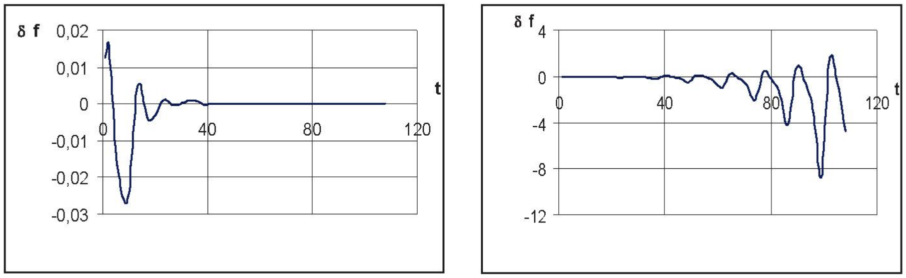
$$-\frac{\sum\limits_{j=2}^{k-1}(t_{j+1}-t_{j-1})(\theta_0+\theta_{1s}\sin\Omega t_j+\theta_{1c}\cos\Omega t_j+\theta_{2s}\sin 2\Omega t_j+\theta_{2c}\cos 2\Omega t_j)\eta(t_j)\left(\dfrac{t_k+t_{k+1}}{2}-t_j\right)}{1+\dfrac{1}{2}(t_{k+1}-t_k)(t_{k+1}-t_{k-1})(\theta_0+\theta_{1s}\sin\Omega t_k+\theta_{1c}\cos\Omega t_k+\theta_{2s}\sin 2\Omega t_k+\theta_{2c}\cos 2\Omega t_k)}+$$

$$+\frac{\dot\eta_0\dfrac{t_k+t_{k+1}}{2}+\eta_0}{1+\dfrac{1}{2}(t_{k+1}-t_k)(t_{k+1}-t_{k-1})(\theta_0+\theta_{1s}\sin\Omega t_k+\theta_{1c}\cos\Omega t_k+\theta_{2s}\sin 2\Omega t_k+\theta_{2c}\cos 2\Omega t_k)}. \qquad (18)$$

В отличие от работ [11, 12], где метод частичной дискретизации применяется для исследования колебаний параметрических систем, задаваемых уравнением Матье или Хилла, и авторы по характеру поведения решения судят об устойчивости колебательного процесса, здесь указанный метод применяется непосредственно для анализа уравнений возмущенного состояния. Анализируя характер поведения $d\,(t)$, согласно критерию устойчивости Ляпунова, можно судить об устойчивости исследуемого состояния: уменьшение величины $d\,(t)$ со временем t (затухающий процесс) говорит о $d\,f$ ® Θ, т.е. об устойчивости исследуемого состояния (рис. 1, а). Если же колебательный процесс нарастающий, то состояние неустойчивое (рис. 1, б).

Шаг итерации вычислений задавался $\mathrm{D}t=0{,}05$ при следующих начальных условиях: $\eta(0)=0;\ \ \dot\eta(0)=0{,}5$.

Результаты численного анализа уравнений возмущенного состояния нелинейных систем (2) и (3)



а б

Рис. 1. Колебательный процесс физически нелинейной системы: *а* – устойчивый, при r_1 = 2,8, Ω = 5, k_1 = 0,3, k_2 = 0,1, α_1 = 1, α_2 = 4; б – неустойчивый, при r_1 = 4, Ω = 5, k_1 = 0,3, k_2 = 0,1, α_1 = 1, α_2 = 4

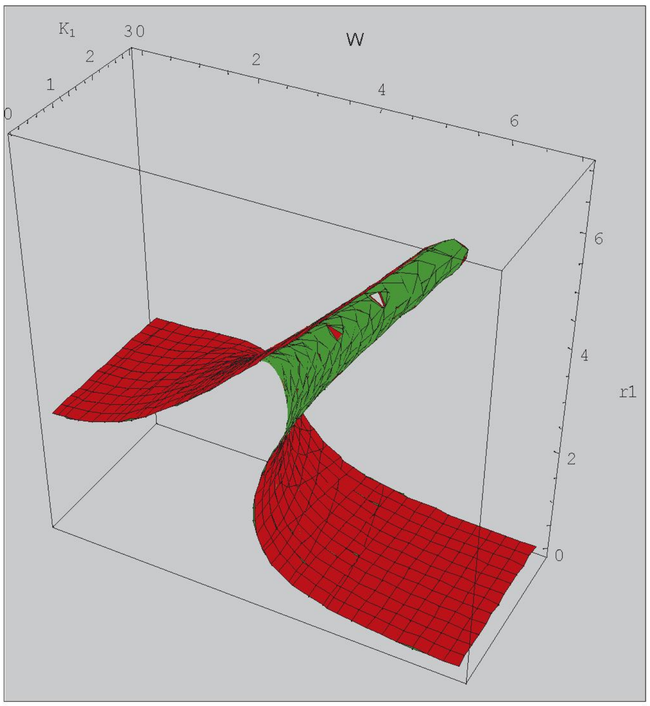


Рис. 2. АЧХ основного резонанса геометрически нелинейной системы при k_1 = 0,3, α_1 = 3, α_3 = 1, F = 10

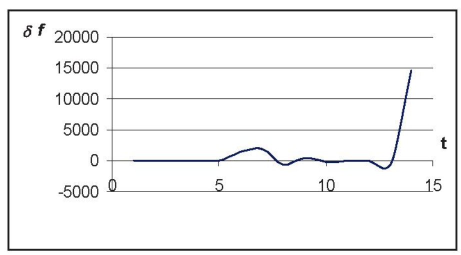
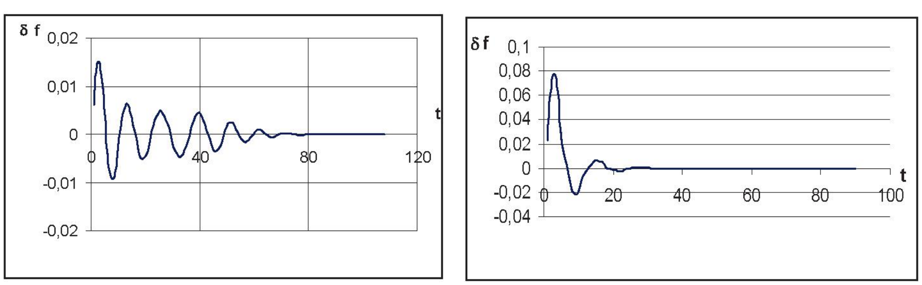


Рис. 3. Неустойчивость колебаний геометрически нелинейной системы в резонансной зоне при r_1 = 2, Ω = 5, k_1 = 0,3, k_2 = 0,4, α_1 = 10, α_3 = 1



а б

Рис. 4. Устойчивость колебаний геометрически нелинейной системы: а – левее зоны основного резонанса, при r_1 = 2, Ω = 0,5, k_1 = 0,3, k_2 = 0,6, α_1 = 10, α_3 = 1; б – правее зоны основного резонанса, при r_1 = 0,2, Ω = 10, k_1 = 3, k_2 = 0,6, α_1 = 10, α_3 = 1

методом частичной дискретизации хорошо согласуются с результатами работы [13]. В качестве примера проведен сравнительный анализ исследования устойчивости резонанса по основной частоте методом Флоке в [13] (рис. 2) и численных расчетов методом частичной дискретизации А. Н. Тюреходжаева. Выделяя на АЧХ (рис. 2) три зоны частот (дорезонансные, резонансные и послерезонансные), методом частичной дискретизации исследовали все три случая. Численные параметры системы взяты такие же, что и на рис. 2. Характер поведения df на рис. 3, 4 подтверждает полученные ранее АЧХ: в дорезонансной и послерезонансной зонах со временем df ® Ө, в зоне же резонанса df ® Ө уже на первых итерациях по времени.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хаджиева Л.А., Кыдырбекулы А.Б.* Об устойчивости движения упругих звеньев плоских МВК // Вестник КазГУ. Сер. матем., механика, информ. 1996. №. 4. С. 191-194.

2. *Khidirbekuhli A., Khajiyeva L.* The dynamic stability of flat planar linked mechanisms with regard for nonlinear characteristics of elastic links // IX Int. Conf. on the Theory of Machines and Mechanisms, Czech Republic. 2004. P. 373-379.

3. *Айталиев Ш.М., Масанов Ж.К., Хаджиева Л.А.* Динамическая устойчивость нелинейно-упругих стержневых систем // X Межвуз. конф. по матем. и мех. Алматы, 2004. Т. 1. С. 46-52.

4. *Хаджиева Л.А.* О моделировании динамики машин с нелинейными характеристиками деформируемых звеньев // Докл. НАН РК. 2005. №4. С. 38-43.

5. *Болотин В.В.* Динамическая устойчивость упругих систем. М.: ГИТТЛ, 1965. 252 с.

6. *Амандосов А.А., Алмухамбетов С.С., Молдакулов Н.З.* Колебания гибких тел при произвольном повороте поперечных элементов // Вестник АН КазССР. 1987. №6. С. 60-68.

7. *Szemplinska-Stupnicka W.* Higher harmonic oscillations in heteronymous nonlinear systems with one degree of freedom // Int. J. Nonlinear Mech. 1968. V. 3, N 1.

8. *Хаяси Т.* Нелинейные колебания в физических системах. М.: Мир, 1968. 423 с.

9. *Тондл А.* Нелинейные колебания механических систем. М.: Мир, 1973. 334 с.

10. *Тюреходжаев А.Н., Касабеков С.И., Култасов К.А.* Аналитическое решение задачи о напряженно-деформированном состоянии неоднородной круглой пластины // Межд. научно-техн. конф. «Прогрессивная техника и технология машиностроения». Киев, 1998. С. 212-215.

11. *Тюреходжаев А.Н.* Некоторые проблемы современной инженерной практики // Межд. конф. «Актуальные проблемы механики и машиностроения». Алматы, 2005. Т. 1. С. 11-28.

12. *Тюреходжаев А.Н., Лукпанова Л.Х.* Решение задачи динамической устойчивости упругого стержня методом частичной дискретизации дифференциальных уравнений // Межд. конф. «Актуальные проблемы механики и машиностроения». Алматы, 2005. Т. 2. С. 67-70.

13. *Aitaliev Sh., Masanov G., Kydyrbekuly A., Kajiyeva L.*Dynamics of mechanisms with elastic links // Proc. 12 Int. Workshop on Computation Kinematic. Cassino, Italy. 2005. P. 168-180.

Резюме

Геометриялық һәм физикалық сызықтық емес және сонымен қатар кедергісінің тұтқырлығы сызықсыз серпімді жүйелер қозғалысының орнықтылығы зерттелінеді. Тербелісті процестер болмағандағы серпімді жүйелердің орнықты қозғалысының моделі ұсынылған. Бағалаудың негізі Ляпуновтың орнықтылық критерийіне сүйенеді. А. Н. Төреқожаевтың ішінара дискретизация әдісі арқылы тербелістің резонансты режимдерінің орнықтылығы қарастырылған. Зерттеу нәтижелеріне Флоке әдісі арқылы алынған нәтижелерімен салыстырмалы талдау жүргізілген.

Summary

Stability of movement of elastic systems is investigated in view of geometrical and physical nonlinearity, and also non -linear-viscous resistance. The model of steady movement of elastic systems when oscillatory processes are absent is offered. In a basis of model the criterion of stability on Ляпунову lays. The stability of resonant modes of fluctuations are investigated by the method of partial digitization of A.N.Tjurehodzhaev. The comparative analysis of results of research with results of research on method Floke is carried out .

Институт механики и машиноведения им. У. А. Джолдасбекова;

Казахский национальный университет им. аль-Фараби

Поступила 10.12.2005г.