УДК 517.927.25

А. М. САРСЕНБИ

КРИТЕРИЙ БАЗИСНОСТИ РИССА КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Получены конструктивные, легко проверяемые, необходимые и достаточные условия базисности Рисса систем корневых векторов несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка, заданного на конечном интервале числовой оси.

В работе установлены необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых функций несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка.

М. А. Наймарк [1] описал типы краевых условий для обыкновенных несамосопряженных дифференциальных операторов порядка n, где вводятся понятия нерегулярных, регулярных, усиленно регулярных краевых условий.

В 1962 г. В. П. Михайлов [2], а в 1964 г. Г. М. Кес-сельман [3] (см. также [4]) установили, что система корневых функций обыкновенного дифференциаль-ного оператора *n*-го порядка с усиленно регулярными краевыми условиями образует базис Рисса. Однако с тех пор, кроме усиленно регулярных краевых условий, так и не удалось указать какие-нибудь другие типы краевых условий, обеспечивающих базисность корневых функций.

Значительный шаг в изучении вопросов базисности систем корневых функций несамосопряженных обыкновенных дифференциальных операторов сделан В.А. Ильиным и его последователями. В 1983 г. В. А. Ильин [5] получил необходимые и достаточные условия безусловной базисности систем корневых функций дифференциального оператора второго порядка, а в работе [6] показал, что для краевых условий, являющихся регулярными (но не усиленно регулярными), свойство базисности корневых функций определяется значениями коэффициентов дифференциального оператора, причем это свойство возникает или пропадает при малых изменениях коэффициентов.

Таким образом, выясняется, что в случае регулярных краевых условий на базисность корневых функций влияют как поведение коэффициентов оператора, так и конкретный вид краевых условий. Эти факты свидетельствуют о невозможности выделения каких-нибудь типов краевых условий, кроме усиленно регулярных, обеспечивающих базисность корневых функций.

К настоящему времени других условий, кроме условия В. А. Ильина, позволяющих судить о базисности систем корневых функций обыкновенного дифференциального оператора, по крайней мере известных нам, не установлено.

1. Определение корневых функций. На произвольном конечном интервале G числовой оси рассмотрим дифференциальный оператор

$$Lu = -u'' + q(x)\,u\,, \tag{1}$$

с комплекснозначным потенциалом $q(x) \in L_1(G)$.

Обычно выражение (1) называют дифференциальным выражением, а дифференциальный оператор порождается выражением (1) и некоторыми конкретными краевыми условиями.

Следуя В.А. Ильину [5, 6], введем понятие обобщенных корневых функций (ОКФ) формального дифференциального оператора (1).

Системой ОКФ оператора L назовем произвольную систему комплекснозначных функций $\{u_k(x)\}$, $k = 1,2,...$, каждая из которых абсолютно непрерывна вместе со своей первой производной в интервале G и для некоторого комплексного числа l_k почти всюду на G удовлетворяет уравнению

$$Lu_k = \lambda_k u_k - \theta_k u_{k-1}, \tag{2}$$

где число $q_k = 0$ либо $q_k = 1$ (в этом случае $l_k = l_{k-1}$), $q_1 = 0$.

При $q_k = 0$ функцию $u_k(x)$ назовем обобщенной собственной функцией, а при $q_k = 1$ – обобщенной присоединенной функцией.

Система ОКФ пронумерована так, что вслед за каждой обобщенной собственной функцией стоят соответствующие ей присоединенные функции.

Формально сопряженный оператор к оператору L обозначим следующим образом:

$$L^{*}\upsilon = -\upsilon'' + \overline{q}(x)\,\upsilon\,. \tag{3}$$

Сформулируем теперь теорему В.А. Ильина [5, 6].

Теорема (В.А. Ильин). Пусть $\{u_k(x)\}$ – произвольная полная и минимальная в $L_2(G)$ система ОКФ оператора L, у которой длины всех цепочек при- соединенных функций равномерно ограничены, а система $\{u_k(x)\}$, являющаяся биортогонально со-пряженной к системе $\{u_k(x)\}$, состоит из ОКФ сопряженного оператора (3), т.е. почти всюду в G

$$L^* \upsilon_k = \bar{\lambda}_k \upsilon_k - \theta_{k+1} \upsilon_{k+1},$$

где числа l_k, q_k – те же, что и в уравнении (2).

Если

$$\left| \operatorname{Im} \sqrt{\lambda_k} \right| \leq \text{const}, \tag{4}$$

то для того чтобы каждая из систем $\left\{ u_k(x) \big/ \left\| u_k \right\|_{L_2(G)} \right\}$, $\left\{ \upsilon_k(x) \big/ \left\| \upsilon_k \right\|_{L_2(G)} \right\}$ являлась базисом Рисса в $L_2(G)$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие два неравенства:

$$\sum_{t \leq \left| \sqrt{\lambda_k} \right| \leq t+1} 1 \leq \text{const}, \tag{5}$$

$$\left\| u_k \right\|_{L_2(G)} \cdot \left\| \upsilon_k \right\|_{L_2(G)} \leq \text{const} \tag{6}$$

($\sqrt{\lambda_k}$ – тот корень из числа l_k, для которого $\operatorname{Re} \lambda_k \geq 0$).

Условие (6) называют условием базисности В. А. Ильина.

2. Некоторые замечания. Понятие базисов Рисса было впервые введено Н. К. Бари [7] (см. также [8, 9]).

Имеются примеры базисов (нормированных), не являющихся базисами Рисса [10, 11] (см. также [9]).

Имеются примеры полных и минимальных систем, не являющихся базисами [7].

Необходимость условия (6) для произвольных базисов, не связанных с дифференциальным оператором, доказана в [9, с. 372)].

Достаточность условия (6) для безусловной базисности систем, связанных с дифференциальным оператором второго порядка, впервые установлена В. А. Ильиным [5].

Тот факт, что всякий базис из корневых функций регулярного дифференциального оператора второго порядка является безусловным, установлен автором настоящей статьи в работе [12].

Теорема В. А. Ильина действует и в случае, когда общее число присоединенных функций бесконечно, т.е. в ситуации, в которой неприменимы другие методы изучения базисности (например, методы, развитые в монографии М. А. Наймарка [1], методы теории спектральных операторов, излагаемые в монографии Н. Дандорфа и Дж. Т. Шварца [4]).

3. Первый критерий базисности Рисса.

Теорема 1. Пусть $\{u_k(x)\}$ – произвольная полная в $L_2(G)$ и минимальная система ОКФ оператора L и длины цепочек присоединенных функций равномерно ограничены. Биортогонально сопряженная система $\{u_k(x)\}$ является обобщенным корневым вектором оператора L^*. Тогда, для того чтобы каждая из систем $\{u_k(x)\}$, $\{u_k(x)\}$ была базисом Рисса в $L_2(G)$, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\left| \operatorname{Im} \sqrt{\lambda_k} \right| \leq \text{const}, \tag{4}$$

$$\sum_{t \leq \left| \sqrt{\lambda_k} \right| \leq t+1} 1 \leq \text{const}, \tag{5}$$

$$\left\| u_k \right\|_{L_\infty(G)} \leq \text{const}, \quad \left\| \upsilon_k \right\|_{L_\infty(G)} \leq \text{const}. \tag{7}$$

В отличие от условия В.А. Ильина (6) оценки в условии (7) сформулированы в терминах L_∞-норм. Впрочем, теорему 1 можно было бы сформулировать точно так же, как и теорему В. А. Ильина, заменив лишь условие (6) условием

$$\left\| u_k \right\|_{L_\infty(G)} \cdot \left\| \upsilon_k \right\|_{L_\infty(G)} \leq \text{const}.$$

Перейдем к доказательству теоремы 1. Пусть $\{u_k(x)\}$ – базис Рисса. Тогда

$$\alpha_1 \leq \left\| u_k \right\|_{L_2(G)} \leq \beta_1, \quad \alpha_2 \leq \left\| \upsilon_k \right\|_{L_2(G)} \leq \beta_2,$$

т.е. $\{u_k(x)\}$, $\{u_k(x)\}$ – почти нормированные системы.

Так как для корневых функций оператора L имеют место оценки, полученные В.В. Тихомировым в работе [13]:

$$C_1 \left\| u_k \right\|_{L_q(G)} \leq C_2 \left\| u_k \right\|_{L_S(G)} \leq C_3 \left\| u_k \right\|_{L_q(G)}, \tag{8}$$

где $1 \leq q \leq s \leq +\infty$ (константы C_1, C_2, C_3 зависят от меры области G и от порядка присоединенной функции) и системы $\{u_k(x)\}$ и $\{u_k(x)\}$ подчинены одинаковым условиям, получим, что

$$\left\| u_k \right\|_{L_\infty(G)} \le \text{const}\,, \ \left\| \upsilon_k \right\|_{L_\infty(G)} \le \text{const}\,.$$

Необходимость условий (4) и (5) хорошо известна (см., например, [6]).

Пусть теперь выполнены условия (4), (5) и (7). Выполнение условия (7) в силу неравенств (8) тут же обеспечивает выполнение неравенства (6), которое, в свою очередь, влечет безусловную базисность систем $\{u_k\}$ и $\{u_k\}$ в пространстве $L_2(G)$ ([5]). Кроме того, условие (7) и неравенства (8) обеспечивают почти нормированность рассматриваемых систем $\{u_k(x)\}$ и $\{u_k(x)\}$. Таким образом, каждая из систем $\{u_k(x)\}$ и $\{u_k(x)\}$ образует безусловный, почти нормированный базис. Такой базис является базисом Рисса. Теорема 1 доказана.

4. Второй критерий базисности Рисса. При изучении некоторых вопросов значительный теоретический интерес может иметь следующая теорема.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда необходимым и достаточным условием базисности Рисса в $L_2(G)$ каждой из систем $\{u_k(x)\}$ и $\{u_k(x)\}$ является выполнение неравенств (4), (5) и условий

$$\left|(f,u_k)\right| \to 0\,, \ \left|(f,\upsilon_k)\right| \to 0 \qquad (9)$$

для любой функции $f(x) \in L_1(G)$, где (f,u_k), (f,u_k) – коэффициенты Фурье.

Для развернутого доказательства теоремы 2 приведем некоторые, хорошо известные факты из теории ортогональных рядов.

Пусть R – банахово пространство. Как известно, множество $E \subset R$ называется множеством первой категории, если оно является суммой счетного числа нигде неплотных множеств. В противном случае E называется множеством второй категории.

Необходимы две следующие теоремы, которые справедливы для произвольных систем $\{u_k\}$ и $\{u_k\}$, не связанных с конкретным дифференциальным оператором.

Теорема 3 ([8], [14]). Если для последовательности линейных функционалов $\{F_n(f)\}$ существует последовательность $\{f_n\}$ элементов пространства R, для которых $\left\|f_n\right\| \le 1$ и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|F_n(f_n)\right| = \infty\,,$$

то множество элементов $f \in R$, для которых

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|F_n(f)\right| = \infty\,,$$

образуют множество второй категории, а множество $f \in R$, удовлетворяющих условию

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left|F_n(f)\right| < \infty\,,$$

образует множество первой категории.

С помощью этой теоремы доказывается следующий результат, который хорошо известен в теории ортогональных рядов для вещественнозначных функций [8, 14].

Теорема 4. Пусть $\{u_k(x)\}$ – произвольная комплекснозначная система функций, G – некоторый конечный интервал. Если для любой функции $f(x) \in L_1(G)$ выполнено условие

$$c_k = \int_G f(x)\,\overline{u}_k(x)dx = (f,u_k) \to 0\,,$$

то

$$\left\| u_k \right\|_{L_\infty(G)} \le M\,.$$

Доказательство. Обозначим $F_n(f) = c_n = \int_G f(x)\,\overline{u}_n(x)dx$. Допустим противное. Тогда существует последовательность интервалов $\{E_n\}$, $E_n \subset G$ и последовательность чисел $\{M_n\}$, такие, что $M_n \to \infty$ и $\left|u_{k_n}\right| \ge M_n$ при $x \in E_n$, $\left|E_n\right| > 0$ ($|E_n|$ – длина интервала). Положим

$$f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{u_{k_n}(x)}{|E_n| \cdot \left|u_{k_n}(x)\right|} & при \quad x \in E_n, \\ 0, & при \quad x \notin E_n, \end{cases}$$

где черта означает комплексное сопряжение. Тогда

$$\left\|f_n(x)\right\| = \frac{1}{|E_n|} \int_{E_n} \left| \frac{u_{k_n}(x)}{|u_{k_n}(x)|} \right| dx = 1$$

и

$$F_n(f_n) = \frac{1}{|E_n|} \int\limits_{E_n} \frac{u_{k_n}(x)}{|u_{k_n}(x)|} \overline{u}_{k_n}(x)dx \ge M_n .$$

Итак,

$$\lim_{n\to\infty} \left|F_n(f_n)\right| = \infty .$$

По теореме 3 существует несчетное число функций $f(x) \in L_1(G)$, для которых $\left|(f,u_k)\right| \to \infty$. А это противоречит условию теоремы. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь в пространстве $L_2(G)$ биортогонально сопряженные системы $\{u_k(x)\}$, $\{u_k(x)\}$, т.е. такие, что

$$(u_i, \upsilon_k) = \begin{cases} 0, & i \ne k, \\ 1, & i = k. \end{cases}$$

Формальное разложение функции $f(x) \in L_2(G)$ по каждой из систем $\{u_k(x)\}$ и $\{u_k(x)\}$ имеет вид

$$\sum_{k=1}^{\infty} (f,\upsilon_k)\cdot u_k , \quad \sum_{k=1}^{\infty} (f,u_k)\cdot \upsilon_k .$$

Хорошо известно, что если одна из биортогонально сопряженных систем является базисом, то другая – тоже.

В работе [7] указано, что если $\{u_k(x)\}$ образует нормированный базис в $L_2(G)$, а биортогонально сопряженная ей система равномерно ограничена , т.е. $\left|\upsilon_k(x)\right| \le \mathrm{const}$, то для любой суммируемой функции $f(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_G f(x)\cdot \overline{\upsilon}_n(x)dx = 0 .$$

Этот факт сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 5. Пусть $\{u_k(x)\}$ – базис Рисса в $L_2(G)$, а $\{u_k(x)\}$ – биортогонально сопряженная ей система. Тогда равномерная ограниченность этих систем

$$\left\| u_k \right\|_{L_\infty(G)} \le M , \quad \left\| \upsilon_k \right\|_{L_\infty(G)} \le M'$$

обеспечивает выполнение условий

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_G f(x)\cdot \overline{u}_k(x)dx = 0 ,$$

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_G f(x)\cdot \overline{\upsilon}_k(x)dx = 0$$

для любой функции $f(x) \in L_1(G)$.

Доказательство. Фиксируем произвольное число е > 0. Так как $L_2(G)$ всюду плотно в $L_1(G)$, то для каждого $f(x) \in L_1(G)$ найдется $g(x) \in L_2(G)$, такая, что $\left\|f-g\right\|_{L_1(G)} \le \frac{\varepsilon}{M}$. Рассмотрим коэффициенты Фурье (f, u_k) функции $f(x) \in L_1(G)$.

$$\left|(f,u_k)\right| = \left|(f-g+g,u_k)\right| = \left|(f-g,u_k)+(g,u_k)\right| \le$$

$$\le \left|(f-g,u_k)\right| + \left|(g,u_k)\right| \le \left\|f-g\right\|_{L_1(G)} \cdot \left\|u_k\right\|_{L_\infty(G)} +$$

$$+\left|(g,u_k)\right| \le \frac{\varepsilon}{M}\cdot M + \left|(g,u_k)\right| = \varepsilon + \left|(g,u_k)\right| .$$

Поскольку система $\{u_k(x)\}$ также является базисом Рисса, то $\left|(g,u_k)\right| \to 0$. Таким образом, в силу произвольности е, для любой функции $f(x) \in L_1(G)$

$$\left|(f,u_k)\right| \to 0 .$$

Точно так же доказывается, что $\left|(f,\upsilon_k)\right| \to 0$. Теорема доказана.

Из теорем 4 и 5 вытекает следующее важное следствие.

Следствие. Пусть $\{u_k(x)\}$ – базис Рисса, а $\{u_k(x)\}$ – биортогонально сопряженная ей система. Тогда, для того чтобы для любой функции $f(x) \in L_1(G)$ выполнялись соотношения

$$\lim_{k\to\infty} \left|(f,u_k)\right| = 0 , \quad \lim_{k\to\infty} \left|(f,\upsilon_k)\right| = 0 ,$$

необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$\left\| u_k \right\|_{L_\infty(G)} \le M , \quad \left\| \upsilon_k \right\|_{L_\infty(G)} \le M' .$$

Теперь легко доказать теорему 2. Если выполнены все условия теоремы 2, то по теореме 1 имеют место неравенства (7), которые в силу приведенного следствия обеспечивают выполнение условий (9). Если же выполнены условия теоремы 2 и условия (9), то в силу того же следствия получим справедливость неравенств (7), что, в свою очередь, обе- спечивает базисность Рисса систем $\{u_k\}$ и $\{u_k\}$ (по теореме 1).

Теорема 2 доказана.

Отметим, что при рассмотрении некоторых конкретных задач, проверка условия (7) может оказаться более доступной, чем проверка условия (6). Если же систему ОКФ определить как функции из класса $C^2(G)$, то L_Θ – нормы в условии (7) переходят в обычный максимум.

Автор выражает благодарность М. А. Садыбекову за обсуждение результатов и сделанные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969.
2. *Михайлов В.П.* // Докл. АН СССР. 1962. Т. 144, №5. С. 981-984.
3. *Кессельман Г.М.* // Изв. вузов. 1964. №2. С. 82-93.
4. *Данфорд Н., Шварц Дж.Т.* Линейные операторы: Спектральные операторы. М., 1974. Ч. 3.
5. *Ильин В.А.* // Докл. АН СССР. 1983. №5. Т. 273. С. 789-793.
6. *Ильин В.А.* // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, №9. С. 1516-1529.
7. *Бари Н.К.* // Ученые записки. 1951. Т. 4, вып. 142. С. 69-106.
8. *Качмаж С.Г., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов. М., 1958.
9. *Гохберг И.И., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., 1965.
10. *Бабенко К.И.* // Докл. АН СССР. 1948. Т. 62, №2. С. 157-160.
11. *Гапошкин В.Ф.* // Математический сборник. 1958. Т. 46(88), №3. С. 359-372.
12. *Сарсенбиев А.М.* О свойствах корневых векторов некоторых несамосопряженных дифференциальных операторов: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. Алма-Ата, 1989. 16 с.
13. *Тихомиров В.В.* // Докл. АН СССР. 1983. Т. 274, №4. С. 807-810.
14. *Алексич Г.* Проблемы сходимости ортогональных рядов. М., 1963.

Резюме

Екінші ретті дифференциалдық операторларға байланысты туындайтын кейбір функциялар жиынының Рисс базисі болуының қажетті және жеткілікті шарттары зерттелген.

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, г. Шымкент

Поступила 18.12.05г.