УДК 52.1

А. А. БЕКОВ

ОБ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ ЗАДАЧИ ГИЛЬДЕНА–МЕЩЕРСКОГО

(Представлена академиком НИА РК А. М. Ворониным)

Найден случай интегрируемости задачи, обобщающий первый закон Мещерского изменения массы тел.

Задача двух тел переменной массы в постановке Гильдена–Мещерского моделирует изотропное изменение массы гравитирующих тел. Она отличается от известной кеплеровской задачи лишь переменностью масс гравитирующих тел со временем [1, 2]. В работе [2] получены точные решения задачи Гильдена–Мещерского методом h-параметризации, состоящим в замене времени t в уравнениях движения новой переменной h-квазиинтегралом энергии, играющим в дальнейшем роль параметра. Этим методом ранее Гельфгат [3] получил новые случаи интегрируемости задачи.

Обратный метод h-параметризации, определяемый уравнениями движения задачи и совокупностью задаваемых соотношений

$$\ddot{\vec{r}} = -\mu(t)\frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{2}{r}\frac{d\mu}{dt}, \quad \frac{d\mu}{dh} = \alpha\mu^p, \tag{1}$$

где a, p – произвольные постоянные $(p \neq 0)$, дает точные решения задачи Гильдена–Мещерского для следующей дифференциальной формы законов изменения массы $\underline{m}(t)$ [2]:

$$\dot{\mu}^2 = A_1\mu^{2(1-p)} + A_2\mu^{3(1-p)} + A_3\mu^{2(1-2p)}, \quad p \neq 1, \tag{2}$$

$$\dot{\mu}^2 = \frac{1}{4\alpha^3}\left(\ln\mu - \ln\mu_0 + \alpha h_0 - 1\right) - \frac{C^2}{16\alpha^4\mu^2}, \quad p = 1, \tag{3}$$

где A_1, A_2, A_3 – постоянные:

$$A_1 = \frac{\alpha(1-p)h_0 - \mu_0^{1-p}}{4\alpha^3 p^2(1-p)},$$

$$A_2 = \frac{1}{4\alpha^3 p(1-p)},$$

$$A_3 = -\frac{C^2}{16\alpha^4 p^2}; \tag{4}$$

m_0, h_0 – начальные значения массы m и квазиинтеграла энергии h; C – постоянная интеграла площадей.

Полагая в (2) значение показателя $p = 1/3$, получаем

$$\dot{\mu}^2 = \frac{9}{16\alpha^4}\mu^{\frac{2}{3}}\left[2\alpha\mu^{\frac{4}{3}} + 4\alpha^2\left(h_0 - \frac{3}{2\alpha}\mu_0^{\frac{2}{3}}\right)\mu^{\frac{2}{3}} - C^2\right]. \tag{5}$$

При условиях

$$\alpha < 0, \quad \left[4\alpha^2\left(h_0 - \frac{3}{2\alpha}\mu_0^{\frac{2}{3}}\right)\right]^2 > -8\alpha C^2 \tag{6}$$

интегрирование (5) дает [2]

$$\mu^{\frac{2}{3}} = A + B\sin(at + b), \tag{7}$$

где постоянные A, B, a и b определяются из соотношений

$$A = -\alpha\left(h_0 - \frac{3}{2\alpha}\mu_0^{\frac{2}{3}}\right),$$

$$B = -\frac{\left\{\left[4\alpha^2\left(h_0 - \frac{3}{2\alpha}\mu_0^{2/3}\right)\right]^2 + 8\alpha C^2\right\}^{\frac{1}{2}}}{4\alpha}, \quad (8)$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{-2\alpha^3}},$$

$$b = -\frac{1}{\sqrt{-2\alpha^3}}\beta,$$

$$\beta = t_0 + \sqrt{-2\alpha^3}\,\arcsin\times$$

$$\times\frac{2\alpha\left(2\alpha h_0 - \mu_0^{\frac{2}{3}}\right)}{\left\{\left[4\alpha^2\left(h_0 - \frac{3}{2\alpha}\mu_0^{\frac{2}{3}}\right)\right]^2 + 8\alpha C^2\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

где t_0 – начальный момент времени t.

Таким образом, найден периодический закон (7) для m(t), при выполнении которого задача (1.1) имеет точные решения. Для этого случая определены орбита, ее элементы, приведены качественные особенности движения и дана оценка времени распада и захвата в системе [4]. Вместе с тем в работе [5] предложен метод полуавтономизации уравнений движения для исследования задачи Гильдена–Мещерского и построения семейства промежуточного движения – апериодического движения по квазиконическому сечению с переменным параметром. Пользуясь идеями метода ħ-параметризации и метода полуавтономизации, с помощью обобщения известного преобразования Мещерского [6] замены переменных

$$\vec{r} = v(t,\varphi)\vec{\rho},$$

$$d\tau = u(t,\varphi)dt, \quad (9)$$

где v, u – искомые функции времени t и полярного угла j, приводим уравнения движения задачи Гильдена–Мещерского к интегрируемому случаю при функциях v, u вида

$$v = \frac{\delta\ \ t+\gamma}{\alpha\varphi+\beta},\quad u = \frac{\alpha\varphi+\beta}{\left(\delta\ \ t+\gamma\right)^2},$$

(10)

где a, b, g, d – произвольные постоянные. Решением задачи в этом случае является эволюционирующая орбита

$$r = \frac{\tilde{p}}{1+e\cos\varphi}, \quad (11)$$

совпадающая по виду с кеплеровской, но с переменным параметром $\tilde{p}$ и эксцентриситетом e:

$$\tilde{p} = \frac{C^2}{\mu},\quad \mu = \frac{\alpha\varphi+\beta}{\delta\ \ t+\gamma},\quad e = \frac{\kappa}{\alpha\varphi+\beta}, \quad (12)$$

где k – произвольная постоянная. Решение (12) обобщает случай интегрируемости задачи для первого закона Мещерского [6] изменения массы тел: закон изменения массы (12) включает в себя первый закон Мещерского изменения масс тел, и эксцентриситет e орбиты является переменной величиной, функцией полярного угла. Частными случаями решения (12) являются адиабатические инварианты

$$\tilde{p}\mu = C^2,\quad \mu e = \text{const},$$

$$\frac{\tilde{p}}{e} = \text{const}. \quad (13)$$

Адиабатически-инвариантные решения задачи, включающие инварианты (13), получены ранее в работе [7], где найденные параметрические решения задачи Гильдена–Мещерского представляются через специальные функции небесной механики – функции Бесселя и родственные им функции Ангера, Вебера, Ломмеля, а также через ряды по параметру, являющемуся функцией угловой характеристики движения – полярного угла j траектории. Второй инвариант вида (13) указан также в работе [8], причем выведен Л. Чиара, В. В. Радзиевским и Л. Н. Сурковой разными путями [8]. Таким образом, полученное решение качественно отличается от известного решения Мещерского в виде эволюционирующей орбиты с переменными параметром и эксцентриситетом орбиты, что позволит вы-явить новые свойства движения в задаче двух и многих тел переменной массы.

Работа выполнена в рамках проекта №1-4-1.10-5(15) по Государственному заказу.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Беков А.А.* Интегрируемые случаи и траектории движения в задаче Гильдена–Мещерского // Астрон. журн. 1989. Т. 66. С. 135-151.

2. *Беков А.А.* Задача Гильдена–Мещерского. I. Точные решения: Препринт №90-06. Астрофиз. ин-т им. В. Г. Фесенкова АН КазССР, 1990. 43 с.

3. *Гельфгат Б.Е.* Два случая интегрируемости задачи двух тел переменной массы и их применение к изучению движения в сопротивляющейся среде // Бюл. ИТА АН СССР. 1959. Т. 7, № 5. С. 354-362.

4. *Беков А.А.* О периодических решениях задачи Гильдена–Мещерского // Астрон. журн. 1993. Т. 70, вып. 6. С. 1289-1295.

5. *Беков А.А.* О промежуточном движении и системах оскулирующих элементов в задаче Гильдена–Мещерского // Проблемы физики звезд и внегалактической астрономии. Алматы, 1993. С. 115-134.

6. *Мещерский И.В.* Работы по механике тел переменной массы. М.: ГИТТЛ, 1949, 276 с.

7. *Беков А.А.* Задача Гильдена–Мещерского.III. Параметрические решения // Препринт № 90-02. Астрофиз. ин-т им. В. Г. Фесенкова. 1990, 24 с.

8. *Радзиевский В.В., Суркова Л.П.* Об эволюции элементов орбит в тесных двойных системах // Астрон. журн. 1973. Т. 50, вып. 6. С. 1200-1200.

Резюме

Гильден–Мещерский есептін интегралдану жағдай бірінші Мещерский заңдың қорыту табылды.

Summary

The new integrable case, that generalized the first Mestschersky's low of mass variation, is obtained.

Астрофизический институт
им. В. Г. Фесенкова МОН РК,
г. Алматы

Поступила 25.05.05г.