УДК 539.3

М. Ж. ЖУМАБАЕВ

НЕКОТОРЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ТЕЛ

(Представлена академиком НАН РК Ш. М. Айталиевым)

Получены некоторые разрешающие уравнения осесиметричной задачи напряженности цилиндрических тел относительно компонентов тензора напряжений и перемещений. Представлены интегральные и дифференциальные уравнения относительно радиальных и осевых компонентов перемещений и разрешающие уравнения относительно сдвиговой компоненты тензора напряженности, полученные из уравнений пространственной теории упругости.

Широкое применение композиционных материалов в создании различных конструкций и использование вычислительной техники в проведении расчетов, приводят к дальнейшему развитию численно-аналитических методов решения осесимметричных и пространственных задач теории упругости, основанных на применении соотношений и уравнений трехмерной теории упругости [1–4]. В [5] показано, что разрешающее уравнение четвертого порядка может быть сведено к последовательному решению двух гармонических уравнений. Для ортотропных цилиндров получена система разрешающих уравнений относительно функций напряжений, а также интегро-дифференциальное уравнение относительно сдвиговой компоненты тензора напряжений. Достаточно полное представление о работах в этом направлении можно найти в [6]. Несомненный интерес представляют различные формы уравнений, записанные относительно отдельных компонент тензора напряжений и перемещений, которые могут быть использованы в разработке численно-аналитических методов решения задач механики деформируемого твердого тела. Далее представлены некоторые дифференциальные и интегральные уравнения, полученные для отдельных компонент переме-щений и напряжений.

Уравнения равновесия ортотропного цилиндра [5]:

$$r\,(s_r),_r + s_r - s_j + r\,(s_{rz})¥ = 0,$$
$$r\,(s_{rz}),_r + s_{rz} + r\,(s_z)¥ = 0. \qquad (1)$$

Компоненты тензора деформаций определяются из следующих физических и кинематических соотношений:

$$e_r = (u),_r = (s_r - n_{rj}s_j - n_{rz}s_z) / E_r\,,$$
$$e_z = (w)¥ = (-n_{zr}s_r - n_{zj}s_j + s_z) / E_z\,,$$
$$e_j = u/r = (-n_{jr}s_r + s_j - n_{jz}s_z) / E_{jj}\,, \qquad (2)$$
$$e_{rz} = (u)¥ + (w),_r = s_{rz} / G_{rz}.$$

Здесь s_r, s_j, s_z и s_{rz} – радиальная, окружная, осевая и касательная компоненты тензора напряжений; e_r, e_j, e_z и e_{rz} – соответствующие компоненты тензора деформаций; u, w – компоненты (радиальная и осевая) вектора перемещений. Кроме того, производные по радиальной координате r обозначены $(...),_r$, а по осевой z – $(...)¥$. Для ортотропного тела имеют место связи

$$n_{rj} / E_r = n_{jr} / E_j\,, \quad n_{rz} / E_r = n_{zr}\,E_z\,,$$
$$n_{jz} / E_j = n_{zj} / E_z. \qquad (3)$$

Если в общем случае деформирования ортотропное тело имеет девять независимых упругих констант [5], то в осесимметричной деформации из них участвуют только семь постоянных – модули упругости в радиальном E_r, кольцевом E_j и осевом направлениях E_z, коэффициенты Пуассона n_{rj}, n_{rz} и n_{jz}, характеризующие сжатие в направлении второго индекса при растяжении в направлении первого индекса, и модуль сдвига G_{rz}.

Далее используются разрешенные относительно напряжений физические соотношения (2)

$$s_r = E_1\,[(u),_r + n_{12}u/r + n_{13}(w)¥],$$
$$s_j = E_2\,[n_{21}(u),_r + u/r + n_{23}(w)¥],$$
$$s_z = E_3\,[n_{31}\,(u),_r + n_{32}u/r + (w)¥],$$
$$s_{rz} = G_{rz}\,[(u)¥ + (w),_r], \qquad (4)$$

в которых

$$E_1 = E_r(1-n_{jz}n_{zj})/D, \quad n_{12} = (n_{rj}+n_{rz}n_{zj})/(1-n_{jz}n_{zj}),$$
$$n_{13} = (n_{rz}+n_{rj}n_{jz})/(1-n_{jz}n_{zj}),$$
$$E_2 = E_j(1-n_{zr}n_{rz})/D, \quad n_{21} = (n_{jr}+n_{jz}n_{zr})/(1-n_{zr}n_{rz}),$$

$$n_{23} = (n_{jz}+n_{jr}n_{rz})/(1-n_{zr}n_{rz}),$$
$$E_3 = E_z(1-n_{rj}n_{jr})/D, \quad n_{31} = (n_{zr}+n_{zj}n_{jr})/(1-n_{rj}n_{jr}),$$
$$n_{32} = (n_{zj}+n_{zr}n_{rj})/(1-n_{rj}n_{jr}),$$
$$D = 1-n_{rj}n_{jr} - n_{jz}n_{zj} - n_{zr}n_{rz} - n_{rj}n_{jz}n_{zr} - n_{rz}n_{zj}n_{jr}. \quad (5)$$

Композиционный материал с произвольной системой армирования является ортотропным телом. Композиционный материал с продольно уложенными волокнами описывается моделью трансверсально-изотропного тела. В этом случае

$$E_r = E_j, \quad n_{rj} = n_{jr}, \quad n_{rz} = n_{jz}, \quad n_{zr} = n_{zj}$$

и

$$E_1 = E_2, n_{12} = n_{21}, n_{13} = n_{23}, n_{31} = n_{32}. \quad (6)$$

и имеются пять независимых постоянных (E_r, E_z, n_{rj}, n_{rz}, G_{rz}).

Композиционный материал, армированный в кольцевом направлении, также является трансверсально-изотропным материалом. В этом случае

$$E_r = E_z, n_{rz} = n_{zr}, n_{jr} = n_{jz}, n_{rj} = n_{zj}$$

и

$$E_1 = E_3, n_{13} = n_{31}, n_{12} = n_{32}, n_{21} = n_{23}. \quad (7)$$

Для изотропного материала все модули и коэффициенты Пуассона равны между собой, а модуль сдвига G = E /2(1+n). Для изотропного тела количество независимые упругие характеристики две – модуль упругости E и коэффициент Пуассона n.

Для получения разрешающих уравнений осесимметричной деформации ортотропных цилиндров относительно радиальной компоненты u вектора перемещений вместо компонент тензора напряжений в уравнения равновесия (1) подставляются их выражения (4), в которых компоненты тензора деформаций выражены через перемещения (см. зависимости (2)). При этом получается система дифференциальных уравнений

$$L(u) + aw¥,_r + bw¥/r = 0,$$
$$M(u) + h(w,_{rr} + w,_r/r) + w ¥¥ = 0 \quad (8)$$
$$(\text{или } M(u) + Q(w) = 0),$$

в которых используются обозначения

$$L(u) = u,_{rr} + u,_r/r - l^2u/r^2 + g¥¥ = r^{l-1}[(r^{1-2l}(r^lu),_r],_r + gu¥¥,$$
$$M(u) = cu¥,_r + du¥/r = cr^{-d/c}(r^{d/c}u¥),_r, \quad (9)$$
$$Q(w) = h(w,_{rr} + w,_r/r) + w¥¥ = hr^{-1}(rw,_r),_r + w¥¥,$$

и

$$l^2 = E_2/E_1,\ g = G_{rz}/E_1,\ a = n_{13} + g,\ b = n_{13} - l^2n_{23},$$
$$h = G_{rz}/E_3,\ c = n_{31} + h,\ d = n_{32} + h. \quad (10)$$

Характерно, что для цилиндров, материал которых моделируется трансверсально-изотропной средой, соотношения (10) упрощаются. Для композиционных материалов с волокнами, уложенными в продольном (ось z) направлении, имеем

$$l^2 = 1,\ g = G_{rz}/E_1,\ a = n_{13} + g,\ b = 0,$$
$$h = G_{rz}/E_3,\ n_{31} = n_{32} \text{ и } c = d = n_{31} + G_{rz}/E_3, \quad (11)$$

а для композиционных материалов с поперечно уложенными волокнами (кольцевая намотка) –

$$l^2 = E_2/E_1,\ g = G_{rz}/E_1,\ a = n_{13} + g,\ b = n_{13} - l^2n_{23},$$
$$h = G_{rz}/E_3,\ n_{31} = n_{32} \text{ и } c = d, \quad (12)$$

и наконец, для цилиндров из изотропных материалов –

$$E = E_1 = E_2 = E_3,\ n = n_{13} = n_{23} = n_{31} = n_{32},$$
$$l^2 = 1,\ g = h = G_{rz}/E = 1/2(1+n),$$
$$a = c = d = n + g,\ b = 0. \quad (13)$$

Равенство параметров $c = d$ для трансверсально-изотропных тел и условие, что параметр $b = 0$ для изотропных тел заметно упрощает способ получения разрешающих уравнений.

В ряде случаев, особенно при получении приближенных решений, удобно оперировать интегральным уравнением относительно радиальной компоненты u вектора перемещений. Для получения разрешающего интегрального уравнения относительно радиальной компоненты u вектора перемещения для ортотропных тел используется система уравнений (8), из которой следует, что

$$w = -(r^{-b/a}/a)\ т\ (r^{b/a}т\ L(u)dz)dr + r^{-b/a}\ т\ F_1(z)dz + \Phi_1(r),$$
$$w¥ = -(r^{-b/a}/a)\ т\ r^{b/a}L(u)dr + r^{-b/a}F_1(z), \quad (14)$$
$$w,_r = -(1/a)[т\ r^{b/a}L(u)dz - (b/a)r^{-b/a-1}тт\ r^{b/a}L(u)drdz] - (b/a)r^{-b/a}тF_1(z)dz + \Phi_1,_r(r).$$

Здесь $F_1(z)$ и $\Phi_1(r)$ – произвольные функции интегрирования.

Интегрируя второе уравнение системы (8), получаем

$$u = -(r^{-d/c}/c)\ т\ (r^{d/c}тQ(w)dz)dr + r^{-d/c}\ т\ F_2(z)dz + \Phi_2(r),$$
$$u¥ = -(r^{-d/c}/c)\ т\ r^{d/c}\ Q(w)dr + r^{-d/c}F_2(z), \quad (15)$$
$$u,_r = -(1/c)[т\ Q(w)dz - (d/c)r^{-d/c-1}\ т\ (r^{d/c}тQ(w)dz)dr]$$

–

$$-(d/c)r^{-d/c-1}\text{ т }F_2(z)dz + \Phi_{2},_r(r).$$

Здесь $F_2(z)$ и $\Phi_2(r)$ – новые произвольные функции. Если в равенствах (15) аргументы оператора $Q(w)$ заменить их выражениями (14) через радиальную компоненту перемещения u, то можно записать интегральное уравнение относительно радиальной компоненты вектора перемещения в окончательной форме. Следует заметить, что интегральные уравнения (15) для цилиндров из трансверсально-изотропных или изотропных материалов становятся более простыми.

Для получения разрешающего интегрального уравнения относительно осевой компоненты вектора перемещения w для ортотропных тел ис-пользуется уравнение (8), из которого следует, что

$$u = -(r^{-d/c}/c)\text{ т }[\text{т }r^{d/c}\,Q(w)dr + F_3(z)]dz + \Phi_3(r) \quad (16)$$

$$u\text{¥} = -(r^{-d/c}/c)\text{ т }r^{d/c}\,Q(w)dr + F_3(z)$$

$$u,_r = -(1/c)\text{ т }Q(w)dz + (d/c^2)(r^{-d/c-1})\text{ т }[\text{т }r^{d/c}\,Q(w)dr +$$

$$+ F_3(z)]dz + \Phi_3,_r(r).$$

Здесь $F_3(z)$ и $\Phi_3(r)$ – произвольные функции интегрирования.

Интегрируя первое уравнение системы (8), имеем

$$ar^{b/a}w = -\text{т }\{r^{b/a}[u,_r + (1-b/a)r^{-1}u] + \quad (17)$$

$$+ (b/a+l-1)^2\text{ т }r^{b/a-2}udr + F_4(z)\}dz - g\text{ т }r^{b/a}\,u\text{¥}dr + \Phi_4(r).$$

Здесь $F_4(z)$ и $\Phi_4(r)$ – новые произвольные функции. Если вместо радиальной компоненты перемещения u и ее производных $u,_r$ и $u\text{¥}$ подставить их значения, определенные из (16) через осевую компоненту перемещения w, то можно записать окончательное интегральное уравнение относительно осевой компоненты вектора перемещения.

В случаях, когда на граничных поверхностях исследуемого цилиндра заданы касательные напряжения s_{rz}, представляется удобным использовать уравнения, записанные относительно касательных напряжений. Разрешающие уравнения относительно радиальной s_r и сдвиговой s_{rz} компонент тензора напряжений при осесимметричной деформации ортотропного тела получены путем следующих преобразований.

Из уравнений равновесия (1) следует, что кольцевая s_j и осевая s_z компоненты тензора напряжений могут быть найдены из соотношений

$$s_j = rs_r,_r + s_r + rs_{rz}\text{¥}, \quad s_z\text{¥} = -(s_{rz}),_r - s_{rz}/r. \quad (18)$$

Для упрощения последующих записей удобно ввести обозначения

$$s_r = j,\ \ s_{rz} = -y\text{¥},\ \ s_z = (y),_r + y/r = r^{-1}(ry),_r,$$

$$s_j = r(j),_r + j - r(y)\text{¥¥} = (rj),_r - r(y)\text{¥¥}. \quad (19)$$

Для получения соответствующих уравнений используются уравнения совместности деформаций

$$(re_j),_r = e_r,\ \ r(e_j)\text{¥¥} + (e_z),_r - (e_{rz})\text{¥} = 0 \quad (20)$$

и соотношения (2), связывающие поля напряжений и деформаций для ортотропного тела. При этом

$$r^l[r^{l-2l}(r^{1+l}j),_r],_r + a_0 ry,_{rr} + a_1 y,_r +$$

$$+ a_2 r^{-1}y + r^2 y,_r\text{¥¥} + a_3 ry\text{¥¥} = 0, \quad (21)$$

$$hn_{zj}r^{-1-a}(r^{2+}a_j,_r),_r - gr^{1+n}(r^{1-n}j\text{¥¥}) + h[r^{-1}(ry),_r],_r +$$

$$+ y\text{¥¥} - gr^2 y\text{¥¥¥¥} = 0.$$

Здесь введены обозначения

$$a_0 = n_{jz},\ a_1 = 2n_{jz} - l^2 n_{rz},\ a_2 = -l^2,\ a_3 = 2 + n_{jr},$$

$$a = n_{zr}/n_{zj},\ n = n_{jr}. \quad (22)$$

Интегрируя первое уравнение системы (21), находим

$$-r^{1+l}j = a_0\,r^l y + (a_1 - a_0)\text{ т }r^{l-1}ydr +$$

$$+ [la_1 - a_0 l(1-l) - a_2]\text{ т }(r^{2l-1}\text{т}t^{-l1}ydt)dr + \text{т}r^{l+1}y\text{¥¥}dr +$$

$$+ (a_3 - 2 + l)\text{т}(r^{2l-1}\text{т}t^{1-l}y\text{¥¥}dt)dr + rF(z) + \Phi(z). \quad (23)$$

Здесь $F(z)$ и $\Phi(z)$ – произвольные функции интегрирования.

Если определенные из (23) функцию j и ее производные подставить во второе уравнение системы (21), то после несложных, но громоздких преобразований можно получить интегро-дифференциальное уравнение относительно функции y, производная которой по осевой координате в соответствии с (19) и является сдвиговой компонентой тензора напряжения.

Полученные интегральные и дифференциальные уравнения могут быть использованы в решениях задач напряженно-деформированного состоянии цилиндрических тел численно-аналитическими методами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Елтышев В.А.* Напряженно-деформированное состояние оболочечных конструкций с наполнителем. М.: Наука, 1981. 111 с.

2. *Григоренко Я.М., Василенко А.Т.* Задачи статики анизотропных неоднородных оболочек. М.: Наука, 1992. 332 с.

3. *Грудеев М.Д.* Толстые, упругие стержни пластинки и оболочки. М.: Наука, 2001. 173 с.

4. *Андреев В.И.* Некоторые задачи и методы механики неоднородных тел. М.: АСВ, 2002. 287 с.

5. *Лехницкий С.Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.: Наука, 1977. 415 с.