УДК 621.01

Б. И. ЖУРСЕНБАЕВ, Ж.К. ЕСОВА, Г. Ш. БЕКЕТОВ, Б. Ш. БЕКЕТОВ

СОСТАВЛЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЙ МЕХАНИЗМОВ ВЫСОКИХ КЛАССОВ

Установлено, что совместное использование матричного преобразования Денавита–Хартенберга и уравнений Лагранжа второго рода приводит к компактной векторно-матричной форме уравнений движения, удобной для аналитического исследования.

Для динамического анализа механизмов высоких классов (МВК), определения конструктивных параметров и законов управления необходимо иметь расчетные механические модели, с достаточной точностью описывающие свойства реальных машин и устройств разработанных на базе МВК. Выбор расчетной модели в каждом конкретном случае определяется классом МВК, механическими свойствами (инерционными, упругими, диссипативными и т.п.) его шарниров, звеньев, типом и характеристиками приводов, а также необходимой точностью производимых расчетов.

В наиболее простых моделях считается, что все звенья механизма – абсолютно твердые тела. Кинематические пары предполагаются идеальными, трением в них пренебрегается. Модели описанного типа с приемлемой степенью точности отражают свойства многих реальных механизмов и широко распространены в механике машин [1]. Такие модели используются для анализа динамики и уравнения движения механизмов, а также для определения конструктивных параметров и законов управления, обеспечивающих требуемое качество функционирования этих машин. Обусловленное упругостью, люфтами, трением и другими неидеальностями отличие большинства машин от системы абсолютно твердых тел с идеальными связями сравнительно мало. Это дает возможность в исходном (нулевом) приближении рассматривать МВК как систему абсолютно твердых тел и учитывать влияние перечисленных неидеальностей методами теории возмущений.

В исследовании динамики механических систем одним из возможных методов описания динамической модели является метод, основанный на использовании уравнений Лагранжа второго рода. Он применим для любых голономных механических систем с конечным числом степеней свободы, в том числе и для систем, содержащих деформируемые элементы (пружины, упругие стержни и т.п.), если можно пренебречь их инерционностью.

В принципе в качестве уравнений движения МВК могут иметь место другие формы уравнений динамики, известные в аналитической механике: уравнения Гамильтона, уравнение Раусса, уравнение Эйлера–Лагранжа и др. [2, 3]. Уравнения движения могут быть составлены также путем применения к отдельным звеньям МВК теорем механики об изменении количества движения и момента количества движения. Существуют также подходы к описанию динамики МВК, не требующие составления дифференциальных уравнений движения, а основанные на непосредственном использовании вариационных принципов механики.

В случае многозвенного МВК реализация любого из методов составления уравнений движения приводит к необходимости выполнять утомительные аналитические выкладки. Сами же уравнения получаются очень громоздкими. В связи с этим перспективным представляется использование ЭВМ для проведения аналитических преобразований при составлении уравнений движения.

Вывод уравнений динамики движения методом Лагранжа–Эйлера отличается простотой и единством подхода. Этот подход приводит к системе нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка и отражает эффекты, связанные с действием сил инерции, обусловленных ускоренным движением звеньев, действием кориолисовых и центробежных сил, а также действием сил тяжести. Совместное использование матричного преобразования Денавита–Хартенберга и метода Лагранжа приводит к компактной векторно-матричной форме уравнений движения, удобной для аналитического исследования и допускающей реализацию на ЭВМ. Если известны решения обратной задачи кинематики, то и известны обобщенные координаты, позволяющие придать рабочей точке положение и ориентацию относительно базовой системы координат.

Уравнения динамики движения механической системы методом Лагранжа–Эйлера основаны на использовании уравнения

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial L}{\partial q_i}=\mathrm{Q}_i,\ \mathrm{i}=1,\dots,5, \qquad (1)$$

где L – функция Лагранжа, $L=K–П$; K – кинетическая энергия механической системы; $П$ – потенциальная энергия механической системы; q_i – обобщенные координаты механической системы; $\dot{q}_i$ – первая производная по времени обобщенных координат; Q_i – обобщенные силы (или моменты), создаваемые в i-м сочленении для реализации заданного движения i-го звена.

Для того чтобы воспользоваться уравнениями Лагранжа–Эйлера, необходимо знать кинетическую энергию рассматриваемой физической системы, а следовательно, и скорости всех ее точек с учетом движения всех шарниров МВК.

Рассмотрим произвольную точку, неподвижную относительно i-го звена и заданную в системе координат i-го звена однородными координатами rii:

$$r^i_i = (x_i, y_i, z_i)\,T. \qquad (2)$$

Обозначим через $r°_i$ координаты этой же точки относительно базовой системы координат, через $A°_i$ – матрицу, определяющую связь между системой координат i-го звена и базовой системой координат. Тогда связь между $r°_i$ и r^i_i определяется соотношением

$$r°_i = A°_i\, r^i_i, \qquad (3)$$

где $A°_i = A°_1\, A^1_2 \dots A_i i^{-1}$, i=1,…, 5.

Для вывода уравнений движения механизма четвертого класса, изображенного на рисунке, используем обобщенные координаты q_i. Так как звенья механизма представляют собой твердые тела, точка r^i_i имеет нулевую скорость относительно i-й системы координат, не являющейся в общем случае инерциальной. Скорость точки r^i_i относительно базовой системы координат

$$v°_i = v_i = d/dt(r_i°) = d/dt(A_i°\, r_i^i) =$$
$$= A_i°\, A_2^1 \dots A_i i^{-1}\, r_i i + A_1°\, A_2^1 \dots A_i i^{-1}\, r_i^i +$$
$$+A_1° \dots A_i i^{-1}\, r_i^i + A_i°\, r_i^i = [S(¶A_i°/¶q_i)q_i]\,r_i^i, \qquad (4)$$

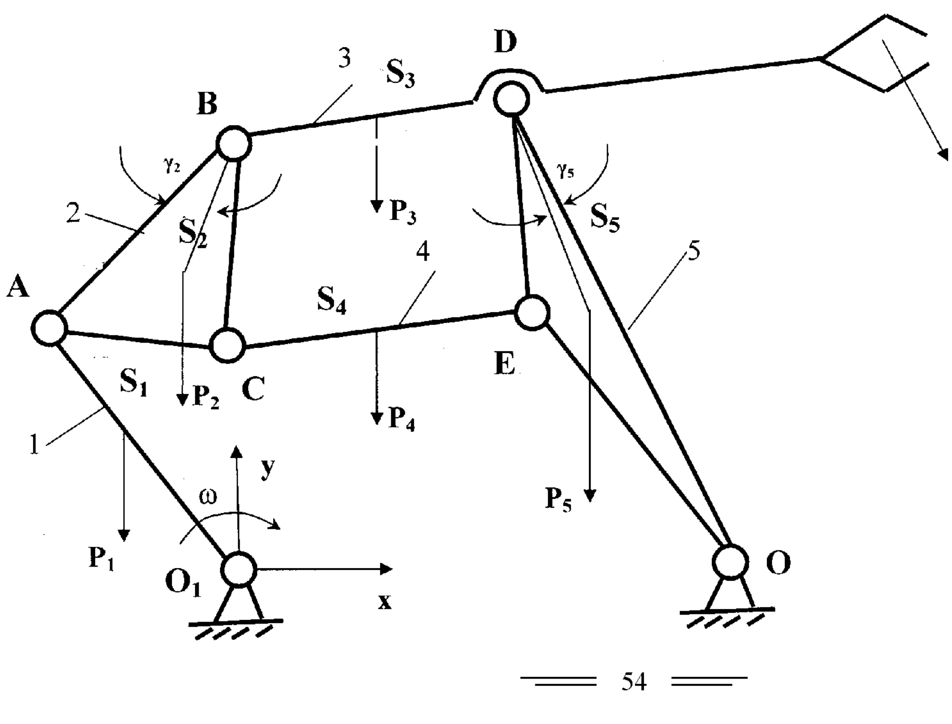
при условии $r_i^i = 0$.

Частные производные матрицы $A_i°$ по переменным q_i легко вычислить с помощью матриц H_i, которые соответственно для вращательного и поступательного сочленения имеют вид

$$H^в_i = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\quad H^п_i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \qquad (5)$$

Используя эту матрицу, можно записать

$$¶A_i /¶q_i = H_i\, A_i i^{-1}, \qquad (6)$$



Механизм четвертого класса

или

$$¶A_i°/¶q_i = \begin{cases} A_i^0 A_2^1 ... A_{j-1}^{i-2} H_j A_j^{j-2} ... A_i^{i-1}, \text{ при } j \le i, \\ 0, \text{ при } j > i. \end{cases} \quad (7)$$

По смыслу равенство (7) описывает изменение положения точек i-го звена, вызванное движением в j-м сочленении механизма. Для упрощения вводим обозначение $U_{ij} = ¶A_i°/¶q_j$, с учетом которого записываем

$$U_{ij} = \begin{cases} A_{j-1}^0 H_j A_i^{i-1}, \text{ при } j \le im, \\ 0, \text{ при } j > i. \end{cases} \quad (8)$$

Используя введенное обозначение, формулу (58) представляем в форме

$$v_i = [SU_{ij}\, q_j] r_i^i. \quad (9)$$

Матрица U_{ij} характеризует изменение положения точки i-го звена относительно базовой системы координат q_i. Данная матрица одинакова для всех точек i-го звена и не зависит от распределения массы в этом звене. Не зависят от распределения массы и величины $\dot{q}_i$.

Используя выражения (8), получаем

$$U_{11} = ¶A_1°/¶q_1 = H_1 A_1° = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ө$$

$$ө \begin{bmatrix} C_{11} & -S_{11} & 0 & a_{11}C_{11} \\ S_{11} & C_{11} & 0 & a_{11}S_{11} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_{11} & -C_{11} & 0 & -a_{11}S_{11} \\ C_{11} & -S_{11} & 0 & a_{11}C_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Имея в виду выражения (5), (7) и (8), получаем остальные скорости:

$$U_{21} = H_1 A_2° = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ө$$

$$ө \begin{bmatrix} C_{22} & -S_{22} & 0 & a_{22}C_{22} \\ S_{22} & C_{22} & 0 & a_{22}S_{22} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -S_{22} & -C_{22} & 0 & -a_{22}S_{22} \\ C_{22} & -S_{22} & 0 & a_{22}C_{22} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$U_{31} = \begin{bmatrix} -S_3 & -C_3 & 0 & -a_3S_3 \\ C_3 & -S_3 & 0 & a_3C_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$U_{41} = \begin{bmatrix} -S_4 & -C_4 & 0 & -a_4S_4 \\ C_4 & -S_4 & 0 & a_4C_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$U_{51} = \begin{bmatrix} -S_{53} & -C_{53} & 0 & -a_{53}S_{53} \\ C_{53} & -S_{53} & 0 & a_{53}C_{53} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Теперь, подставляя полученные выражения в формулу (2), имеем скорости точек r_i^i относительно базовой системы координат.

Зная скорость произвольной точки каждого звена механизма, находим кинетическую энергию i-го звена. Обозначаем через K_i кинетическую энергию элемента массы dm i-го звена. Тогда

$$dK_i = 1/2(x^2+y^2+z^2)dm = 1/2\text{след}(\dot{T}_i J_i \dot{T}T_i)dm =$$

$$= 1/2\text{tr}(\dot{T}_i J_i \dot{T}T_i)dm. \quad (10)$$

Здесь вместо скалярного произведения используется оператор tr (след матрицы), что в дальнейшем позволит перейти к матрице инерции J_i i-го звена. Подставляя в выражение (10) значение v_i из равенства (9), получаем

$$K = SK_i = 1/2S\text{tr}(SSU_{ip} J_i UT_i r\, \dot{q}_p \dot{q}r) =$$

$$= 1/2SSS[\text{tr}(U_{ip} J_i UT_i r)\dot{q}_p \dot{q}r], \quad (11)$$

следовательно, кинетическая энергия механизма равна арифметической сумме кинетической энергии всех его звеньев:

$$K = 1/2S\text{tr}(\dot{T}_i J_i \dot{T}_i T), \quad (12)$$

где $J_i = \begin{bmatrix} J_{XX}^{(i)} & J_{XY}^{(i)} & J_{XZ}^{(i)} & m_i x_i^* \\ J_{YX}^{(i)} & J_{YY}^{(i)} & J_{YZ}^{(i)} & m_i y_i^* \\ J_{ZX}^{(i)} & J_{ZY}^{(i)} & J_{ZZ}^{(i)} & m_i z_i^* \\ m_i x_i^* & m_i y_i^* & m_i z_i^* & m_i \end{bmatrix}$ –

матрица инерции i-го звена; (13)

m_i – масса i-го звена; x^*_i, y^*_i, z^*_i – координаты центра тяжести i-го звена в собственной системе координат; $J(i)_{xx}$, $J(i)_{yy}$, $J(i)_{zz}$ – элементы тензора инерции i-го звена относительно собственных осей.

Величины J_i зависят только от распределения массы i-го звена в i-й системе координат и не зави-сят ни от положения, ни от скорости звеньев. Это позволяет, вычислив матрицы J_i, использовать полученные значения в дальнейшем для вычисления кинетической энергии механизма.

Используя полученные выражения, для первого звена записываем:

$$K_1 = 1/2St2(\dot{T}_1 J_1 \dot{T}_1 T), \tag{14}$$

где $\dot{T}_1 = U_{11}\dot{q}_1 = HA^{\circ}_1 \dot{q}_1 =$

$$= \begin{bmatrix} -S_{11} & -C_{11} & 0 & -a_{11}S_{11} \\ C_{11} & -S_{11} & 0 & a_{11}C_{11} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \dot{q}_1,$$

или

$$K_1 = 1/2tr \begin{bmatrix} -S_{11}q_1 - C_{11}q_1 & 0 & -a_{11}S_{11}q_1 & \\ -C_{11}q_1 - S_{11}q_1 & 0 & -a_{11}S_{11}q_1 & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} J^1_{XX} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J^1_{YY} & 0 & m_1 y_1^* \\ 0 & 0 & J^1_{ZZ} & 0 \\ 0 & 0 & m_1 y_1^* & m_1 \end{bmatrix} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -S_{11}q_1 & C_{11}q_1 & 0 & 0 \\ -C_{11}q_1 & -S_{11}q_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -a_{11}S_{11}q_1 & -a_{11}C_{11}q_1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = (2J^1_Z + m_1 a_{11}^2)\dot{q}_1^2/2.$$

Таким образом,

$$K_1 = (2J^1_Z + m_1 a_{11}^2)\dot{q}_1^2/2, \tag{15}$$

причем J^1_z получено с учетом $J^1_{xx} + J^1_{yy} = J^5_z$, где J^5_z – осевой момент инерции звена 1 относительно оси z_1.

Аналогично, для второго звена механизма,

$$K_2 = (2J^1_Z + m_1 a_{11}^2)\dot{q}_1^2/2. \tag{16}$$

$$K_3 = 1/2(2J^3_z + m_3 a_3^2)\dot{q}_1^2/2, \tag{17}$$

где $a_3 = a_{31} + a_{32}$.

Выражение (17) – кинетическая энергия третьего звена механизма.

Кинетическая энергия четвертого звена будет

$$K_4 = 1/2(2J^4_z + m_4 a_4^2)\dot{q}_1^2/2.$$

Для пятого звена находим

$$K_5 = 1/2(2J^5_z + m_5 a_{53}^2)\dot{q}_1^2/2.$$

Полную кинетическую энергию механизма четвертого класса получаем, складывая арифметически K_1, K_2, K_3, K_4 и K_5:

$$K_M = \left(J_z^1 + \frac{m_1 a_{11}^2}{2} + J_z^2 + \frac{m_2 a_{22}^2}{2} + J_z^3 + \frac{m_3 a_3^2}{2} + J_z^4 + \frac{m_4 a_4^2}{2} + J_z^5 + \frac{m_5 a_{53}^2}{2} + J_z^6 + \frac{m_6 a_6^2}{2} + J_z^7 \right) q_1^2. \tag{18}$$

Полная потенциальная энергия, связанная с весом механизма четвертого класса, определяется как сумма всех потенциальных энергий отдельных звеньев. Потенциальная энергия i-го звена механизма в поле сил тяжести

$$\Pi_i = P_i y^*_o, \tag{19}$$

где P_i – сила тяжести i-го звена; y^*_o – координата по оси y центра тяжести i-го звена.

В матричной записи формула (19) приобретает вид

$$\Pi_i = -mi\, G^T T_i R^*_i,$$

где R^*_i – матрица-столбец, первые три элемента которой суть декартовы координаты центра тяжести звена i в собственной системе отсчета, связанной со звеном i; G^T – матрица-строка, описывающая гравитационное ускорение в базовой системе координат: $G^T = (g_x, g_y, g z, 0)$; g – ускорение свободного падения на поверхности Земли (g=9,8062 м/с^2).

Для механизма, показанного на рисунке $G^T = (0, -g, 0, 0)$.

Суммируя потенциальные энергии всех звеньев, получаем

$$\Pi_M = -Smi\, G^T T_i R^*_i. \tag{20}$$

Вычисляем потенциальную энергию пятизвенного механизма, считая, что силы тяжести звеньев P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 известны.

Потенциальная энергия первого звена, согласно (20), будет

$$\Pi_1 = -m_1 G^T T_1 R^*_1 = [\,0, -g, 0, 0] \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} c_u & -s_u & 0 & a_u c_u \\ s_u & c_u & 1 & a_u c_u \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ y_1^* \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -g(y^*_1 C_{11} - a_{11} S_{11}).$$

Для вычисления потенциальных энергии остальных звеньев нужны матрицы T_2, T_3, T_4 и T_5 из формул (8). Тогда потенциальные энергии для этих звеньев будут

$$\Pi_2 = P_2[y^*_2(-S_{11}S_{22}+C_{11}C_{22})+ +a_{22}(S_{11}C_{22}+S_{22}C_{11})+a_{11}S_{11}];$$

$$\Pi_3 = P_3[(a_{31}C_{31}-S_{31})(S_{11}C_{21}+C_{11}S_{21})-(a_{31}S_{31}+C_{31})\times \times(S_{11}S_{21}-C_{11}C_{21})+(a_{11}+a_{21})S_{11}+ +a_{21}C_{11}S_{21}];$$

$$\Pi_4 = P_4[(a_{11}C_{11}-S_{11})(S_{11}C_{22}+C_{11}S_{22})+(a_4S_4+C_4)\times \times(-S_{11}S_{22}+C_{11}C_{22})+(a_{11}+a_{22})S_{11}+a_{22}C_{11}];$$

$$\Pi_5 = P_5[a_{53}(S_{53}+C_{53})[C_4(S_{11}C_{22}+C_{11}S_{22})+ +S_4(-S_{11}S_{22}+C_{11}C_{22})]-S_4(S_{53}-C_{53})\times \times(C_{11}C_{22}-S_{11}S_{22})-C_4(S_{53}-C_{53})\times \times(S_{11}C_{22}+C_{11}S_{22})+a_4[C_4(S_{11}C_{22}+C_{11}S_{22})+ +S_4(-S_{11}S_{22}+C_{11}C_{22})+a_{22}(S_{11}C_{22}+C_{11})+a_{11}S_{11}. \quad (22)$$

Суммируя (21) и (22), получаем полную потенциальную энергию механизма четвертого класса:

$$\Pi_м = P_1(-y^*_1S_{11}+a_{11}C_{11})\dot{\theta}_{11}+ +P_2[y^*_2(-C_{11}S_{22}+S_{11}C_{22})+a_{22}(C_{11}C_{22}+S_{22}S_{11})+ +a_{11}C_{11}]\dot{\theta}_{11}+P_3[(a_{31}C_{31}-S_{31})(C_{11}C_{21}-S_{11}S_{21})- -(a_{31}S_{31}+C_{31})(C_{11}S_{21}+S_{11}C_{21})+(a_{11}+a_{21})C_{11}- -a_{21}S_{11}S_{21}]\dot{\theta}_{11}+P_4[(a_4C_4-S_4)(C_{11}C_{22}+C_{11}S_{22})+ +(a_4S_4+C_4)(-C_{11}S_{22}-S_{11}C_{22})+(a_{11}+a_{22})C_{11}+ +a_{22}S_{11}]\dot{\theta}_{11}+P_5[a_{53}(S_{53}+C_{53})[C_4(C_{11}C_{22}- -S_{11}S_{22})+S_4(-C_{11}S_{22}+ +S_{11}C_{22})]-S_4(S_{53}-C_{53})\times +(-S_{11}C_{22}-C_{11}S_{22})-C_4(S_{53}-C_{53})(C_{11}C_{22}+ +S_{11}S_{22})+a_4[C_4(C_{11}C_{22}+S_{11}S_{22})+S_4(-S_{11}S_{22}+ +S_{11}C_{22})+a_{22}(C_{11}C_{22}-S_{11})+a_{11}C_{11}]\dot{\theta}_{11}. \quad (23)$$

Выражения кинетической и потенциальной энергий для механизма четвертого класса, подставляя в формулу (1), получаем уравнения движения его звеньев. Аналогично можно получить уравнение движения звеньев любого механизма высокого класса.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Джолдасбеков У.А.* Теория механизмов высоких классов. Алматы: Ғалым, 2001. 427 с.

2. *Кобринский А.А., Кобринския А.Е.* Манипуляционные системы роботов. М.: Наука, 1985.

3. Механика промышленных роботов: Учебн.пособ. для втузов. В 3-х кн. / Под ред. Фролова К.Б., Воробьева Е.И. М.: Высшая школа, 1988.

Резюме

Мақаладағы зерттеулер Денавит–Хартенбергтің өзгертуі мен Лагранждың екінші текті теңдеулерін бірге қолдану әдісі қозғалыс теңдеулерінің аналитикалық зерттеуге ыңғайлы векторлы-матрицалық түріне әкеледі.

УДК 621.878.11

Поступила 2.02.06г.