УДК 531.1

М. Д. ШИНИБАЕВ, С. А. ЖАПБАРОВ, Н. М. УТЕНОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ ВО ВТОРОЙ ЗАДАЧЕ ХИЛЛА МЕТОДОМ РАУСА

Для пассивно гравитационного тела, совершающего движения в поле тяготения сжатого сфероида, и внешнего тела записаны дифференциальные уравнения движения в сферических координатах и найдены первые интегралы. Установлены условия существования стационарного движения пассивно гравитационного тела и доказана устойчивость методом Рауса.

Пусть пассивно гравитирующее тело постоянной массы m совершает движение в поле тяготения сжатого сфероида постоянной массы M и внешнего тела массы m_1. Тогда в сферических координатах В. Г. Демина (с началом в верхней шаровой точке) [1] имеем

$$\Pi = -\frac{\mu}{\rho} - \frac{fMz_c}{\rho^2}\sin\psi - \frac{1}{2}\nu\rho^2 + \frac{3}{2}\nu\rho^2\sin^2\psi, \tag{1}$$

$$T = \frac{1}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\psi}^2 + \rho^2\dot{\lambda}^2\cos^2\psi\right), \tag{2}$$

где Π и T – соответственно потенциальная и кинетическая энергия пассивно гравитирующего тела (отнесенная к массе); ν – постоянный параметр Хилла; r, y, l – обобщенные координаты пассивно гравитирующего тела; $m = fM$ – гравитационный параметр.

Дифференциальные уравнения движения пассивно гравитирующего тела находим из уравнений Лагранжа II рода:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\rho}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\rho} = Q_\rho, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\lambda}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\lambda} = Q_\lambda,\\ &\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\psi}}\right) - \frac{\partial T}{\partial\psi} = Q_\psi, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &Q_\rho = -\frac{\partial\Pi}{\partial\rho}, \qquad Q_\lambda \; -\frac{\partial\Pi}{\partial\lambda},\\ &Q_\psi = -\frac{\partial\Pi}{\partial\psi}. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Из (3) имеем

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\dot{\rho}}{dt} - \rho\dot{\psi}^2 - \rho\dot{\lambda}^2\cos^2\psi = -\frac{\mu}{\rho^2} - \frac{2fMz_C\sin\psi}{\rho^3} +\\ &+\nu\rho - 3\nu\rho\sin^2\psi,\\ &\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\lambda}\cos^2\psi\right) = 0,\\ &\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\lambda}\right) + \rho^2\dot{\lambda}^2\cos\psi\sin\psi \quad \frac{fMz_C\cos\psi}{\rho^2} -\\ &-3\nu\rho^2\sin\psi\cos\psi. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Из второго уравнения системы дифференциальных уравнений (5) получаем интеграл площадей

$$\rho^2\dot{\lambda}\cos^2\psi = C = \text{const}. \tag{6}$$

Непосредственное вычисление производных по времени от Т и П в силу (5) приводит к равенству

$$\frac{d}{dt}(T + \Pi) = 0 \quad \text{или} \quad T + \Pi = h, \tag{7}$$

т.е. интеграл энергии имеет вид

$$\frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\psi}^2 + \rho^2\dot{\lambda}^2\cos^2\psi) - \frac{\mu}{\rho} - \frac{fMz_c}{\rho^2}\sin\psi - -\frac{1}{2}\nu\rho^2 + \frac{3}{2}\nu\rho^2\sin^2\psi = h, \tag{8}$$

где h – постоянная интеграла энергии.

Используя полученные первые интегралы исследуем устойчивость стационарных движений методом Рауса.

В выражении кинетической энергии (2) координата l является циклической координатой, которой соответствует циклический интеграл (интеграл площадей)

$$P = \frac{\partial T}{\partial \dot{\lambda}} = \rho^2 \dot{\lambda} \cos^2\psi = C = \text{const}. \tag{9}$$

Используя циклический интеграл (9), исключаем из кинетической энергии величину $\dot{\lambda}$:

$$T^* = \frac{1}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\psi}^2 + \frac{C^2}{\rho^2\cos^2\psi}\right). \tag{10}$$

Используя выражение (10), составляем функцию Рауса:

$$R = T^* - C\dot{\lambda} = \frac{1}{2}\left(\dot{\rho} + \rho^2\dot{\psi}^2\right) - \frac{1}{2}\cdot\frac{C^2}{\rho^2\cos^2\psi}. \tag{11}$$

Из выражения (11) видно, что функция Рауса состоит из квадратичной R_2, линейной R_1 и нулевой R_0 частей:

$$R_2 = \frac{1}{2}\left(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\psi}^2\right),$$

$$R_1 = 0, \quad R_0 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{C^2}{\rho^2\cos^2\psi}. \tag{12}$$

Составляем потенциальную энергию приведенной системы $W = \Pi - R_0$, т.е.

$$W = -\frac{\mu}{\rho} - \frac{fMz_c}{\rho^2}\sin\psi - \frac{1}{2}\nu\rho^2 + {}$$
$$+ \frac{3}{2}\nu\rho^2\sin^2\psi + \frac{1}{2}\cdot\frac{C^2}{\rho^2\cos^2\psi}. \tag{13}$$

Используя (13), находим условия существования стационарных движений:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial W}{\partial\rho} &= \frac{\mu}{\rho^2} + \frac{2fMz_c}{\rho^3}\sin\psi - \nu\rho + 3\nu\rho\sin^2\psi - \frac{C^2}{\rho^2\cos^2\psi},\\
\frac{\partial W}{\partial\psi} &= -\frac{fMz_c}{\rho^2}\cos\psi + 3\nu\rho^2\sin\psi\cos\psi + \frac{C^2}{\rho^2}\cdot\frac{\sin\psi}{\cos^2\psi},
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

Допуская в установившемся движений при $t = 0$, $r = r_0$, $y = y_0$, $\dot{\lambda} = \omega$, переписываем (14) в виде

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial W}{\partial\rho}\right)_{\rho=\rho_0} = \frac{\mu}{\rho_0^2} + \frac{2fMz_c}{\rho_0^3}\sin\psi_0 - \nu\rho_0 + {}\\
&+3\nu\rho_0\sin^2\psi_0 - \frac{C^2}{\rho_0^2\cos^2\psi_0} = 0,\\
&\left(\frac{\partial W}{\partial\psi}\right)_{\psi=\psi_0} = -\frac{fMz_c}{\rho_0^2}\cos\psi_0 + {}\\
&+3\nu\rho_0^2\sin\psi_0\cos\psi_0 + \frac{C^2}{\rho_0^2}\cdot\frac{\sin\psi_0}{\cos^2\psi_0} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

Здесь, используя (9), учитываем, что

$$C = \rho_0^2\cos^2\psi_0\cdot\omega.$$

Тогда из (15) находим условия существования стационарных движений в следующем виде:

$$\mu = \rho_0^3\left[\left(-9\nu - 3\omega^2\right)\sin^2\psi_0 + \nu + \omega^2\right], \tag{16}$$

$$fMz_c = \rho_0^4\left(3\nu + \omega^2\right)\sin\psi_0. \tag{17}$$

При выполнений условий (16) и (17) пассивно гравитирующее тело будет совершать круговое стационарное движение

$$\rho = \rho_0, \qquad \dot{\lambda} = \omega. \tag{18}$$

Принимаем стационарное движение (18) за невозмущенное и исследуем его устойчивость с помощью теоремы Рауса [2].

Полагаем

$$\rho = \rho_0 + x_1, \qquad \dot{\lambda} = \omega + x_2, \tag{19}$$

где x_1, x_2 – возмущения.

Внесим (19) в (13) и разлагаем разность $W - W_0$ в раз по степеням x_1, x_2:

$$W - W_0 = \left(\frac{\partial W}{\partial\rho}\right)_{\rho=\rho_0}\cdot x + \left(\frac{\partial W}{\partial\psi}\right)_{\psi=\psi_0}\times$$
$$\times\psi + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\rho^2}\right)_{\rho=\rho_0} x^2 + 2\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\rho\partial\psi}\right)_{\substack{\rho=\rho_0\\ \psi=\psi_0}}\times\right.$$
$$\left.\times x\psi + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial\psi^2}\right)_{\psi=\psi_0}\cdot\psi^2\right] + \cdots$$

или, учитывая условия (15),

$$W - W_0 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\rho^2}\right)_{\rho=\rho_0}\cdot x^2 + 2\left(\frac{\partial^2 W}{\partial\rho\partial\psi}\right)_{\substack{\rho=\rho_0\\ \psi=\psi_0}}\times\right.$$
$$\left.\times x\psi + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial\psi^2}\right)_{\psi=\psi_0}\cdot\psi^2\right] + \cdots$$

(20)

Вычисляя частные производные, входящие в (20), и учитывая условия (16), (17), находим

$$W - W_0 = \frac{1}{2}\left[-3\nu\cos^2\psi_0 + \left(1 - 3\sin^2\psi_0\right)\omega^2\right]x^2 + $$

$$+\left[6\nu\rho_0 \sin\psi_0 \cos\psi_0\right]x\psi + \tag{21}$$

$$+\frac{1}{2}\left[3\nu\rho_0^2 \cos^2\psi_0 + \rho_0^2\omega^2\left(1+\sin^2\psi^2\right)\right]\psi^2 + \cdots$$

Здесь $\psi_0 << \frac{\pi}{2}$, $\nu << 1$, поэтому каждая из квадратных скобок положительна.

Применяя критерии Сильвестра, имеем

$$\Delta_1 = \left[-3\nu co^2\psi_0 + \left(1 - 3\sin^2\psi_0\right)\right] > 0$$

$$\Delta_2 \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{2}\Delta_1 & 3\nu\rho_0 \sin\psi_0 \cos\psi_0 \\ 3\nu\rho_0 \sin\psi_0 \cos\psi_0 & = \\ \frac{1}{2}\left[3\nu\rho_0^2\right]\cos^2\psi_0 + \left(1 + in^2\psi_0\right)\rho_0^2\omega^2 & \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\Delta_1\left[3\nu\rho_0^2\cos^2\psi_0 + \left(1+\sin^2\psi_0\right)\rho_0^2\omega^2\right] -$$

$$-9\nu^2\rho_0^2 \sin^2\psi_0 \cos^2\psi_0 > 0.$$

В D_2 величины $\nu^2 \sin^2\psi_0 \approx 0$, x^2, $x\,\psi$, ψ^2 положительны, поэтому на основании теоремы Рауса стационарное движение устойчиво относительно r, w.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шинибаев М.Д.* Динамика поступательного движения пассивно гравитирующих тел постоянной и переменной масс в нецентральном поле тяготения: Дис. … докт. физ.-мат. наук. Бишкек, 2002.

2. *Меркин Д.Р.* Введение в теорию устойчивости движения. М.: Наука, 1971. 312 с.

Резюме

Мақалада пассив гравитациялық дененің сфероид пен сыртқы дене өрісіндегі қозғалысының дифференциалдық теңдеулері қорытылған және бірінші интегралдары анықталған.

Стационар қозғалыстардың орындалу шарты табылып, олардың орнықтылығы Раус әдісімен дәлелденген.

Summary

In clause (article) for passively gravitational body making movement in a field of gravitation of the compressed spheroid and an external body the differential equations of movement in spherical coordinates are written down and the first integrals are found. Conditions of existence of stationary movement of passively gravitational body are established and stability is proved to method Rausa.

Поступила 2.03.06г.