УДК 517.946

Ш. Н. КУТТЫКОЖАЕВА

e - АППРОКСИМАЦИЯ ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ–СТОКСА

Рассматривается аппроксимация с малым параметром e начально-краевой задачи с краевым условием проскальзывания для модифицированных уравнений Навье–Стокса. Доказываются теоремы существования и сходимости сильных решений вспомогательной задачи.

В работе [1] изучена разрешимость в ограниченной области $\Omega \subset R^3$ с гладкой границей $\partial\Omega$ начально-краевой задачи с краевым условием проскальзывания (условием свободной поверхности) для модифицированных уравнений Навье–Стокса:

$$\mathrm{v}_t - \left(\nu_0 + \nu_1 \|\mathrm{v}_x\|^2_{L_2(\Omega)}\right)\Delta\mathrm{v} + (\mathrm{v}\cdot\nabla)\mathrm{v} + \nabla p = f,$$

$$div\mathrm{v} = \nabla\cdot\mathrm{v} = 0, \quad \nu_0, \nu_1 > 0, \qquad (1)$$

$$\mathrm{v}\cdot n\big|_S = 0, \ (\mathrm{rot}\,\mathrm{v}\times n)\big|_S = 0, \quad t\in(0,\mathrm{T}),$$

$$\mathrm{v}\big|_{t=0} = \mathrm{v}_0(x). \qquad (2)$$

Для любых $\mathrm{v}\in W_2^s(\Omega), s = 2,3,...,$ удовлетворяющих краевому условию (2) в случае $\Omega\subset R^3$ или его аналогу

$$\mathrm{v}\cdot n\big|_S = \mathrm{v}_n\big|_S = 0, \quad \mathrm{rot}\,\mathrm{v}\big|_S = \left(\frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x_2}\right)\Bigg|_S = 0$$

в случае $\Omega\subset R^2$,

справедлива формула Грина

$$(-\Delta\mathrm{v},\omega)_\Omega = -(grad\,div\mathrm{v},\omega)_\Omega + (rot\,rot\mathrm{v},\omega)_\Omega =$$

$$= -\int_S div\mathrm{v}\cdot\omega_n ds + (div\mathrm{v},\mathrm{div}\omega)_\Omega +$$

$$+\int_S \omega(rot\mathrm{v}\times n)ds + (rot\mathrm{v},\mathrm{rot}\omega)_\Omega =$$

$$= (div\mathrm{v},\mathrm{div}\omega)_\Omega + (rot\mathrm{v},\mathrm{rot}\omega)_\Omega,$$

(3)

$$(grad\ div\mathrm{v},\Delta\omega)_\Omega = (grad\ div\mathrm{v},grad\ div\omega)_\Omega -$$

$$-\int_S grad\ div\mathrm{v}(\mathrm{rot}\omega\times n)ds - (rot\ grad\ div\mathrm{v},\mathrm{rot}\omega)_\Omega =$$

$$= (grad\ div\mathrm{v}, grad div\omega)_\Omega, \qquad (4)$$

если $\Omega\subset R^3$, и

$$(-\Delta\mathrm{v},\omega)_\Omega = (div\mathrm{v},div\omega)_\Omega + (rot(rot\mathrm{v}),\omega)_\Omega =$$

$$= (div\mathrm{v},div\omega)_\Omega + \int_S rot\mathrm{v}(\omega\times n)ds + (rot\mathrm{v},rot\omega)_\Omega,$$

$$(grad\ div\mathrm{v},\Delta\omega)_\Omega = (grad\ div\mathrm{v},grad\ div\omega)_\Omega -$$

$$-\int_S rot\omega(grad\ div\mathrm{v}\times n)ds - (rot\ grad\ div\mathrm{v},rot\omega)_\Omega =$$

$$= (grad\ div\mathrm{v},grad\ div\omega)_\Omega, \qquad (5)$$

если $\Omega\subset R^2$.

Далее рассмотрим e-аппроксимацию уравнений (1), (2):

$$\mathrm{v}^\varepsilon_t - (\nu_0 + \mathrm{v}_1\left\|\mathrm{v}^\varepsilon_x\right\|^2_2)\Delta\mathrm{v}^\varepsilon + (\mathrm{v}^\varepsilon\cdot\nabla)\mathrm{v}^\varepsilon -$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\nabla div\mathrm{v}^\varepsilon + \frac{1}{2}\mathrm{v}^\varepsilon div\mathrm{v}^\varepsilon = f, \qquad (6)$$

$$\mathrm{v}^{\varepsilon}\Big|_{t=0} = \mathrm{v}_0(x),\ \mathrm{v}^{\varepsilon}\cdot n\big|_S = 0,\ \left(rot\mathrm{v}^{\varepsilon}\times n\right)_S = 0. \quad (7)$$

Определение 1. Функция $\mathrm{v}^{\varepsilon}(x,t)$ называется сильным решением задачи (6),(7), если она суммируема со всеми производными, входящими в уравнение (6), и удовлетворяет уравнению (6) и начально-краевым условиям (7) почти всюду в соответствующей мере.

Теорема 1. Пусть $\Omega\subset R^3$, $S\in C^2$, $\mathrm{v}_0(x)\in J_n^2(\Omega)$, $f,\ f_t\in L_2(0,T,L_2(\Omega))$. Тогда начально-краевая задача (6)–(7) имеет единственное сильное решение, и для решения справедливы оценки

$$\left\|\mathrm{v}_x^{\varepsilon}\right\|_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))} + \frac{1}{\varepsilon}\left\|grad\ div\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^2_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))} + \int_0^T\left\|\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|_{W_2^2(\Omega)}dt \le C<\infty, \quad (8)$$

$$\left\|\mathrm{v}_t^{\varepsilon}\right\|_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))} + \left\|\mathrm{v}_{tx}^{\varepsilon}\right\|_{L_2(0,T,L_2(\Omega))} < C<\infty .$$

Доказательство. Вывод априорных оценок. Умножив (6) на v^{ε} скалярно в $L_2(\Omega)$, использовав формулу Грина, неравенства Гельдера и Юнга, получим равенство

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left\|\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^2 + \left(\nu_0+\mathrm{v}_1\left\|\mathrm{v}_x^{\varepsilon}\right\|^2\right)\left(\left\|rot\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^2+\left\|div\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^2\right)+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\left\|div\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^2 \quad \left(f,\mathrm{v}^{\varepsilon}\right)\le\|f\|\cdot\left\|\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|\le\delta\left\|\mathrm{v}_x^{\varepsilon}\right\|^2+C_\delta\|f\|^2 .$$

Последнее неравенство интегрируем по t и при малом d получим

$$\left\|\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^2_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))} + \int_0^T\left(\nu_0+\mathrm{v}_1\left\|\mathrm{v}_x^{\varepsilon}\right\|^2\right)\left(\left\|rot\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^2+\left\|div\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^2\right)dt + \frac{1}{\varepsilon}\left\|div\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}\le C<\infty. \quad (9)$$

Далее умножим (6) на $\Delta\mathrm{v}^{\varepsilon}$ скалярно в $L_2(\Omega)$ и, использовав формулу Грина, имеем

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left\|rot\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^2 + \left(\nu_0+\mathrm{v}_1\left\|\mathrm{v}_x^{\varepsilon}\right\|^2\right)\left\|\Delta\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^2 = \left(f,\Delta\mathrm{v}^{\varepsilon}\right)_\Omega +$$
$$+\int_\Omega\left((\mathrm{v}^{\varepsilon}\cdot\nabla)\mathrm{v}^{\varepsilon}+\frac{1}{2}\mathrm{v}^{\varepsilon}div\mathrm{v}^{\varepsilon}\right)\Delta\mathrm{v}^{\varepsilon}dx-\frac{1}{\varepsilon}\left\|grad\ div\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^2. \quad (10)$$

Оценим правую часть (10) по неравенству вложения [2]:

$$\left(f,\Delta\mathrm{v}^{\varepsilon}\right)_\Omega\le\|f\|\cdot\left\|\Delta\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|\le\delta_1\left\|\Delta\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^2+C_\delta\|f\|^2,$$
$$\left|\int_\Omega(\mathrm{v}^{\varepsilon}\cdot\nabla)\mathrm{v}^{\varepsilon}\Delta\mathrm{v}^{\varepsilon}dx\right|\le\max_\Omega\left|\mathrm{v}^{\varepsilon}\right|\cdot\left\|\Delta\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|\cdot\left\|\mathrm{v}_x^{\varepsilon}\right\|\le$$
$$\le C\left\|\Delta\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^{1/2}\left\|\mathrm{v}_x^{\varepsilon}\right\|\cdot\left\|\Delta\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|\le$$
$$\le\delta_2\left\|\mathrm{v}_x^{\varepsilon}\right\|^2\left\|\Delta\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^4+C\left\|\Delta\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|\le$$
$$Ә\ \delta_2\left\|\mathrm{v}_x^{\varepsilon}\right\|^2\left\|\Delta\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^2+\delta_3\left\|\Delta\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^2+C .$$

Теперь возьмем $\delta_2+\delta_4<\nu_1$, $\delta_1+\delta_3+\delta_5<\nu_0$ и, проинтегрировав (10) по t, имеем

$$\left\|\mathrm{v}_x^{\varepsilon}\right\|^2_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))}+\int_0^T\left(\nu_0+\mathrm{v}_1\left\|\mathrm{v}_x^{\varepsilon}\right\|^2\right)\left\|\Delta\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^2dt+$$
$$+\frac{1}{\varepsilon}\left\|\nabla div\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}\le C\left(\left\|\mathrm{v}_{0x}^{\varepsilon}\right\|^2+\int_0^T\|f\|^2dt\right). \quad (11)$$

Далее продифференцируем (6) по t, умножим скалярно на $\mathrm{v}_t^{\varepsilon}$ и в результате получим

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left\|\mathrm{v}_t^{\varepsilon}\right\|^2+\int_0^T\left(\nu_0+\mathrm{v}_1\left\|\mathrm{v}_x^{\varepsilon}\right\|^2\right)\left(\left\|rot\mathrm{v}_t^{\varepsilon}\right\|^2+\left\|div\mathrm{v}_t^{\varepsilon}\right\|^2\right)dt+$$
$$+\frac{\nu_1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left\|\mathrm{v}_x^{\varepsilon}\right\|^2\right] \quad \left(f_t,\mathrm{v}_t^{\varepsilon}\right)_\Omega+\left((\mathrm{v}_t^{\varepsilon}\cdot\nabla)\mathrm{v}^{\varepsilon},\mathrm{v}_t^{\varepsilon}\right)_\Omega+$$
$$+\frac{1}{2}\left(\mathrm{v}^{\varepsilon}div\mathrm{v}_t^{\varepsilon},\mathrm{v}_t^{\varepsilon}\right)_\Omega-\frac{1}{\varepsilon}\left\|div\mathrm{v}_t^{\varepsilon}\right\|^2.$$

Оценим одно из слагаемых по неравенству Гельдера:

$$\left|\left((\mathrm{v}_t^{\varepsilon}\cdot\nabla)\mathrm{v}^{\varepsilon},\mathrm{v}_t^{\varepsilon}\right)_\Omega\right|\le\left\|\mathrm{v}_x^{\varepsilon}\right\|\cdot\left\|\mathrm{v}_t^{\varepsilon}\right\|^2_{L_4(\Omega)}\le$$
$$\le\left\|\mathrm{v}_{xt}^{\varepsilon}\right\|^{3/2}\left\|\mathrm{v}_t^{\varepsilon}\right\|^{1/2}\le$$
$$\le\delta\left(\left\|rot\mathrm{v}_t^{\varepsilon}\right\|^2+\left\|div\mathrm{v}_t^{\varepsilon}\right\|^2\right)+C_\delta\left\|\mathrm{v}_t^{\varepsilon}\right\|^2.$$

Остальные слагаемые оцениваются аналогично. Отсюда следует, что

$$\left\|\mathrm{v}_t^\varepsilon\right\|^2_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))}+\int_0^T\left\|\mathrm{v}_{tx}^\varepsilon\right\|^2dt\le$$

$$\le C\left(\left\|\mathrm{v}_t^\varepsilon(x,0)\right\|^2+\int_0^T\left\|f_t\right\|^2dt\right). \qquad (12)$$

Теперь можно перейти к непосредственному доказательству теоремы. Для этого воспользуемся методом Галеркина.Ищем приближенное решение задачи (6)–(7) в виде $\mathrm{v}_N^\varepsilon(t)=\sum_{j=1}^N\alpha_j(t)\omega_j$, где ω_j – спектральная функция оператора

$$\Delta\omega_j=\lambda_j\omega_j,$$

$$\omega_j\cdot n\big|_S=\omega_{jn}\big|_S=0,\quad rot\omega_j\times n\big|_S=0. \qquad (13)$$

Числовые функций $\alpha_j(t)$ находятся из следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left(\mathrm{v}_{Nt}^\varepsilon,\omega_j\right)_\Omega-\left(\left(\nu_0+\nu_1\left\|\mathrm{v}_{Nx}^\varepsilon\right\|^2\right)\Delta\mathrm{v}_N^\varepsilon,\omega_j\right)_\Omega-$$

$$-\left(\frac{1}{\varepsilon}\nabla div\mathrm{v}_N^\varepsilon,\omega_j\right)_\Omega+$$

$$+\left((\mathrm{v}_N^\varepsilon\cdot\nabla)\mathrm{v}_N^\varepsilon+\frac{1}{2}\mathrm{v}_N^\varepsilon div\mathrm{v}_N^\varepsilon,\omega_j\right)_\Omega=\left(f,\omega_j\right)_\Omega,$$

$$j=1,2,...,N. \qquad (14)$$

$$\mathrm{v}_N^\varepsilon\big|_{t=0}=\sum_{j=1}^N\left(\mathrm{v}_0^\varepsilon\cdot\omega_j\right)\omega_j. \qquad (15)$$

Разрешимость задачи (14)–(15) следует из общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений [3]. Рассуждая так же, как при получении априорных оценок, и учитывая (13), для v_N^ε, получаем следующие априорные оценки, равномерные по e :

$$\left\|\mathrm{v}_{Nt}^\varepsilon\right\|^2_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))}+\int_0^T\left\|\mathrm{v}_{Ntx}^\varepsilon\right\|^2dt+$$

$$+\left\|\mathrm{v}_{Nx}^\varepsilon\right\|^2_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))}\le C<\infty. \qquad (16)$$

$$\left\|\mathrm{v}_N^\varepsilon\right\|^2_{L_\infty(0,T,W_2^2(\Omega))}+\frac{1}{\varepsilon}\left\|div\mathrm{v}_{Nt}^\varepsilon\right\|^2_{L_2(0,T,L_2(\Omega))}+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\left\|div\mathrm{v}_N^\varepsilon\right\|^2_{L_2(0,T,L_2(\Omega))}\le C<\infty. \qquad (17)$$

Из (16) и (17) по теореме вложения следует, что из последовательности v_N^ε можно выделить подпоследовательность, для которой имеют место соотношения

$$\mathrm{v}_N^\varepsilon(t)\to\mathrm{v}^\varepsilon(t) \text{ слабо в } L_2\left(0,T;W_2^2(\Omega)\right),$$

$$\mathrm{v}_{Nt}^\varepsilon(t)\to\mathrm{v}_t^\varepsilon(t) \text{ слабо в } L_2\left(0,T;L_2(\Omega)\right),$$

$$\mathrm{v}_N^\varepsilon(t)\to\mathrm{v}^\varepsilon(t) \text{ сильно в } L_2\left(0,T;W_2^1(\Omega)\right)$$

при $N\to\infty$.

Далее, переходя к пределу в интегральном тождестве (14), замечаем что $\mathrm{v}^\varepsilon(t)$ является сильным решением задачи (6)–(7). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда решение задачи (6)–(7) сходится к решению задачи (1)–(2) при $\varepsilon\to0$.

Доказательство. В силу априорных оценок, равномерных по *e*, следует, что

$$\mathrm{v}^\varepsilon(t)\to\mathrm{v}(t) \text{ слабо в } L_2\left(0,T;W_2^2(\Omega)\right),$$

$$\mathrm{v}^\varepsilon(t)\to\mathrm{v}(t) \text{ слабо в } L_2\left(0,T;W_2^1(\Omega)\right),$$

$$\mathrm{v}_t^\varepsilon(t)\to\mathrm{v}_t(t) \text{ слабо в } L_2\left(0,T;L_2(\Omega)\right)$$

при $\varepsilon\to0$. Переходя к пределу в (6), (7) при $\varepsilon\to0$, отмечаем, что v(*t*) является решением задачи (1), (2). Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Осколков А.П.* Начально-краевые задачи с краевым условием проскальзывания для модифицированных уравнений Навье-Стокса // Записка научных семинаров ЛоМИ. 1994. Т. 213. С. 56-62.

2. *Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей // Новосибирск: Наука, 1983. 318 с.

3. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982. 152 с.

Резюме

Жетілдірілген Навье–Стокс теңдеулерінің шекаралық сырғанау шарты бар бастапқы-шеттік есебінің *e* кіші параметр бойынша аппроксимациясы қарастырылады. Көмекші есептің күшті шешімінің бар болуы мен жинақталуы теоремалары дәлелденген.

Summary

In this work approximation with small parameter *e* of an initial regional task with a regional condition of sliding for modified