МАТЕМАТИКА

УДК 517.96

М. И. РАМАЗАНОВ

О ПОЛУПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ «СУЩЕСТВЕННО» НАГРУЖЕННОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

(Представлена академиком НАН РК С. Н. Хариным)

Предлагается один из подходов к исследованию сильной разрешимости для «существенно» нагруженных дифференциальных уравнений параболического типа.

В области $Q = \{x,t \mid 0 < x < 1,\ 0 < t < 2\pi\}$ рассмотрим следующие нагруженные дифференциальные операторы:

$$u'(x) + u(1/2) \ \text{ и }$$
$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) + u_x(1/2,t), \qquad (*)$$
$$u'(x) + u'(1/2) \ \text{ и }$$
$$u_t(x,t) - u_{xx}(x,t) + u_x(1/2,t). \qquad (**)$$

Во-первых, заметим, что нагруженные дифференциальные операторы (*) являются замыкаемыми, но операторы вида (**) соответственно в пространствах $L_2(0,1)$ и $L_2(Q)$ уже не замыкаемы. Причина этого в том, что в операторах (*) нагрузка является слабым возмущением, т.е. она подчинена дифференциальной части соответствующего нагруженного дифференциального оператора. Такие нагруженные уравнения рассматривались в [1, 2] и др. Что касается операторов (**), то в них нагрузка уже не подчинена соответствующей дифференциальной части рассматриваемого оператора, т.е. не является слабым возмущением для его дифференциальной части. Во-вторых, как известно, сами операторы нагрузок соответственно в пространствах $L_2(0,1)$ и $L_2(Q)$ не будут замыкаемыми операторами. Уже эти факты не позволяют непосредственно исследовать вопросы сильной разрешимости граничных задач для не замыкаемых нагруженных дифференциальных уравнений [3–5].

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset R^n$ – ограниченная область. В области $Q = \{x,t \mid x \in \Omega, 0 < t < 2\pi\}$ изучаются вопросы разрешимости следующей граничной задачи:

$$\mathrm{L}_1 u \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u(x,t) + \int_{\Gamma_1} \alpha(x,\xi') \frac{\partial^k u(\bar{x}_1,\xi',t)}{\partial x_1^k} d\xi' = f \ \text{ в } Q; \qquad (1)$$

$$u(x,t) = 0 \ \text{ в } \ \Sigma = \{x,t \mid x \in \partial\Omega,\ t \in (0,2\pi)\}, \qquad (2)$$

$$u(x,0) = u(x,2\pi),\ x \in \Omega; \qquad (3)$$

где $\partial\Omega$ – граница области W; $x' = \{x_2,\dots,x_n\}$, $\xi' = \{\xi_2,\dots,\xi_n\}$;

$$\begin{cases} \Gamma_1 \ – \ \text{сечение области } \Omega \\ \text{при фиксированном } x_1 = \bar{x}_1, \\ \alpha \in L_2\left(\Gamma_1;\ W_2^{2m}(\Omega)\right), \\ f \in L_2\left(0,2\pi;\ W_2^{2m}(\Omega)\right) \ – \ \text{заданные функции}, \\ k \ge 2, \quad m = \begin{cases} k/2\ , \text{ если } k - \text{ четное число}, \\ (k-1)/2, \text{ если } k \ – \ \text{нечетное число}. \end{cases} \end{cases}$$

2. Представление и априорная оценка классического решения. Для изучения задачи (1)–(3) рассмотрим в области Q следующую вспомогательную нелокальную задачу:

$$\mathrm{L}_2 u \equiv (-1)^m \Delta^m \upsilon(x,t) = F(x,t), \quad \{x,t\} \in Q, \qquad (5)$$

$$u(x,t) = 0, \quad \frac{\partial^j \upsilon(x,t)}{\partial \vec{n}} = G_j(x,t),$$
$$\{x,t\} \in \Sigma, \quad j = \overline{0,m-1}, \qquad (6)$$

$$u(x,0) = u(x,2\pi),\ x \in (0,1), \qquad (7)$$

где $\vec{n}$ – внешняя нормаль к $\partial\Omega$;

$$F(x,t) \equiv (-1)^m \Delta^m f(x,t),$$

$$G_j(x,t) \equiv \frac{\partial^j f(x,t)}{\partial \overrightarrow{n^j}}, \qquad j=\overline{0,m-1},$$

$$\upsilon(x,t) \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - \Delta u(x,t) + \int_{\Gamma_1} \alpha(x,\xi') \frac{\partial^k u(\bar{x}_1,\xi',t)}{\partial x_1^k} d\xi',$$

$$\{x,t\} \in Q.$$

Заметим, что граничные задачи (1)–(3) и (5)–(7) взаимосвязаны. Действительно, регулярное решение задачи (5)–(7) будет таковым и для задачи (1)–(3). Напротив, если регулярное решение задачи (1)–(3) обладает производными требуемого порядка, то оно будет регулярным решением и задачи (5)–(7).

Задачу (5)–(7) будем рассматривать как следующие две подзадачи относительно неизвестных функций $u(x,t)$ и $u(x,t)$:

$$\mathrm{L}_1 u = \upsilon, \quad \{x,t\} \in Q; \quad u(x,t)=0, \ \{x,t\} \in \Sigma;$$

$$u(x,0) = u(x,2\pi), \quad x \in \Omega; \tag{8}$$

$$(-1)\Delta^m \upsilon = F, \quad \{x,t\} \in Q; \quad \frac{\partial^j \upsilon(x,t)}{\partial \overrightarrow{n^j}} = G,$$

$$\{x,t\} \in \Sigma, \quad j \in \overline{1,m-1}. \tag{9}$$

Сначала решается задача Дирихле (9) для эллиптического уравнения, затем – граничная задача (8) и находится функция $u(x,t)$, которая, очевидно, и будет решением задачи (5)–(7).

Задача Дирихле (9), как известно, имеет единственно обобщенное решение $\upsilon(x,t) \in L_2(0,2\pi; W_2^{2m}(\Omega))$, удовлетворяющее оценке

$$\|\upsilon\|_{L_2(0,2\pi;W_2^{2m}(\Omega))} \leq$$

$$\leq K_1 \left[\|F\|_{L_2(Q)} + \sum_{j=0}^{m-1} \|G_j\|_{L_2(0,2\pi;W_2^{2m-j-1/2}(\partial\Omega))} \right],$$

или, что то же самое, в терминах функции $f(x,t)$:

$$\|\upsilon\|_{L_2(0,2\pi;W_2^{2m}(\Omega))} \leq \tag{10}$$

$$\leq K_1 \left[\|\Delta^m f\|_{L_2(Q)} + \sum_{j=0}^{m-1} \left\| \frac{\partial^j f}{\partial \overrightarrow{n^j}} \right\|_{L_2(0,2\pi;W_2^{2m-j-1/2}(\partial\Omega))} \right].$$

Таким образом, остается только рассмотреть вопросы разрешимости граничной задачи (8). Методом разделения переменных в задаче (8) для коэффициентов Фурье $u_s(x)$ будем иметь

$$\begin{cases} is \cdot u_s(x) - \Delta u_s(x) + \alpha \displaystyle\int_{\Gamma_1} \frac{\partial^k u_s(\bar{x}_1,\xi')}{\partial x_1^k} d\xi' = f_s(x), \quad (11) \\ x \in \Omega, \\ u_s(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad s \in J. \end{cases}$$

Если в $(\forall s \in J)$ задача (11) имеет решение, тогда, используя соответствующую функцию Грина $G(x,\xi)$ [6], записываем следующее представление решения:

$$u_s(x) = \int_{\Omega} G_s(x,\xi) f_s(\xi) d\xi - \tag{12}$$

$$- \int_{\Gamma_1} \left[\int_{\Omega} G_s(x,\eta) \alpha(\eta,\xi') d\eta \right] \frac{\partial^k u_s(\bar{x}_1,\xi')}{\partial x_1^k} d\xi'.$$

Продифференцируем обе части этого равенства k раз по x_1 и положим $x_1 = \bar{x}_1$, тогда будем иметь

$$\frac{\partial^k u_s(\bar{x}_1,x')}{\partial x_1^k} = \left(\frac{\partial^k}{\partial x_1^k} \int_{\Omega} G_s(x,\xi) f_s(\xi) d\xi \right)\Bigg|_{x_1=\bar{x}_1} -$$

$$- \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial^k}{\partial x_1^k} \int_{\Omega} G_s(x,\eta) \alpha(\eta,\xi') d\eta \right)\Bigg|_{x_1=\bar{x}_1} \cdot$$

$$\cdot \frac{\partial^k u_s(\bar{x}_1,\xi')}{\partial x_1^k} d\xi'. \tag{13}$$

Введем следующие обозначения:

$$F_s(x') = \left(\frac{\partial^k}{\partial x_1^k} \int_{\Omega} G_s(x,\xi) f_s(\xi) d\xi \right)\Bigg|_{x_1=\bar{x}_1},$$

$$g(\xi',x') = \left(\frac{\partial^k}{\partial x_1^k} \int_{\Omega} G_s(x,\eta) \alpha(\eta,\xi') d\eta \right)\Bigg|_{x_1=\bar{x}_1},$$

тогда равенство (13) запишется в виде

$$\frac{\partial^k u_s(\bar{x}_1,x')}{\partial x_1^k} = F(x') - \int_{\Gamma_1} g_s(\xi',x') \frac{\partial^k u_s(\bar{x}_1,\xi')}{\partial x_1^k} d\xi'. \tag{14}$$

Умножив обе части этого соотношения на $g(\xi', x')$ и проинтегрировав по ξ' в области Γ_1, получим следующее интегральное уравнение относительно неизвестной функции $h_s(x')$:

$$h_s(x') + \int_{\Gamma_1} g_s(\xi', x') h_s(\xi') d\xi' =$$

$$= \int_{\Gamma_1} g_s(\xi', x') f_s(\xi') d\xi', \qquad (15)$$

где

$$h_s(x') = \int_{\Gamma_1} g_s(\xi', x') \frac{\partial^k u_s(\bar{x}_1, \xi')}{\partial \bar{x}_1^k} d\xi'.$$

Решив интегральное уравнение (15) и подставив найденное значение функции $h_s(x')$ в равенство (14), найдем значение выражения

$$\frac{\partial^k u_s(\bar{x}_1, \xi')}{\partial x_1^k}$$

и, подставив его в представление (12), получим искомое решение задачи (11).

При дальнейшем изучении граничной задачи (1)–(3) будем предполагать, что $\alpha = \text{const} \in C$ и что W представляет собой единичный круг ($n = 2$) с центром в начале координат.

С учетом круговой симметрии в задаче (11) имеем

$$u_s(r) = \int_0^1 G_s(r, \rho) f_s(\rho) d\rho -$$

$$- \alpha \int_{\Gamma_1} \frac{\partial^k u_s(\bar{x}_1, \xi_2)}{\partial x_1^k} d\xi_2 \int_0^1 G_s(r, \rho) d\rho, \qquad (16)$$

где $\lambda^2 = is$; $G_s(r, \rho)$ – функция Грина эллиптической части оператора задачи (11):

$$G_s(r, \rho) = \qquad (17)$$

$$= \begin{cases} -\rho \cdot \dfrac{\left[I_0(\lambda) K_0(\lambda \ r) - I_0(\lambda \ r) K_0(\lambda)\right] \cdot I_0(\lambda \rho)}{I_0(\lambda)}, \\ 0 \le \rho \le r, \\ -\rho \cdot \dfrac{\left[I_0(\lambda) K_0(\lambda \ \rho) - I_0(\lambda \ \rho) K_0(\lambda)\right] \cdot I_0(\lambda \ r)}{I_0(\lambda)}, \\ r \le \rho \le 1. \end{cases}$$

Здесь $I_0(z), K_0(z)$ – модифицированные функции Бесселя.

Из (7)–(9) получим искомое представление решения граничной задачи Дирихле (3)

$$u_s(r) = \int_0^1 G_s(r, \rho) f_s(\rho) d\rho -$$

$$-\alpha \quad \delta_s^{-1} \int_{\Gamma_1} \frac{\partial^k}{\partial x_1^k} \left(\int_0^1 G_s(r, \ \rho) f_s(\rho) d\rho \right)_{x_1 = \bar{x}_1} dx_2 \times$$

$$\times \int_0^1 G_s(r, \rho) d\rho, \qquad (18)$$

тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

$$\delta_s = 1 + \alpha \cdot \int_{\Gamma_1} \left(\frac{\partial^k}{\partial x_1^k} \int_0^1 G_s(r, \rho) d\rho \right)_{x_1 = \bar{x}_1} dx_2 \ne 0,$$

$$\forall s \in J \setminus \{0\}.$$

(19)

Для решений, представленных формулами (18), с учетом (10) справедливы оценки

$$\| u_s \|_{L_2(\Omega)} \le C \| f_s \|, \quad \forall s \in J.$$

Далее остается только применить лемму 1 из [7, с. 118]. Итак, доказана

Теорема. Пусть $n = 2$, W – единичный круг с центром в начале координат. В этом случае для любых $f \in L_2(0, 2\pi; W_2^{2m}(0,1))$, $\alpha \in C$, граничная задача (1)–(3) имеет единственное сильное решение $u(x,t)$ тогда и только тогда, когда выполнены условия (19).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нахушев А.М.* // Диф. уравнения 1983. Т. 19, № 1. С. 86-94.

2. *Дженалиев М.Т.* К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений. Алматы: Компьютерный центр ИТПМ, 1995.

3. *Амангалиева М.М., Дженалиев М.Т., Рамазанов М.И.* Спектрально-нагруженный оператор теплопроводности и граничные задачи // Неклассические уравнения математической физики: Труды семинара, посвященного 60-летию профессора В. Н. Врагова. Новосибирск: Изд-во Института математики, 2005. С. 22-29.

4. *Рамазанов М.И.* О краевой задаче для «существенно» нагруженного параболического уравнения в неограниченных областях // Доклады АМАН (Нальчик). 2004. Т. 7, № 1. С. 84-91.

5. *Кожанов А.И.* Об одном нелинейном нагруженном пара-

болическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче // Математические заметки. 2004. Т. 76, вып. 6. С. 840-853.

6. *Морен К.* Методы гильбертова пространства. М.: Мир, 1965. 570 с.

7. *Дезин А.А.* Общие вопросы теории граничных задач. М.: Наука, 1980.

Резюме

Елеулі-жүктелген параболалық теңдеу үшін шектелген облыста жартылай периодты есеп қарастырылған. Шеңбер үшін белгіленген функционалдық кеңістіктерде бірмәнді әлді шешімі болатын критерий табылған.

Summary

For the parabolic equation essentially-loaded on a spatial variable the problem in the limited area is investigated to a half-periodic. Functional spaces are found and the criterion of unequivocal resolvability for a circle is received.

Институт математики
МОН РК, г. Алматы

Поступила 3.05.06.