

КРИТИЧЕСКАЯ СКОРОСТЬ НАГРУЗКИ, РАВНОМЕРНО ДВИЖУЩЕЙСЯ ВДОЛЬ ТОНКОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Исследуются критические скорости нагрузки, движущейся вдоль тонкой круговой цилиндрической оболочки, расположенной в упругом полупространстве, свободная поверхность которого параллельна оси оболочки. При численной реализации полученного аналитического решения построены дисперсионные кривые для случаев скользящего и жесткого контактов оболочки с окружающей средой.

1. Рассмотрим круговую цилиндрическую полость радиусом $r = R$, подкрепленную тонкой упругой оболочкой толщиной h_0 , в линейно-упругом, однородном и изотропном полупространстве. Пусть в декартовой системе координат ось Z совпадает с осью полости, параллельной плоской границе полупространства, а ось X перпендикулярна к этой плоскости: $x \leq h$, где h – расстояние от оси полости до границы полупространства.

Вследствие малости толщины оболочки можно принять, что окружающая среда контактирует с оболочкой вдоль ее срединной поверхности.

Физико-механические свойства материала оболочки и полупространства характеризуются следующими постоянными: $\nu_0, \mu_0, \rho_0; \nu, \mu, \rho$, где ν – коэффициент Пуассона; μ – модуль сдвига; ρ – плотность.

В направлении оси Z оболочки по ее внутренней поверхности движется с постоянной скоростью c нагрузка P .

В подвижной цилиндрической системе координат $(r, \theta, \eta = z - ct)$ для описания движения оболочки принимаем классические уравнения теории тонких оболочек (1), а для полупространства – динамические уравнения теории упругости (2):

$$\begin{aligned} & \left[1 - \frac{(1-\nu_0)\rho_0 c^2}{2\mu_0} \right] \frac{\partial^2 u_{0\eta}}{\partial \eta^2} + \frac{1-\nu_0}{2R^2} \frac{\partial^2 u_{0\eta}}{\partial \theta^2} + \\ & + \frac{1+\nu_0}{2R} \frac{\partial^2 u_{0\theta}}{\partial \eta \partial \theta} + \frac{\nu_0}{R} \frac{\partial u_{0r}}{\partial \eta} = \frac{1-\nu_0}{2\mu_0 h_0} (P_\eta - q_\eta), \\ & \frac{1+\nu_0}{2R} \frac{\partial^2 u_{0\eta}}{\partial \eta \partial \theta} + \frac{(1-\nu_0)}{2} \left(1 - \frac{\rho_0 c^2}{\mu_0} \right) \frac{\partial^2 u_{0\theta}}{\partial \eta^2} + \\ & + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 u_{0\theta}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_{0r}}{\partial \theta} = \frac{1-\nu_0}{2\mu_0 h_0} (P_\theta - q_\theta), \\ & \frac{\nu_0}{R} \frac{\partial u_{0\eta}}{\partial \eta} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial u_{0\theta}}{\partial \theta} + \frac{h_0^2}{12} \nabla^2 \nabla^2 u_{0r} + \\ & + \frac{(1-\nu_0)\rho_0 c^2}{2\mu_0} \frac{\partial^2 u_{0r}}{\partial \eta^2} + \frac{u_{0r}}{R^2} = -\frac{1-\nu_0}{2\mu_0 h_0} (P_r - q_r), \end{aligned} \quad (1)$$

$$\left(\frac{1}{M_P^2} - \frac{1}{M_S^2} \right) \text{grad div } \vec{u} + \frac{1}{M_S^2} \nabla^2 \vec{u} = \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial \eta^2}, \quad (2)$$

где $u_{0r}, u_{0\theta}, u_{0\eta}$ – перемещения точек срединной поверхности оболочки; \vec{u} – вектор смещения упругой среды; P_η, P_θ, P_r – составляющие интенсивности подвижной нагрузки P ; $q_\eta = \sigma_{r\eta}|_{r=R}, q_\theta = \sigma_{r\theta}|_{r=R}, q_r = \sigma_{rr}|_{r=R}$ – составляющие реакции окружающей оболочку среды; σ_{rj} – компоненты тензора напряжений в среде ($j = \eta, \theta, r$); $\lambda = 2\nu\mu/(1-2\nu)$; ∇^2 – оператор Лапласа; $M_P = c/c_P, M_S = c/c_S$ – числа Маха; $c_P = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}, c_S = \sqrt{\mu/\rho}$ – скорости распространения волн расширения – сжатия и сдвига в среде.

Так как граница полупространства свободна от нагрузок, то при $x = h$:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xy} = \sigma_{x\eta} = 0. \quad (3)$$

Для точек сопряжения среды с оболочкой имеем:

а) при скользящем контакте:

$$\sigma_{rj}|_{r=R} = 0, \quad j = \eta, \theta, \quad u_r|_{r=R} = u_{0r}; \quad (4a)$$

б) при жестком контакте:

$$u_j|_{r=R} = u_{0j}, \quad j = \eta, \theta, r. \quad (4б)$$

u_r, u_θ, u_η – компоненты вектора \vec{u} в подвижной цилиндрической системе координат.

Рассмотрим периодическую задачу, когда подвижная нагрузка периодична по η и представима в виде

$$\begin{aligned} P_j(\theta, \eta) &= P_j^*(\theta) e^{i\xi\eta}, \quad P_j^*(\theta) = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{nj} e^{in\theta}, \quad j = r, \theta, \eta. \end{aligned} \quad (5)$$

В установившемся состоянии зависимость всех величин от η имеет вид (5), поэтому

$$q_j(\theta, \eta) = q_j^*(\theta) e^{i\xi\eta}, \quad q_j^*(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q_{nj} e^{in\theta},$$

$$u_{0j}(\theta, \eta) = u_{0j}^*(\theta) e^{i\xi\eta}, \quad u_{0j}^*(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{0nj} e^{in\theta},$$

$$j = r, \theta, \eta. \quad (6)$$

Подставляя (5) и (6) в (1), для n -го члена разложения получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^2 u_{0n\eta} + \nu_2 n \xi_0 u_{0n\theta} - 2i\nu_0 \xi_0 u_{0nr} = \\ = G_0 (P_{n\eta} - q_{n\eta}), \end{aligned} \quad (7)$$

$$\nu_2 n \xi_0 u_{0n\eta} + \varepsilon_2^2 u_{0n\theta} - 2inu_{0nr} = G_0 (P_{n\theta} - q_{n\theta}),$$

$$2i\nu_0 \xi_0 u_{0n\eta} + 2inu_{0n\theta} + \varepsilon_3^2 u_{0nr} = G_0 (P_{nr} - q_{nr}),$$

где $\varepsilon_1^2 = \alpha_0^2 - \varepsilon_0^2, \varepsilon_2^2 = \beta_0^2 - \varepsilon_0^2, \varepsilon_3^2 = \gamma_0^2 - \varepsilon_0^2,$

$$\varepsilon_0^2 = \nu_1 \xi_0^2 M_{S0}^2, \xi_0 = \xi R, \alpha_0^2 = 2\xi_0^2 + \nu_1 n^2,$$

$$\beta_0^2 = \nu_1 \xi_0^2 + 2n^2, \gamma_0^2 = \chi^2 (\xi_0^2 + n^2)^2 + 2, \nu_1 =$$

$$= 1 - \nu_0, \nu_2 = 1 + \nu_0, M_{S0} = c / c_{S0},$$

$$c_{S0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_0}}, \quad \chi^2 = \frac{h_0^2}{6R^2}, \quad G_0 = -\frac{\nu_1 R^2}{\mu_0 h_0}.$$

Разрешая (7) относительно $u_{0n\eta}, u_{0n\theta}, u_{0nr}$, получаем

$$u_{0n\eta} = \frac{G_0}{\Delta} \sum_{j=1}^3 \Delta_{nj} (P_{nj} - q_{nj}),$$

$$u_{0n\theta} = \frac{G_0}{\Delta} \sum_{j=1}^3 \Delta_{\theta j} (P_{nj} - q_{nj}), \quad (8)$$

$$u_{0nr} = \frac{G_0}{\Delta} \sum_{j=1}^3 \Delta_{rj} (P_{nj} - q_{nj}).$$

Здесь $\Delta = (\varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3)^2 - (\varepsilon_1 \xi_1)^2 - (\varepsilon_2 \xi_2)^2 - (\varepsilon_3 \xi_3)^2 + 2\xi_1 \xi_2 \xi_3,$

$$\Delta_{\eta 1} = (\varepsilon_2 \varepsilon_3)^2 - \xi_1^2, \Delta_{\eta 2} = \xi_1 \xi_2 - \xi_3 \varepsilon_3^2, \Delta_{\eta 3} =$$

$$= i(\varepsilon_2^2 \xi_2 - \xi_1 \xi_3), \quad \Delta_{\theta 1} = \Delta_{\eta 2}, \Delta_{\theta 2} =$$

$$= (\varepsilon_1 \varepsilon_3)^2 - \xi_2^2, \Delta_{\theta 3} = i(\varepsilon_1^2 \xi_1 - \xi_2 \xi_3),$$

$$\Delta_{r 1} = -\Delta_{\eta 3}, \Delta_{r 2} = -\Delta_{\theta 3}, \Delta_{r 3} = (\varepsilon_1 \varepsilon_2)^2 - \xi_3^2,$$

$$\xi_1 = 2n, \xi_2 = 2\nu_0 \xi_0, \xi_3 = \nu_2 \xi_0 n,$$

для P_{nj} и q_{nj} индекс $j = 1$ соответствует индексу η , $j = 2 - \theta, j = 3 - r$.

Преобразуем уравнение (2), выразив вектор смещения упругой среды через потенциалы Ламе [1]

$$\vec{u} = \text{grad } \varphi_1 + \text{rot } \vec{\psi}. \quad (9)$$

Потенциал $\vec{\psi}$ можно представить в виде [1]:

$$\vec{\psi} = \varphi_2 \vec{e}_\eta + \text{rot}(\varphi_3 \vec{e}_\eta),$$

где \vec{e}_η – орт оси η .

Из (2) и (9) следует, что потенциалы φ_j удовлетворяют видоизмененным волновым уравнениям

$$\nabla^2 \varphi_j = M_j^2 \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial \eta^2}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (10)$$

здесь $M_1 = M_p, M_2 = M_3 = M_s$.

Потенциалы φ_j также будем искать в виде периодических функций по η :

$$\varphi_j(r, \theta, \eta) = \Phi_j(r, \theta) e^{i\xi \eta}. \quad (11)$$

Подставляя (11) в (10), получаем видоизмененные уравнения Гельмгольца

$$\nabla_2^2 \Phi_j - m_j^2 \xi^2 \Phi_j = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad (12)$$

где $m_j^2 = 1 - M_j^2$, $m_1 \equiv m_p, m_2 = m_3 \equiv m_s$, ∇_2^2 – двумерный оператор Лапласа.

Таким образом, для определения НДС массива необходимо определить Φ_j . Предположим, что скорость нагрузки меньше скорости распространения волн сдвига в окружающей полости среде и, более того, меньше скорости волн Релея. В этом случае $M_s < 1$ ($m_s > 0$) и решения уравнений (12) можно представить в виде [2]

$$\Phi_j = \Phi_j^{(1)} + \Phi_j^{(2)}, \quad (13)$$

где

$$\Phi_j^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} K_n(k_j r) e^{in\theta}, \quad (13a)$$

$$\Phi_j^{(2)} = \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\xi, \zeta) \exp(iy\zeta + (x-h)\sqrt{\zeta^2 + k_j^2}) d\zeta. \quad (13b)$$

Здесь $K_n(k_j r)$ – функции Макдональда, $k_j = m_j \xi$; $g_j(\xi, \zeta)$, a_{nj} – неизвестные функции и коэффициенты, подлежащие определению.

Аналогично [2] представление потенциалов в форме (13) при условиях (3) и (4а) (или 4б) приводит к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных коэффициентов a_{nj} . Система имеет блочно-диагональный вид с матрицами (3×3) вдоль главной диагонали. Обозначим определитель произвольной матрицы

через $\Delta_n(\xi, c)$. Заметим, что $\Delta_n(\xi, c)$ является симметричной относительно ξ и n функцией. Если $\Delta_n(\xi, c) \neq 0$, то определив коэффициенты a_{nj} , можно вычислить компоненты напряженно-деформированного состояния среды. Однако, как показывают () $\Delta_n(\xi, c)$ ($n = 0, n = \pm 1, n = \pm 2, n = \pm 3 \dots$) могут быть равными нулю при некоторых значениях ξ и c . В этом случае появляются свободные волны, распространяющиеся вдоль поверхности полости со скоростями движущейся нагрузки c и связанные с волновыми числами ξ дисперсионными уравнениями $\Delta_n(\xi, c) = 0$.

Дисперсионные уравнения позволяют определить точки $(\xi_{(n)}, c_{(n)})$, характеризующие период $T_{(n)} = 2\pi/\xi_{(n)}$ и скорость $c_{(n)}$ движения n -й моды свободной волны, которая может распространяться вдоль поверхности полости.

На рис. 1 при $\xi > 0$ изображены дисперсионные кривые, соответствующие уравнению $\Delta_0(\xi, c) = 0$. Кривые получены для подкрепленного бетонной оболочкой туннеля, проходящего в массиве алевролита (сверху область построения графиков ограничена условием движения нагрузки с дозвуковой скоростью $c < c_s = 1006,4$ м/с). Верхние кривые соответствуют жесткому контакту оболочки со средой, нижние – скользящему контакту. Принятые параметры: $R = 1$ м, $h_0 = 0,02$ м, $\nu_0 = 0,2$, $\mu_0 = 1,21 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho_0 = 2,5 \cdot 10^3$ кг/м³, $\nu = 0,2$, $\mu = 2,532 \cdot 10^9$ Па, $\rho = 2,5 \cdot 10^3$ кг/м³.

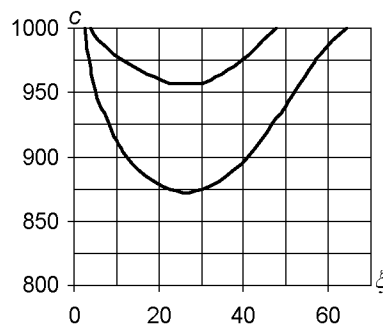


Рис. 1. Дисперсионные кривые

Как следует из рисунка, обе кривые имеют минимумы при $\xi = \xi_{(0)*} = 26$ м⁻¹: для скользящего контакта $c_{(0)\min} = c_{(0)*} = 872$ м/с, для жесткого – $c_{(0)\min} = c_{(0)*} = 957$ м/с. С увеличением $|n|$ $c_{(n)*}$ возрастают при любых контактных условиях (рис. 2). Значения $c_{(n)*}$ получили в литературе название критических скоростей. Первая (нижшая) критическая скорость $c_{(0)*}$ в любом случае сопряжения оболочки

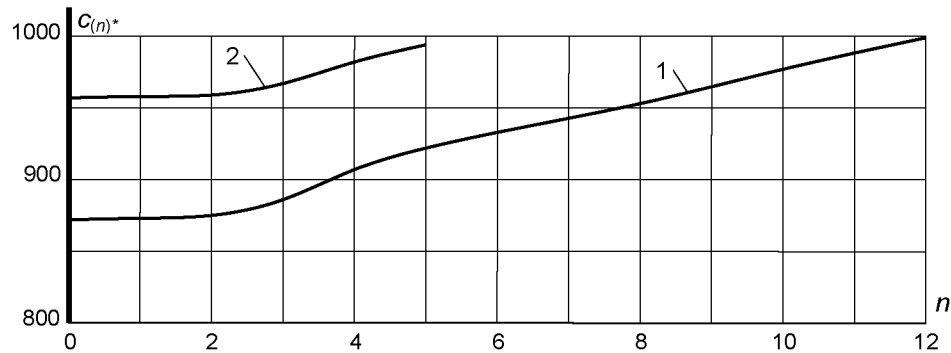


Рис. 2. Интерполяционные кривые изменений критических скоростей

со средой имеет место при $n = 0$ и является единственной при действии на тоннель осесимметричной подвижной нагрузки. В случае действия на тоннель аperiодических нагрузок, движущихся со скоростью $c > c_{(0)*}$, появляется класс решений, содержащий незатухающие гармонические поверхностные цилиндрические волны, подобные волнам Лява. При $c = c_{(0)*}$ задача не имеет стационарных решений. В этом случае в тоннеле возникают резонансные явления, для изучения которых следует решать нестационарную задачу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гузь Л.И., Кубенко В.Д., Черевко М.А. Дифракция упругих волн. Киев, 1978. 308 с.
2. Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Алексеева Л.А. Динамика тоннелей и подземных трубопроводов. Алма-Ата: Наука КазССР, 1989. 240 с.

Summary

They are researched critical velocities of the load, moving along fine circular cylindrical shell, located in elastic half space, free surface which parallel axis of the shell. Under numerical realization got analytical decision are built dispersion curves for events slithering and hard contact of the shell with surrounding ambience.

Институт математики
МОН РК, г. Алматы

Поступила 2.06.06г.