УДК 517.9

С. А. АБДЫМАНАПОВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ ТИПА ФУКСА

(Представлена академиком НАН РК Т. Ж. Кальменовым)

Решены начальная и начально-краевая задачи для одной системы в частных производных на плоскости типа Фукса в неограниченной области.

Пусть $0 < \varphi_1 \le 2\pi$ и $G = \{z = re^{i\varphi} : 0 \le r < \infty,\ 0 \le \varphi \le \varphi_1\}$.

Рассмотрим в G уравнение

$$4\lambda \bar{z}^2 \frac{\partial^2 V}{\partial \bar{z}^2} + 2\gamma \bar{z} \frac{\partial V}{\partial \bar{z}} + b(\varphi)\overline{V} = g(r,\varphi), \quad (1)$$

где $\lambda > 0$, γ – действительные параметры; $b(\varphi) \in C[0,\varphi_1]$; функция $g(r,\varphi)$ удовлетворяет условию (A).

Функция $g(r,\varphi)$ представима в виде

$$g(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k(\varphi) \cdot r^{\nu k},\ \nu > 0,\ g_k(\varphi) \in C[0,\varphi_1]$$

и ряд $\sum_{k=0}^{\infty} | g_k |_0 \cdot r^{\nu k}$ сходится в G.

Здесь $| f |_0 = \| f \|_{C[0,\varphi]}$.

Частные виды уравнения (1) использованы в теории бесконечно малых изгибаний поверхностей положительной кривизны с точкой уплощения [1] и исследованы в [2, 3].

В работе [4] решена начально-краевая задача для уравнения (1) при $g(r,\varphi) = r^{\mu} \cdot f(\varphi)$, где $\mu > 1$, $f(\varphi) \in C[0,\varphi_1]$.

Как известно из теории обобщенных аналитических функций [5, 2], системы дифференциальных уравнений в частных производных на плоскости и обобщенная задача Римана-Гильберта для них исследуются посредством приведения их с помощью оператора

$$(T_G f)(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} dG_\zeta$$

к сингулярным интегральным уравнениям. Если таким образом привести уравнение (1) к сингулярному интегральному уравнению, то в его составе возникает интегральный оператор, неограниченный в классах суммируемых функций. Поэтому в настоящей работе применяется новая методика, благодаря которой эффективно решаются начальные и начально-краевые задачи для уравнения (1) в неограниченных областях. Кратко эта методика заключается в следующем. С помощью нового модифицированного метода последовательных приближений [2] строится интегральное представление для решений уравнения (1), в составе которого имеется n кратный интеграл с известной функцией. Когда число n стремится к бесконечности, этот интеграл обращается в нуль и интегральное представление дает в явном виде многообразие решений уравнения (1).

Полученный вид многообразия решений используется для решения начальных, начально-краевых и некоторых нелокальных задач типа Дирихле для заданного уравнения.

1^0. Используя формулы

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{e^{i\varphi}}{2}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi}\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) = \frac{e^{2i\varphi}}{4} \times$$

$$\times \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2i}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{2i}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial \varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right),$$

$$z = x + iy = re^{i\varphi},$$

уравнение (1) в полярной системе координат записываем в виде

$$\lambda r^2 \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + 2\lambda i r \frac{\partial^2 V}{\partial r \partial \varphi} - \lambda \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} + (\gamma - \lambda) r \frac{\partial V}{\partial r} -$$

$$- i(2\lambda - \gamma)\frac{\partial V}{\partial \varphi} + b(\varphi)\overline{V} = g(r,\varphi). \quad (2)$$

Не оговаривая пока, каким классам принадлежит функция $V(z)$, займемся формальным построением решения уравнения (2). Решение уравнения (2) ищем в виде

$$V(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(\varphi) \cdot r^{k\nu}, \quad (3)$$

где $V_k(\varphi)$, $(k = \overline{0,\infty})$ – неизвестные функции из класса $C^2[0,\varphi]$, такие, что $V(r,\varphi)$ удовлетворяет условию (A) и ряды $\sum_{k=0}^{\infty} V_k'(\varphi) \cdot r^{k\nu}$, $\sum_{k=0}^{\infty} V_k''(\varphi) \cdot r^{k\nu}$ сходятся в G.

Подставляя выражение (3) для $V(r,\varphi)$ в (2), для $V_k(\varphi)$, $(k = \overline{0,\infty})$, получаем уравнения

$$V_k'' + 2i(\mu - k\nu)V_k' + k\nu(2\mu - k\nu)V_k =$$

$$= \frac{b(\varphi)}{\lambda}\overline{V_k} - \frac{g_k(\varphi)}{\lambda}, \quad (k = \overline{0,\infty}), \quad (4)$$

где $\mu = \dfrac{2\lambda - \gamma}{2\lambda}$.

С помощью замен

$$V_k = e^{-(\mu - k\nu)i\varphi} W_k, \quad (k = \overline{0,\infty}), \quad (5)$$

из последних уравнений следует

$$W_k'' + \mu^2 W_k =$$

$$= \frac{b(\varphi)}{\lambda} e^{2i(\mu - k\nu)\varphi}\overline{W_k} - \frac{g_k(\varphi)}{\lambda} c^{(\mu - k\nu)i\varphi}. \quad (6)$$

Из уравнения (6) методом вариации произвольных постоянных имеем

$$W_k(\varphi) = \frac{1}{\lambda\mu}\int_0^{\varphi} b(\gamma) e^{2i(\mu - k\nu)\gamma} \sin\mu(\varphi - \gamma)d\gamma -$$

$$- \frac{1}{\lambda\mu}\int_0^{\varphi} g_k(\gamma) e^{i(\mu - k\nu)\gamma} \sin\mu(\varphi - \gamma)d\gamma +$$

$$+ c_{1,k}\cos\mu\varphi + c_{2,k}\sin\mu\varphi, \quad (k = \overline{0,\infty}),$$

где $c_{1,k}$, $c_{2,k}$, $(k = \overline{0,\infty})$ – произвольные комплексные постоянные.

Из последних уравнений в силу (5) следует

$$V_k(\varphi) = \int_0^{\varphi} b_k(\varphi,\gamma)\overline{V_k(\gamma)}d\gamma + g_{k1}(\varphi) +$$

$$+ (c_{1,k}\cos\mu\varphi + c_{2,k}\sin\mu\varphi) e^{-(\mu - k\nu)i\varphi},$$

$$(k = \overline{0,\infty}), \quad (7)$$

где

$$b_k(\varphi,\gamma) = \frac{1}{\lambda\mu} e^{-i(\mu - k\nu)(\varphi - \gamma)} b(\gamma)\sin\mu(\varphi - \gamma),$$

$$g_{k1}(\varphi) =$$

$$= -\frac{1}{\lambda\mu}\int_0^{\varphi} g_k(\gamma) e^{-(\mu - k\nu)(\varphi - \gamma)} \sin\mu(\varphi - \gamma)d\gamma.$$

Далее методом, разработанным в [2], строим в явном виде в квадратурах многообразие решений уравнений (7) из класса $C^2[0,\varphi_1]$. Для этой цели используем следующие функции и операторы:

$$I_{0,k}(\varphi) = e^{-i(\mu - k\nu)\varphi}\sin\mu\varphi,$$

$$J_{0,k}(\varphi) = e^{-i(\mu - k\nu)\varphi}\cos\mu\varphi,$$

$$I_{m,k} = \int_0^{\varphi} b_k(\varphi,\gamma)\overline{I_{m-1,k}(\gamma)}d\gamma,$$

$$J_{m,k} = \int_0^{\varphi} b_k(\varphi,\gamma)\overline{J_{m-1,k}(\gamma)}d\gamma,$$

$$(B_{0,k}f)(\varphi) = \int_0^{\varphi} b_k(\varphi,\gamma)\overline{f(\gamma)}d\gamma,$$

$$(B_{n,k}f)(\varphi) = \left(B_{0,k}\left(B_{n-1,k}f(\varphi)\right)\right).$$

Относительно этих функций имеются легко проверяемые соотношения

$$\left(B_{0,k}\left(cI_{m,k}(\varphi)\right)\right)(\varphi) = \overline{c}I_{m+1,k}(\varphi),$$

$$\left(B_{0,k}\left(cJ_{m,k}(\varphi)\right)\right)(\varphi) = \overline{c}J_{m+1,k}(\varphi), \quad (8)$$

$$\left(B_{0,k}\left(B_{n,k}f\right)(\varphi)\right) = \left(B_{n+1,k}f\right)(\varphi), \quad (n = \overline{0,\infty}),$$

$$|J_{m,k}(\varphi)| \le \frac{|\mathrm{b}|_0^{\mathrm{m}}}{(\lambda\mu)^{\mathrm{m}}} \cdot \frac{\varphi^m}{m!},$$

$$|I_{m,k}(\varphi)| \le \frac{|\mathrm{b}|_0^{\mathrm{m}}}{(\lambda\mu)^{\mathrm{m}}} \cdot \frac{\varphi^m}{m!}, \quad (9)$$

$$|(B_{n,k})(\varphi)| \le \frac{|b|_0^{n+1}}{(\lambda\mu)^{n+1}} \cdot \frac{|f|_0}{(n+1)!},$$

$$(n=\overline{0,\infty}), \quad (k=\overline{1,\infty}),$$

где c – комплексное постоянное; $|b|_0 = \max\limits_{0\le\varphi\le\varphi_1} |b(\varphi)|$.

Используя указанные обозначения, уравнение (7) записываем в виде

$$V_k(\varphi) = (B_{0,k}V_k)(\varphi) + c_{1,k}J_{0,k}(\varphi) + $$
$$+ c_{2,k}I_{0,k}(\varphi) + g_{k1}(\varphi), \ (k=\overline{0,\infty}). \qquad (10)$$

Применяя оператор $(B_{0,k}V_k)(\varphi)$ к обеим частям равенства (10) $2n$–1 и $2n$ раз и каждый раз подставляя полученное выражение $(B_{0,k}V_k)(\varphi)$в правую часть равенства (10), с учетом (8) соответственно имеем

$$V_k(\varphi) = (B_{2n-1,k}V_k)(\varphi) + \bar{c}_{1,k} \cdot \sum_{m=1}^{n} J_{2m-1,k}(\varphi) +$$
$$+ \bar{c}_{2,k} \cdot \sum_{m=1}^{n} I_{2m-1,k}(\varphi) + c_{1,k} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} J_{2m,k}(\varphi) +$$
$$+ c_{2,k} \cdot \sum_{m=0}^{n-1} I_{2m,k}(\varphi) + \sum_{m=0}^{2n-1} (B_m g_{k1})(\varphi) + g_{k1}(\varphi)$$

и

$$V_k(\varphi) = (B_{2n,k}V_k)(\varphi) + \bar{c}_{1,k} \cdot \sum_{m=1}^{n} J_{2m-1,k}(\varphi) +$$
$$+ \bar{c}_{2,k} \cdot \sum_{m=1}^{n} I_{2m-1,k}(\varphi) + \bar{c}_{1,k} \cdot \sum_{m=0}^{n} J_{2m-1,k}(\varphi) +$$
$$+ c_{2,k} \cdot \sum_{m=0}^{n} I_{2m-1,k}(\varphi) + \sum_{m=0}^{2n-1} (B_m g_{k1})(\varphi) + g_{k1}(\varphi).$$

Если переходим к пределу при $n \to \infty$ в последних представлениях, то в силу (9) получаем

$$V_k(\varphi) = \bar{c}_{1,k}P_{1,k}(\varphi) + \bar{c}_{2,k}Q_{1,k}(\varphi) +$$
$$+ c_{1,k}P_{2,k}(\varphi) + c_{2,k}Q_{2,k}(\varphi) + (R_k g_k)(\varphi),$$
$$(k=\overline{0,\infty}), \qquad (11)$$

где

$$P_{1,k}(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n-1,k}(\varphi), \quad Q_{1,k}(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{2n-1,k}(\varphi),$$

$$P_{2,k}(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n-1,k}(\varphi), \quad Q_{2,k}(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} I_{2n,k}(\varphi),$$

$$(R_k g_k)(\varphi) = g_{k1}(\varphi) + \sum_{n=0}^{\infty} (B_{n,k} g_{k1})(\varphi).$$

Используя неравенства (9), можно найти следующие оценки:

$$|P_{1,k}(\varphi)| \le sh\left(\frac{|b|_0\,\varphi}{\lambda\mu}\right), \quad |P_{2,k}(\varphi)| \le ch\left(\frac{|b|_0\,\varphi}{\varphi}\right),$$

$$|Q_{1,k}(\varphi)| \le sh\left(\frac{|b|_0\,\varphi}{\varphi}\right), \quad |Q_{2,k}(\varphi)| \le ch\left(\frac{|b|_0\,\varphi}{\varphi}\right),$$

$$|(R_k g_k)(\varphi)| \le \frac{|g_k|_0\,\varphi}{\lambda\mu} \cdot \exp\left(\frac{|b|_0\,\varphi}{\lambda\mu}\right).$$

С помощью этих оценок можно легко показать, что функции $V_k(\varphi)$, $(k=\overline{0,\infty})$, заданные по формулам (11), являются решениями уравнений (4) из класса $C\ [0,\varphi_1]$.

Подставляя (11) в (3), имеем

$$V(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} (\bar{c}_{1,k}P_{1,k}(\varphi) + \bar{c}_{2,k}Q_{1,k}(\varphi) +$$
$$+ c_{1,k}P_{2,k}(\varphi) + c_{2,k}Q_{2,k}(\varphi))r^{\nu k} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} (R_k g_k)(\varphi) r^{\nu k}. \qquad (12)$$

Из вида формулы (12) следует, что функция $V(r,\varphi)$, представленная по этой формуле, удовлетворяет условию (А) и принадлежит классу

$$C(G)\,\mathrm{I}\ C^{\infty,2}(G,\nu,0)\,\mathrm{I}\ W_p^2(G). \qquad (13)$$

Здесь $W_p^2(G)$ – пространство С.Л. Соболева [5]; $C^{\infty,2}(G,\nu,0)$ – класс функций $V(r,\varphi)$, сколь угодно раз непрерывно дифференцируемых по r^ν и дважды непрерывно дифференцируемых по φ в точке (0,0).

Следовательно, имеет место

Теорема 1. Уравнение (1) всегда имеет решения класса (13). Многообразие решений уравнения (1) из класса (13) находится по формуле (12).

2^0. Рассмотрим для уравнения (1) следующую начально-краевую задачу.

Задача D_1. Требуется найти решение $V(r,\varphi)$ уравнения (1) из класса (13), удовлетворяющее условиям

$$\left.\frac{\partial^k V(r,0)}{\partial\rho^k}\right|_{\substack{r=0\\ \varphi=0}} = a_k,\ (k=\overline{0,\infty}), \tag{14}$$

$$\left.\frac{\partial^k}{\partial\rho^k}\frac{\partial V(r,\varphi)}{\partial\varphi}\right|_{\substack{r=0\\ \varphi=0}} = b_k,\ (k=\overline{0,\infty}), \tag{15}$$

где $\rho = r^\nu$, a_k, b_k, $(k=\overline{0,\infty})$ – заданные комплексные числа, такие, что ряды $\sum_{k=2}^{\infty}\frac{|a_k|}{(k-1)!}$, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|b_k|}{k!}$, сходятся.

Решение задачи.

Функции $P_{1,k}(\varphi)$, $P_{2,k}(\varphi)$, $Q_{1,k}(\varphi)$, $Q_{2,k}(\varphi)$ и $(R_k g_k)(\varphi)$ обладают следующими дифференциальными свойствами:

$$P'_{1,k}(\varphi) = -i(\mu-k\nu)P_{1,k}(\varphi)+$$

$$+\frac{1}{\lambda}\int_0^{\varphi} e^{-i(\mu-k\nu)(\varphi-\gamma)}b(\gamma)\cos\mu(\varphi-\gamma)\cdot\overline{P_{2k}(\gamma)}d\gamma,$$

$$P'_{2,k}(\varphi) = -i(\mu-k\nu)P_{2,k}(\varphi)-\mu e^{-i(\mu-k\nu)}\sin\mu\varphi+$$

$$+\frac{1}{\lambda}\int_0^{\varphi} e^{-i(\mu-k\nu)(\varphi-\gamma)}b(\gamma)\cos\mu(\varphi-\gamma)\cdot\overline{P_{1,k}(\gamma)}d\gamma,$$

$$Q'_{1,k}(\varphi) = -i(\mu-k\nu)Q_{1,k}(\varphi)+$$

$$+\frac{1}{\lambda}\int_0^{\varphi} e^{-i(\mu-k\nu)(\varphi-\gamma)}b(\gamma)\cos\mu(\varphi-\gamma)\cdot\overline{Q_{2k}(\gamma)}d\gamma,$$

$$Q'_{2,k}(\varphi) = -i(\mu-k\nu)Q_{2,k}(\varphi)+\mu e^{-i(u-k\nu)\varphi}\cos\mu\varphi+$$

$$+\frac{1}{\lambda}\int_0^{\varphi} e^{-i(\mu-k\nu)(\varphi-\gamma)}b(\gamma)\cos\mu(\varphi-\gamma)\cdot\overline{Q_{1,k}(\gamma)}d\gamma$$

$$((R_k g_k)(\varphi))' = -i(\mu-\kappa\nu)(R_k g_k)(\varphi)-$$

$$-\frac{1}{\lambda}\int_0^{\varphi}\cos\mu(\varphi-\gamma)\cdot e^{-i(\mu-k\nu)(\varphi-\gamma)}\cdot(g_k(\gamma)-$$

$$-b(\gamma))(R_k g_k)(\gamma)d\gamma,\ \ k=\overline{0,\infty}.$$

В справедливости этих формул легко можно убедиться непосредственной проверкой.

Из этих равенств и вида функции $P_{1,k}(\varphi)$, $P_{2,k}(\varphi)$, $Q_{1,k}(\varphi)$, $Q_{2,k}(\varphi)$, $(R_k g_k)(\varphi)$ следует

$$P_{1,k}(0) = Q_{1,k}(0) = Q_{2,k}(0) = R_k g_k(0) = 0,$$

$$P_{2,k}(0) = 1,$$

$$P_{1,k}(0) = Q'_{1,k}(0) = (R_k g_k)'(0) = 0,$$

$$P'_{2,k}(0) = -i(\mu-k\nu), \tag{16}$$

$$Q_{2,k}(\varphi) = \mu.$$

Решение задачи D_1 ищем в виде (12).

Постоянные $c_{1,k}$ и $c_{2,k}$, ($k=\overline{0,\infty}$) подбираем так, чтобы функция $V(r,\varphi)$, заданная по формуле (12), удовлетворяла условиям (14), (15). Для этого, подставляя (12) в (14) и (15), с учетом (16) получаем

$$c_{1,k} = \frac{a_k}{k!},\ c_{2,k} = \frac{b_k}{\mu\cdot k!}+\frac{i(\mu-k\nu)}{\mu\cdot k!}a_k,$$

$$\left(k=\overline{0,\infty}\right).$$

Таким образом, решение задачи D_1 имеет вид

$$V(r,\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\overline{a}_k}{k!}P_{1,k}(\varphi)+\right.$$

$$+\frac{\overline{b}_k - i(\mu-k\nu)\overline{a}_k}{\mu\cdot k!}Q_{1,k}(\varphi)+\frac{a_k}{k!}P_{2,k}(\varphi)+$$

$$\left.+\frac{b_k+i(\mu-k\nu)a_k}{\mu\cdot k!}Q_{2,k}(\varphi)\right)r^{k\nu}+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}(R_k g_k)(\varphi)\cdot r^{k\varphi}. \tag{17}$$

Следовательно, имеет место

Теорема 2. Задача D_1 имеет единственное решение, которое находится по формуле (17).

3⁰. Пусть в уравнении (1) $g(r,\varphi) = r^\mu\cdot f(\varphi)$, где $\mu > 1$, $f(\varphi)\in C[0,\varphi_1]$. В таком случае можно решить начально-краевые задачи для уравнения (1). Одна из таких задач решена в [4].

Пусть $k = [\mu]$. Рассмотрим задачу

Задача D_2. Требуется найти решение уравнения (1) при $g(r,\varphi) = r^\mu\cdot f(\varphi)$, где $\mu > 1$,

$f(\varphi) \in C[0, \varphi_1]$, из класса (13), удовлетворяющее условиям

$$\frac{\partial^n V}{\partial r^n}(0, \varphi) = 0, \ (n = \overline{0, k-1}),$$

$$\left|V(r, \varphi)\right| = O\left(r^k\right), \ 0 \le r \le \infty, \qquad (18)$$

$$V(r, 0) = b_0 \cdot r^{\mu}, \qquad (19)$$

$$V(r, \varphi_1) = b_1 \cdot r^{\mu}, \qquad (20)$$

где b_0, b_1 – заданные комплексные числа.

Решение задачи.

Формула (12) в этом случае имеет вид

$$V(r, \varphi) = r^{\mu}\left(\overline{c_1} P_1(\varphi) + c_1 P_2(\varphi) + \right.$$

$$\left. + \overline{c_2} Q_1(\varphi) + c_2 Q_2(\varphi) + (Rf)(\varphi)\right), \qquad (21)$$

где

$$P_1(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} J_{2k-1}(\varphi), \ P_2(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} J_{2k}(\varphi),$$

$$Q_1(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} I_{2k-1}(\varphi), \ Q_2(\varphi) = \sum_{k=0}^{\infty} I_{2k}(\varphi),$$

$$(Rf)(\varphi) = f_1(\varphi) + \sum_{k=0}^{\infty} (B_k f_1)(\varphi).$$

Здесь

$$I_0(\varphi) = c^{(\mu-\nu)\varphi i} \sin \nu\varphi, \ J_0(\varphi) = c^{(\mu-\nu)\varphi i} \cos \nu\varphi,$$

$$I_k(\varphi) = \int_0^{\varphi} b(\varphi, \gamma) \overline{I_{k-1}(\gamma) d\gamma},$$

$$J_k(\varphi) = \int_0^{\varphi} b(\varphi, \gamma) \overline{J_{k-1}(\gamma) d\gamma}, \ (k = \overline{1, \infty}),$$

$$f_1(\varphi) = \int_0^{\varphi} f(\varphi, \gamma) d\gamma,$$

$$(B_0 f)(\varphi) = \int_0^{\varphi} b(\varphi, \gamma) \overline{f(\gamma) d\gamma},$$

$$(B_k f)(\varphi) = (B_0 (B_{k-1} f)(\varphi))(\varphi), \ (k = \overline{1, \infty}),$$

$$b(\varphi, \gamma) = \frac{1}{\lambda\nu} e^{(\mu-\nu)(\varphi-\gamma)i} \sin \mu(\varphi - \gamma) \cdot b(\gamma),$$

$$f(\varphi, \gamma) = \frac{-1}{\lambda\nu} e^{(\mu-\nu)(\varphi-\gamma)i} \sin \nu(\varphi - \gamma) \cdot f(\gamma).$$

Функция, заданная по формуле (21), автоматически удовлетворяет условиям (18). Поэтому постоянные c_1 и c_1 в формуле (21) подбираем так, чтобы функция $V(r, \varphi)$ удовлетворяла и условиям (19), (20). Для этого, подставляя (21) в (19) и (20), получаем

$$c_1 = b_0, \qquad (22)$$

$$\overline{c_2} \cdot Q_1(\varphi_1) + c_2 Q_2(\varphi_1) =$$

$$= b_1 - b_0 P_2(\varphi_1) - (Rf)(\varphi_1). \qquad (23)$$

Если $\Delta(\varphi_1) = \left|Q_2(\varphi_1)\right|^2 - \left|Q_1(\varphi_1)\right|^2 \ne 0$, то из (23) следует

$$c_2 = \frac{\Delta_1(\varphi_1)}{\Delta(\varphi_1)},$$

$$\Delta_1(\varphi_1) = \overline{Q_2(\varphi_1)} \cdot P_3(\varphi_1) - Q_1(\varphi_1) \cdot \overline{P_3(\varphi_1)},$$

$$P_3(\varphi) = b_1 - b_0 P_2(\varphi_1) - \overline{b}_0 P_1(\varphi_1) - (Rf)(\varphi_1).$$

Таким образом, при $\Delta(\varphi_1) \ne 0$ получаем решение задачи D_2 в виде

$$V(r, \varphi) = r^{\mu}\left(\overline{b}_0 \cdot P_1(\varphi) + \overline{\frac{\Delta_1(\varphi_1)}{\Delta(\varphi_1)}} Q_1(\varphi) + \right.$$

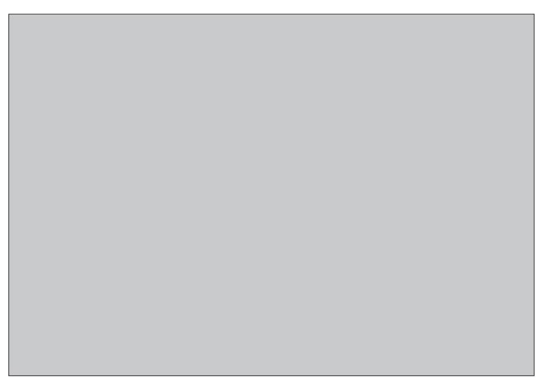
$$\left. + b_0 \cdot P_2(\varphi) + \frac{\Delta_1(\varphi_1)}{\Delta(\varphi_1)} Q_2(\varphi) + (Rf)(\varphi)\right). \qquad (25)$$

Если $\Delta(\varphi_1) = 0$, то для разрешимости уравнения (23) необходимо и достаточно выполнения условий

$$\operatorname{Im}\left[\left(Q_1(\varphi_1) + Q_2(\varphi_1)\right)\overline{P_3(\varphi_1)}\right] = 0,$$

$$\operatorname{Re}\left[\left(Q_2(\varphi_1) - Q_1(\varphi_1)\right)\overline{P_3(\varphi_1)}\right] = 0. \qquad (26)$$

При выполнении условия (26) и (23) получаем



(27)

где α – произвольное действительное число.

Следовательно, доказана

Теорема 3. Если $\Delta(\varphi_1) \neq 0$, то задача D_2 имеет единственное решение, которое находится по формуле (25).

При $\Delta(\varphi_1) = 0$ для разрешимости задачи D_2 необходимо и достаточно выполнения равенств (26). В этом случае задача D_2 имеет многообразие решений, которое находится по формулам (21), (22) и (27).

3.1. Рассмотрим теперь частный случай, когда $\varphi_1 = 2\pi$. В этом случае для непрерывности решения в области $G = \{z = re^{i\varphi} : 0 \le r < \infty, 0 \le \varphi \le 2\pi\}$ в задаче D_2 естественно взять $b_1 = b_0$. Поэтому задачу D_2 рассмотрим в следующем виде.

Задача D_3. Требуется найти решение уравнения (1) из класса (13), удовлетворяющее условиям (19) и

$$V(r,0) = V(r,2\pi) = b_0 \cdot r^{\mu}.$$

Решение задачи.

Решая задачу D_3, как в общем случае, получаем ее решение при $\Delta(2\pi) \neq 0$ в виде

$$V(r,\varphi) = r^{\mu}\Bigg(\bar{b}_0 \cdot P_1(\varphi) + \frac{\overline{\Delta_1(2\pi)}}{\overline{\Delta(2\pi)}} Q_1(\varphi) + b_0 \cdot P_2(\varphi) + \frac{\Delta_1(2\pi)}{\Delta(2\pi)} Q_2(\varphi) + (Rf)(\varphi)\Bigg), \quad (28)$$

где

$$\Delta_1(2\pi) = \overline{Q_2(2\pi)} P_3(2\pi) - Q_1(2\pi) \cdot \overline{P_3(2\pi)},$$

$$P_3(2\pi) = b_0\left(1 - P_2(2\pi)\right) - \bar{b}_0 \cdot P_1(2\pi) - (Rf)(2\pi),$$

$$\Delta(2\pi) = \left|Q_2(2\pi)\right|^2 - \left|Q_1(2\pi)\right|^2.$$

При $\Delta(2\pi) = 0$ необходимое и достаточное условие разрешимости задачи D_3 имеет вид

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im}\left[\left(Q_1(2\pi) + Q_2(2\pi)\right) \cdot \overline{P_3(2\pi)}\right] = 0, \\ &\operatorname{Re}\left[\left(Q_2(2\pi) - Q_1(2\pi)\right) \cdot \overline{P_3(2\pi)}\right] = 0. \end{aligned} \quad (29)$$

Коэффициент c_1 находится по формуле (22), а c_2 – по формуле

(30)

где α – произвольное действительное число.

Итак, справедлива

Теорема 4. При $\Delta(2\pi) \neq 0$ задача D_3 имеет единственное решение, которое находится по формуле (25). При $\Delta(2\pi) = 0$ для разрешимости задачи D_3 необходимо и достаточно выполнения равенств (29). В этом случае задача D_3 имеет многообразие решений, которое находится по формулам (21), (22) и (30).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Усманов З.Д.* Бесконечно малые изгибания поверхностей положительной кривизны с точкой уплощения // Differential Geometry. Banach Center Publications. Warsaw, 1984. V. 12. P. 214-272.

2. *Абдыманапов С.А., Тунгатаров А.Б.* Некоторые классы эллиптических систем на плоскости с сингулярными коэффициентами. Алматы: Ғылым, 2005.

3. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.

4. *Абдыманапов С.А.* Начально-краевая задача для одного класса эллиптических систем второго порядка на плоскости с полярной особенностью // Вестник НАН РК. 2005. № 5. С. 3-7.

5. *Векуа И.Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959.

Summary

In this work solved the initial and initial boundary value problems for one class of the Focus type differential systems.

ЕНУ им. Л. Н. Гумилева *Поступила 15.05.06г.*

превышается предел прочности на растяжение (внизу) и на сдвиг (в центре). В результате высвобождается нижняя часть колонны, т.е. уменьшается размер прихваченной области, а значит, снижается суммарная величина удерживающих сил. Дальнейшие действия, заключающиеся в натяжении колонны предельной осевой нагрузкой, могут привести к полному освобождению колонны. В противном случае операция "поворот – растяжение" повторяется.

Такие действия – чередование поворота и растяжки – рекомендованы и в пособиях по ликвидации прихвата [1], где указывается, что после 2–3 попыток провернуть колонну приступают к ее расхаживанию, после чего вся процедура повторяется еще несколько раз.

При теоретических расчетах в данном разделе не учитывались циркуляция раствора, установка ванны, хотя увлажнение прихваченной породы способно в еще большей степени снизить ее прочность и повысить эффективность указанных действий по ликвидации прихвата.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пустовойтенко И.П.* Предупреждение и ликвидация аварий в бурении. М.: Недра, 1988. 279 с.

2. *Сеид-Рза М.К., Григорян А.А., Шерстернев Н.М.* Влияние продолжительности формирования фильтрационных корок на прихваты труб. М.: Недра, 1975.

Резюме

Тізбек шетіндегі айналдыру моментінің әсерінен пайда болатын таралған орын ауыстыру мен кернеу өрістерінің және жыныс пен тізбектің кеңістік моделі қарастырылған.

Summary

The spatial model of column with soil and allocated displacement and voltage fields in it, caused by circular moment on the column of butt end is considered.

Атырауский институт нефти и газа

Поступила 2.03.06г.