УДК 539,3 + 528,22

Е. АРИНОВ

КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ НЕФТЕГАЗОХРАНИЛИЩ

Дано определение концентрации напряжений в окрестности горных выработок сферической формы глубокого заложения (нефтегазохранилищ).

Система дифференциальных уравнений равновесия в сферической системе координат имеет вид [1]:

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial\lambda}+$$

$$+\frac{1}{r}\left(2\sigma_{11}-\sigma_{22}-\sigma_{33}+\sigma_{12}ctg\theta\right)=0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{22}}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial\lambda}+$$

$$+\frac{1}{r}[(\sigma_{22}-\sigma_{33})ctg\theta+3\sigma_{12}]=0,$$

$$\frac{\partial\sigma_{13}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial\sigma_{23}}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\sigma_{33}}{\partial\lambda}+$$

$$+\frac{1}{r}\left(3\sigma_{13}+2\sigma_{23}ctg\theta\right)=0, \qquad (1)$$

где $\sigma_{ij}(i, j=1,2,3)$ – компоненты тензора напряжений; r, θ, λ – сферические координаты, причем r – радиус, θ – коширота, λ – долгота.

Поскольку нефтегазохранилища устраивают обычно в среде горных пород из несжимаемого материала, то воспользуемся соответствующим физическим законом, устанавливающим связь между компонентами тензоров напряжений и деформаций:

$$\sigma_{ij}-\delta_{ij}\sigma=2G\varepsilon_{ij}, \qquad (2)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера; σ – среднее напряжение; ε_{ij} – компоненты тензора деформации; G – модуль сдвига.

Компоненты тензора деформаций связаны с упругими перемещениями точек соотношениями Коши в сферической системе координат:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial r},\ \ \varepsilon_{22} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{u_1}{r},$$

$$\varepsilon_{33} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_3}{\partial \lambda} + \frac{u_2}{r}ctg\theta + \frac{u_1}{r},$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial \theta} - \frac{u_2}{r}\right),$$

$$\varepsilon_{13} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_1}{\partial \lambda} + \frac{\partial u_3}{\partial r} - \frac{u_3}{r}\right),$$

$$\varepsilon_{23} = \frac{1}{2r}\left(\frac{\partial u_3}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_2}{\partial \lambda} - u_3 ctg\theta\right). \quad (3)$$

Для несжимаемого материала дилатансия

$$\varepsilon = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0$$

и с учетом (3) можно записать

$$\Theta' = -r\frac{\partial u_1}{\partial r} = r\left(\varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}\right) =$$

$$= \frac{\partial u_2}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_3}{\partial \lambda} + u_2 ctg\theta + 2u_1. \quad (4)$$

Первое из уравнений (1) представляем в виде

$$\left(\nabla^2 + 2\right)u_1 + r^2\frac{\partial_2 u_1}{\partial r^2} + 4r\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{r^2}{G}\frac{\partial \sigma}{\partial r} = 0, \quad (5)$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + ctg\theta\frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} \quad (6)$$

– дифференциальный оператор Бельтрами [2]. Из двух последних уравнений (1) получаем

$$\nabla^2\sigma - G\nabla^2\frac{\partial u_1}{\partial r} - r^2 G\frac{\partial^3 u_1}{\partial r^3} -$$

$$- 6rG\frac{\partial u_1}{\partial r} - 6G\frac{\partial u_1}{\partial r} = 0\,. \quad (7)$$

Принимаем решения уравнений (5) и (7) в виде

$$u_1 = \sum_{m=0}^{\infty} u_{10m}(r)P_n^m(\cos\theta)\cos m\lambda, \quad (8)$$

$$\sigma = \sum_{m=0}^{\infty} \sigma_{0m}(r)P_n^m(\cos\theta)\cos m\lambda\,. \quad (9)$$

Подставляя (8) и (9) в (7) с учетом тождества [3]:

$$\nabla^2 P_n^m(\cos\theta)\cos m\lambda =$$

$$= -n(n+1)P_n^m(\cos\theta)\cos m\lambda, \quad (10)$$

получаем (индекс m опускаем)

$$\sigma_0(r) = \frac{G}{rn(n+1)}\left\{-r^3\frac{d^3u_{10}(r)}{dr^3} -\right.$$

$$\left. - 6r^2\frac{d^2u_{10}(r)}{dr^2} + r[n(n+1) - 6]\frac{du_{10}(r)}{dr}\right\}. \quad (11)$$

Подставляя выражение (11) в (5), имеем

$$r^4\frac{d^4u_{10}(r)}{dr^4} + 8r^3\frac{d^3u_{10}(r)}{dr^3} + [12 - 2n(n+1)]\times$$

$$\times\left|r^2\frac{d^2u_{10}(r)}{dr^2} - 4rn(n+1)\frac{du_{10}(r)}{dr} + \right.$$

$$+ [n^2(n+1)^2 - 2n(n+1)]u_{10}(r) = 0. \quad (12)$$

Это уравнение Эйлера четвертого порядка [4].

Два последних уравнения (1) приобретают следующий вид:

$$r^2\frac{\partial^2 u_2}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial u_2}{\partial r} = -2\frac{\partial u_1}{\partial \theta} - r\frac{\partial^2 u_1}{\partial r\partial \theta} -$$

$$- \frac{r}{G}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sigma + 2G\frac{\Theta'}{r} - 2\frac{G}{r}u_1\right) + \frac{2}{\sin\theta}\frac{\partial \chi}{\partial \lambda}\ , \quad (13)$$

$$r^2\frac{\partial^2 u_3}{\partial r^2} + 2r\frac{\partial u_3}{\partial r} = -2\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_1}{\partial \lambda} - \frac{r}{\sin\theta}\frac{\partial^2 u_1}{\partial r\partial \lambda} -$$

$$- \frac{r}{G}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \lambda}\left(\sigma + 2G\frac{\Theta'}{r} - 2\frac{G}{r}u_1\right) - 2\frac{\partial \chi}{\partial \theta}, \quad (14)$$

где величина

$$\chi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial \theta} + u_3 ctg\theta - \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u_2}{\partial \lambda}\right) \quad (15)$$

отвечает радиальной компоненте ротора вектора перемещения и характеризует вращение элемента, нормального к радиусу, относительно радиальной оси.

В случае осесимметричного нагружения, с которым мы будем иметь дело, величина $\chi = 0$ и крутильная деформация отсутствуют. Таким образом, получаем случай сфероидальной деформации.

В этом случае система дифференциальных уравнений равновесия (1) с учетом (4), (8), (9), а также представление перемещения u_2 в виде

$$u_2 = u_{20}(r)\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}, \quad (16)$$

сводятся к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений Эйлера – однородного (12) и неоднородного:

$$r^2\frac{d^2u_{20}(r)}{dr^2}+2r\frac{du_{20}(r)}{dr}=\frac{1}{n(n+1)}\times$$
$$\times\left[r^3\frac{d^3u_{10}(r)}{dr^3}+6r^2\frac{d^2u_{10}(r)}{dr^2}+6r\frac{du_{10}(r)}{dr}\right].\qquad(17)$$

Частное решение уравнения Эйлера (12) находим в виде

$$u_{10}(r)=r^{\rho}\,.\qquad(18)$$

Подставляя (18) в (12), получаем характеристическое уравнение

$$\rho^4+2\rho^3-\left(1+2n^2+2n\right)\rho^2-2\rho(1+n^2+n)+$$
$$+n^4+2n^3-n^2-2n=0\,.\qquad(19)$$

Корни этого уравнения

$$\rho_1=n+1;\ \rho_2=n-1;\ \rho_3=-n;\ \rho_4=-n-2.\qquad(20)$$

Два первых корня отвечают внутренней, два последних – внешней краевым задачам.

Общее решение уравнения (12) имеет вид

$$u_{10}(r)=C_1r^{n+1}+C_2r^{n-1}+C_3r^{-n}+C_4r^{-n-2},\qquad(21)$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные интегрирования.

В случае осесимметричной задачи для определения $u_{20}(r)$ достаточно найти частное решение неоднородного уравнения (17), так как в правую часть этого уравнения входит уже определенная функция $u_{10}(r)$, зависящая от четырех произвольных постоянных интегрирования.

При решении же внутренней и внешней краевых задач в осесимметричном случае искомые величины содержат четыре произвольные постоянные интегрирования.

Определим выражение правой части уравнения (17) с учетом (21). Найдем частные производные от функции (21) и подставим их в уравнение (17). Тогда получим

$$r^2\frac{d^2u_{20}(r)}{dr^2}+2r\frac{du_{20}(r)}{dr}=$$
$$=A_1r^{n+1}+A_2r^{n-1}+A_3r^{-n}+A_4r^{-n-2},\qquad(22)$$

где

$$A_1=C_1\frac{(n+2)(n+3)}{n},\quad A_2=C_2(n-1),$$
$$A_3=-C_3\frac{(n-1)(n-2)}{n+1},\quad A_4=-C_4(n+2).\qquad(23)$$

Частное решение уравнения (22) можно искать в следующем виде:

а) Если $n\geq 2$, то решение будет

$$u_{20}(r)=B_1r^{n+1}+B_2r^{n-1}+B_3r^{-n}+B_4r^{-n-2},\qquad(24)$$

где B_1, B_2, B_3, B_4 – неопределенные коэффициенты.

Продифференцировав (24) и подставив в уравнение (22), получим с учетом (23)

$$B_1=C_1\frac{(n+3)}{n(n+1)};\ B_2=\frac{C_2}{n};$$
$$B_3=-C_3\frac{(n-2)}{n(n+1)};\ B_4=-\frac{C_4}{(n+1)};\qquad(25)$$

б) Если $n = 1$, то уравнение (22) с учетом (23) приобретает вид

$$r^2\frac{d^2u_{20}(r)}{dr^2}+2r\frac{du_{20}(r)}{dr}=12C_1r^2-3C_4r^{-3}.\qquad(26)$$

Характеристическое уравнение соответствующего (26) однородного дифференциального уравнения имеет корни

$$k_1=0,\ k_2=-1.\qquad(27)$$

Общее решение однородного уравнения будет

$$\left[u_{20}(r)\right]_1=C_2+C_3r^{-1}.\qquad(28)$$

Определим частное решение неоднородного уравнения (26) в виде

$$\left[u_{20}(r)\right]_2=Ar^2+Br^{-3}.\qquad(29)$$

Подставив (29) в (26), получим

$$A=2C_1,\quad B=-\frac{1}{2}C_4.\qquad(30)$$

Тогда общее решение неоднородного уравнения (26) будет

$$u_{20}(r)=2C_1r^2+C_2+C_3r^{-1}-\frac{1}{2}C_4r^{-3}.\qquad(31)$$

в) Случай $n = 0$ рассмотрен ранее [5].

По соотношениям Коши (3) находим компоненты тензора деформации, по обобщенному закону Гука – компоненты тензора напряжений. Для определения произвольных постоянных интегрирования следует воспользоваться краевыми условиями.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лурье А.И.* Теория упругости. М., 1970. С. 939.
2. *Власов В.З.* Избранные труды. М., 1962. С. 528.
3. *Егоров А.К., Ершибаев У.Д.* Бифуркационные колебания Земли и явление георезонанса как «спускового механизма» будущих землетрясений // Новости науки Казахстана. Алматы, 2004. Вып. 2(81). С. 152-158.
4. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики. М.; Л., 1952. Т. 2. С. 627.
5. *Аринов Е.* Устойчивость деформирования подкрепленных горных выработок. Алматы, 1998. С. 132.

Жезказганский университет

Поступила 23.02.06г.