К. К. КАММАТОВ, Г. К. ШАМБИЛОВА, В. Е. МАХАТОВА, А. Е. КАБДОЛОВА

УСТОЙЧИВОСТЬ И КОЛЕБАНИЯ НЕКОТОРЫХ СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМИСЯ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Рассматриваются устойчивость и колебания существенно нелинейных автономных систем с медленно меняющимися коэффициентами с помощью метода Г. В. Каменкова.

Устанавливаются условия существования колебаний и их устойчивость, описываемые автономной существенно нелинейной системой некоторого вида с медленно меняющими коэффициентами методом Г. В. Каменкова [1].

Рассмотрим автономную систему со многими степенями свободы с медленно меняющимися коэффициентами следующего вида:

$$\dot{x}_s = X_{so}^{(m_o)}(x_s, y_s) + \mu X_{s1}^{(m_1)}\left(\overset{n}{\underset{1}{x_s}}, \overset{n}{\underset{1}{y_s}}, \tau\right) + \mu^2 X_{s2}^{(m_2)}\left(\overset{n}{\underset{1}{x_s}}, \overset{n}{\underset{1}{y_s}}, \tau\right) + \ldots,$$

$$\dot{y}_s = Y_{so}^{(m_o)}(x_s, y_s) + \mu Y_{s1}^{(m_1)}\left(\overset{n}{\underset{1}{x_s}}, \overset{n}{\underset{1}{y_s}}, \tau\right) + \mu^2 X_{s2}^{(m_2)}\left(\overset{n}{\underset{1}{x_s}}, \overset{n}{\underset{1}{y_s}}, \tau\right) + \ldots, \tag{1}$$

где правые части обращаются в нуль при $x_s = y_s = 0$, а $X_{so}^{(m_o)}, Y_{so}^{(m_o)}$ – однородные многочлены, не содержащие линейных членов относительно x_s, y_s, причем

$$X_{so}^{(m_o)}(x_s, y_s) = \sum_{p=0}^{m_o} A_{sp} x_s^{m_o - p} y_s^{p},$$

$$Y_{so}^{(m_o)}\left(x_s, y_s\right)=\sum_{p=0}^{m_o} B_{sp} x_s^{m_o-p} y_s^p,$$

m – бесконечно малый положительный параметр; t = m t – медленное время, а $X_{si}\left(\overset{n}{\underset{1}{x_s}}, \overset{n}{\underset{1}{y_s}}, \tau\right)$, $Y_{si}\left(\overset{n}{\underset{1}{x_s}}, \overset{n}{\underset{1}{y_s}}, \tau\right)$, ($i$ =1,2,3,…) – многочлены относительно x_s, y_s любой конечной степени m_i с коэффициентами, являющимися ограниченными функциями по ф с ограниченными по ф первыми производными, причем

$$X_{si}^{(m_i)}\left(\overset{n}{\underset{1}{x_s}}, \overset{n}{\underset{1}{y_s}}, \tau\right)=\sum_{k_1^{(i)}+\ldots+k_n^{(i)}+e_1^{(i)}+\ldots+e_n^{(i)}=m_o-1}^{m_i} A_{si}^{(k_1^{(i)},\ldots,e_n^{(i)})}(\tau) x_1^{k_1^{(i)}} x_2^{k_2^{(i)}} \ldots x_n^{k_n^{(i)}} y_1^{e_1^{(i)}} y_2^{e_2^{(i)}} \ldots y_n^{e_n^{(i)}},$$

$$Y_{si}^{(m_i)}\left(\overset{n}{\underset{1}{x_s}}, \overset{n}{\underset{1}{y_s}}, \tau\right)=\sum_{k_1^{(i)}+\ldots+k_n^{(i)}+e_1^{(i)}+\ldots+e_n^{(i)}=m_o-1}^{m_i} B_{si}^{(k_1^{(i)},\ldots,e_n^{(i)})}(\tau) x_1^{k_1^{(i)}} x_2^{k_2^{(i)}} \ldots x_n^{k_n^{(i)}} y_1^{e_1^{(i)}} y_2^{e_2^{(i)}} \ldots y_n^{e_n^{(i)}}.$$

Переходим в системе (1) к новым переменным r_s, θ_s по равенствам

$$x_s=\rho_s \cos\theta_s, y_s=\rho_s \sin\theta_s, r_s=\rho_s \exp\Phi_{so}, \tag{2}$$

где

$$\Phi_{so}=-\int_0^{\theta_s}\frac{F_{so}^{(m_o)}(\theta_s)}{R_{so}^{(m_o)}(\theta_s)}d\theta_s, \quad R_{so}^{(m_o)}>0,$$

$$F_{so}^{(m_o)}(\theta_s)=X_{so}^{(m_o)}\cos\theta_s+Y_{so}^{(m_o)}\sin\theta_s, \quad R_{so}^{(m_o)}(\theta_s)=-X_{so}^{(m_o)}\sin\theta_s+Y_{so}^{(m_o)}\cos\theta_s.$$

Систему (1) приведем к виду

$$\dot{r}_s=\mu F_{s1}^{(m_1')}(r_s,\theta_s,\tau)+\mu^2 F_{s2}^{(m_2')}(r_s,\theta_s,\tau)+\ldots \tag{3}$$

$$\dot{\theta}_s=R_{so}^{(m_o')}(r_s,\theta_s)+\mu R_{s1}^{(m_1')}(r_s,\theta_s,\tau)+\ldots,$$

где

$$R_{so}^{(m_o')}(r_s,\theta_s)=\left[-X_{so}^{(m_o)}(\cos\theta_s,\sin\theta_s)\sin\theta_s+Y_{so}^{(m_o)}(\cos\theta_s,\sin\theta_s)\cos\theta_s\right]r_s^{m_o-1}\exp(m_o-1)\Phi_{so},$$

$$F_{s1}^{(m_1')}(r_s,\theta_s)=X_{s1}^{(m_o)}\cos\theta_s+Y_{s1}^{(m_o)}\sin\theta_s[X_{so}^{(m_o)}(r_s\exp(-\Phi_{so})\cos\theta_s, r_s\exp(-\Phi_{so})\sin\theta_s)\cos\theta_s+,$$

$$Y_{so}^{(m_o)}\left(r_s\exp(-\Phi_{so})\cos\theta_s, r_s\exp(-\Phi_{so})\sin\theta_s\right)\sin\theta_s]+,$$

$$Y_{so}^{(m_o)}\left(r_s\exp(-\Phi_{so})\cos\theta_s, r_s\exp(-\Phi_{so})\sin\theta_s\right)\cos\theta_s]^{-1}\left(-X_{s1}^{(m_1)}\sin\theta_s+Y_{s1}^{(m_1)}\cos\theta_s\right).$$

Учитывая, что F_{s1}, R_{s2} есть многочлены относительно $\overset{n}{\underset{1}{r_s}}$ с коэффициентами, являющимися формами от $\sin\theta_s, \cos\theta_s$, в дальнейшем для удобства представим их в виде

$$F_{si}^{(m_i)}(r_s,\theta_s,\tau)=\sum_{k_1^{(s)}+\ldots+k_n^{(s)}=m_o-1}^{N_i^{(s)}} A_{si}^{\left(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)}\right)}(\theta_s,\tau) r_1^{k_1^{(s)}} r_2^{k_2^{(s)}} \ldots r_n^{k_n^{(s)}},$$

где $s=1,2,\ldots,n, \quad i=1,2,3,\ldots, \quad k_s^{(s)}\geq m_o-1, \quad N_i^{(s)}$ – наивысшие степени многочлена F_{si}, A_{si} –

периодические функции, относительно $\overset{n}{\underset{1}{\theta_s}}$ с общим периодом, равным $2p$. Исключая из (3) dt, получим уравнение

$$\frac{\dot r_s}{\dot\theta_s}=r_s'=\frac{\mu F_{s1}(r_s,\theta_s,\tau)+\mu^2F_{s2}(r_s,\theta_s,\tau)+\ldots}{R_{so}(r_s,\theta_s)+\mu R_{s1}(r_s,\theta_s,\tau)+\ldots}=\mu P_{s1}(r_s,\theta_s,\tau)+\mu^2P_{s2}(r_s,\theta_s,\tau)+\ldots, \tag{4}$$

где

$$P_{si}(r_s,\theta_s,\tau)=\sum_{k_1^{(s)}+\ldots+k_n^{(s)}=m_0-1}^{M_i^{(s)}}A_{si}^{\left(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)}\right)}(\theta_s,\tau)r_1^{k_1^{(s)}}r_2^{k_2^{(s)}}\ldots r_n^{k_n^{(s)}}$$

при условии, что $R_{so}(r_s,\theta_s)+\mu R_{s1}(r_s,\theta_s,\tau)+\ldots>0$.

Рассмотрим новые переменные ρ_o, согласно подстановке

$$r_s=\rho_s+\sum_{k=1}^{\alpha}\mu^k\sum_{k_1^{(s)}+\ldots+k_n^{(s)}=m_0-1}^{M_k^{(s)}}u_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau)\rho_1^{k_1^{(s)}}\rho_2^{k_2^{(s)}}\ldots\rho_n^{k_n^{(s)}}, \tag{5}$$

где $u_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau)-$ некоторые периодические функции по θ_s, подлежащие определению, а $k_s^{(s)}\geq m_o-1>0$.

С помощью (5) система (4) преобразуется к виду

$$\rho'\left[1+\sum_{k=1}^{\alpha}\mu^k\sum_{k_1^{(s)}+\ldots k_n^{(s)}=m_o-1}^{M_k^{(s)}}k_s^{(s)}\rho_1^{k_1^{(s)}}\,\mathrm{K}\,\rho_s^{k_s^{(s)}-1}\,\mathrm{K}\,\rho_n^{k_n^{(s)}}u_{sk}^{(k_1^{(s)},\mathrm{K},k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau)\right]+$$

$$+\sum_{k=1}^{\alpha}\mu^k\sum_{k_1^{(s)}+\mathrm{K}+k_n^{(s)}=m_o-1}^{M_k^{(s)}}(k_1^{(s)}\rho_1^{k_1^{(s)}-1}\rho_2^{k_2^{(s)}}+\mathrm{K}+\rho_n^{k_n^{(s)}}+\mathrm{K}+k_{s-1}^{(s)}\rho_{s-1}'\rho_1^{k_1^{(s)}}\,\mathrm{K}\,\rho_{s-1}^{k_{s-1}^{(s)}-1}+\mathrm{K}$$

$$+k_{s+1}^{(s)}\rho_{s+1}'\rho_1^{k_1^{(s)}}\,\mathrm{K}\,\rho_{s+1}^{k_{s+1}^{(s)}-1}+\mathrm{K}+k_n^{(s)}\rho_n'\rho_1^{k_1^{(s)}}\,\mathrm{K}\,\rho_n^{k_n^{(s)}-1})u_{sk}^{(k_1^{(s)},\mathrm{K},k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\alpha}\mu^k\sum_{k_1^{(s)}+\ldots+k_n^{(s)}=m_o-1}^{M_k^{(s)}}\rho_1^{k_1^{(s)}}\rho_2^{k_2^{(s)}}\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_{sk}^{(k_1^{(s)},\mathrm{K},k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau)}{\partial\theta_i}=\sum_{k=1}^{\alpha}\mu^k\sum_{k_1^{(s)}+\ldots+k_n^{(s)}=m_o-1}^{M_k^{(s)}}\Big[A_{sk}^{(k_1^{(s)},\mathrm{K},k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau)+$$

$$+B_{sk}^{(k_1^{(s)},\mathrm{K},k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau)\Big]\rho_1^{k_1^{(s)}}\rho_2^{k_1^{(s)}}\,\mathrm{K}\,\rho_n^{k_n^{(s)}}+\mathrm{K}, \tag{6}$$

где функции B_{sk}, имеющие структуру, аналогичную A_{sk}, определяют результат влияния на члены k-го порядка по m всех членов более низкого порядка, причем для первого приближения будет

$$B_{s1}^{\left(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)}\right)}\equiv 0.$$

Теперь вспомогательные функции $u_{sk}^{\left(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)}\right)}(\theta_s,\tau)$ выбираем так, чтобы удовлетворялись следующие уравнения:

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u_{sk}^{(k_1^{(s)},\mathrm{K},k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau)}{\partial\theta_i}+A_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau)+B_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau)=y_{sk}^{(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)})}(\tau), \tag{7}$$

где $g_{sk}^{(k_1^{(s)},...,k_n^{(s)})}$ – неизвестные величины, зависящие только от t.

В силу периодичности функции $u_{sk}^{(k_1^{(s)},...,k_n^{(s)})}$ неизвестные $g_{sk}^{(k_1^{(s)},...,k_n^{(s)})}$ определяются

$$g_{sk}^{(k_1^{(s)},...,k_n^{(s)})}(\tau)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}...\int_0^{2\pi}\left[A_{sk}^{(k_1^{(s)},...,k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau)+B_{sk}^{(k_1^{(s)},...,k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau)d\theta,..d\theta_n\right]. \qquad (*)$$

Определив таким образом $g_{sk}^{(k_1^{(s)},....,k_n^{(s)})}$, систему (9) можно далее с помощью линейного неособого преобразования

$$\rho_s=\widetilde{\rho}_s+\sum_{k=1}^{\alpha}\mu^k\left[\widetilde{A}_{s1}^{(k)}\widetilde{\rho}_1+...+\widetilde{A}_{s,s-1}\widetilde{\rho}_{s-1}+\widetilde{A}_{s,s+1}\widetilde{\rho}_{s+1}+...+\widetilde{A}_{sn}^{(k)}\widetilde{\rho}_n\right]$$

представить в виде (где сохранено старое обозначение переменных)

$$\rho'_s=\sum_{k=1}^{\alpha}\mu^k Q_{sk}^{\left(M_k^{(s)}\right)}(\rho_s,\tau)+\mu^{k+1}Q_{s,\alpha+1}^{(M_{\alpha+1}^{(s)})}(\rho_s,\theta_s,\tau)+..., \qquad (8)$$

где

$$Q_{sk}^{(M_k^{(s)})}(\rho_s,\tau)=\sum_{k_1^{(s)}+...+k_n^{(s)}=m_o-1}^{M_k^{(s)}}g_1^{\left(k_1^{(s)},...,k_n^{(s)}\right)}(\tau)\rho_1^{k_1^{(s)}}\rho_2^{k_2^{(s)}}...\rho_n^{k_n^{(s)}}.$$

Если только параметр m удовлетворяет условиям

$$1+\sum_{k=1}^{\alpha}\mu^k\sum_{k_1^{(s)}+...=k_n^{(s)}=m_o-1}^{M_k^{(s)}}u_{sk}^{(k_1^{(s)},...,k_n^{(s)})}(\theta_s,\tau)k_s^{(s)}\rho_1^{k_1^{(s)}}...\rho_s^{k_{s-1}^{(s)}}...\rho_s^{k_n^{(s)}}>0, \qquad (9)$$

с точностью до членов a-го порядка стационарные решения системы (7) определяются системой алгебраических уравнений [2, 3]:

$$\sum_{k=1}^{\alpha}\mu^k\sum_{k_1^{(s)}+...+k_n^{(s)}=m_o-1}^{M_k^{(s)}}g_{sk}^{\left(k_1^{(s)},...,k_n^{(s)}\right)}(\tau)\rho_1^{k_1^{(s)}}\rho_2^{k_2^{(s)}}...\rho_n^{k_n^{(s)}}=0, \qquad (10)$$

корни которой при фиксированном значении $\tau=\tau^*$ из интервала $[0,\infty)$ в нашем случае обозначаем как

$$\left(\rho_{1k,}\rho_{2k},...,\rho_{nk},\tau^*\right),\left(\rho_{1k},\rho_{2k},..\rho_{nk},\tau^*\right)_2,...,\left(\rho_{1k},\rho_{2k},..\rho_{nk},\tau^*\right)_n. \qquad (11)$$

Теорема 1. Каждому набору n нечетно-кратных вещественных, неотрицательных корней (11) системы (10) a-го приближения соответствует стационарное решение системы (1) или (3) независимо от членов порядка (a+1) и выше относительно m [2, 3].

В самом деле, поскольку в многочленах $Q_{sk}^{\left(M_k^{(s)}\right)}, k_s^{(s)}\geq m_0-1>0$ выражения для $\rho_s^{/}$ можно представить в виде

$$\rho'_s=\sum_{k=1}^{\alpha}\mu^k Q_{sk}^{(M_k^{(s)})}(\rho_s,\tau^*)+\mathrm{K}=\sum_{k=1}^{\alpha}\mu^k\rho^{\nu_{sk}}[a_{\nu_{sk}}(\rho_1,\mathrm{K},\rho_{s-1},\rho_{s+1},\mathrm{K},\rho_n,\tau^*)\rho_s^{\kappa_{sk}}+$$

$$+a_{\nu_{sk}-1}(\rho_1,\mathrm{K},\rho_{s-1},\rho_{s+1},\mathrm{K}\ \rho_n,\tau^*)\rho_s^{\kappa_{sk}-1}+\mathrm{K}+a_k(\rho_1,\mathrm{K}\ \rho_{s-1},\rho_{s+1},\mathrm{K},\rho_n,\tau^*)]. \qquad (12)$$

По теореме о неявных функциях из (12) можно определить $\rho_s=\rho_s\left(\rho_1,....,\rho_{s-1},\rho_{s+1},...,\rho_n,\tau^*\right)$ в виде κ_{sk} различных зависимостей. Тогда получим, что

$$\rho_s' = \sum_{k=1}^{\alpha} \mu^{\kappa} \rho_s^{\nu_{sk}} \prod_{i_k=1}^{\kappa_{sk}} \left[\rho_s - \rho_s^{(i_k)}\left(\rho_1,..,\rho_{s-1},\rho_{s+1},..,\rho_n,\tau^*\right)\right] + \dots,$$

где $\nu_{sk} + \kappa_{sk} = \mathrm{M}_k^{(s)}; \quad s = 1, 2, \mathrm{K}, n; \quad k = 1, 2, \dots, \alpha.$

Взяв вещественные неотрицательные корни из набора (11), получим

$$\rho_s' = \sum_{k=1}^{\alpha} \mu^{k} \rho_s^{\nu_{sk}} \prod_{i_k=1}^{\omega_{sk}} \left[\rho_s - \rho_s^{(i_k)}\left(\rho_1,..,\rho_{s-1},\rho_{s+1},..,\rho_n,\tau^*\right)\right] A_{sk}\left(\rho_s,\tau^*\right) + \dots,$$

где многочлены $A_{sk}\left(\rho_s,\tau^*\right)$, степень которых равна $M_k^{(s)} - \kappa_{sk} - \omega_{sk}$, сохраняют знак для всех значений $\rho_s > 0$. Возьмем из набора (11) такую группу корней

$$\rho_{1k}^{\left(i_1^{(k)}\right)}, \rho_{2k}^{\left(i_2^{(k)}\right)}, .., \rho_{nk}^{\left(i_n^{(k)}\right)}, \tag{13}$$

где $i_s^{(k)}$ – соответствует только вещественным неотрицатѐльным корням нечетной кратности.

Рассмотрим далее для каждой переменной ρ_s областѣ, образованную двумя следующими замкнутыми кривыми:

$$\begin{aligned} \rho_s &= \rho_{sk}^{\left(i_s^{(k)}\right)} + \varepsilon_{s1} \\ \rho_s &= \rho_{sk}^{\left(i_s^{(k)}\right)} - \varepsilon_{s2} \end{aligned} \tag{14}$$

где положительные числа $\varepsilon_{s1,}\varepsilon_{s2,}$, удовлетворяют условиям

$$\varepsilon_{s1} < \rho_{sk}^{\left(i_s^{(k)}+1\right)} - \rho_{sk}^{\left(i_s^{(k)}\right)}, \quad \varepsilon_{s2} < \rho_{sk}^{\left(i_s^{(k)}\right)} - \rho_{sk}^{\left(i_s^{(k)}-1\right)}. \tag{15}$$

Учтем, что при соблюдении условия (9) переменные $\rho_1, \rho_2, .., \rho_n$, определяемые системой уравнений (4), являются определенно- положительными функциями переменных $r_1, r_{2,} .. r_n, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \tau$ при всех положительных значениях $r_1, r_2, \dots, r_n$, всех вещественных $0 \le \theta_s \le 2\pi$ и для любого фиксированного значения $\tau = \tau^*$. Это, в частности, означает, что кривые $\rho_s\left(r_1, r_2, .., r_n, \theta_1, \theta_2, .., \theta_n, \tau^*\right) = C_s$ являются замкнутыми кривыми.

По свойству положительно-определенных функций кривая $\rho_s = \rho_{sk}^{\left(i_s^{(k)}\right)} - \varepsilon_{s2}$ будет находиться внутри кривой $\rho_s = \rho_{sk}^{\left(i_s^{(k)}\right)} + \varepsilon_{s1}$. Учитывая, что (10) есть корень системы (14), представим выражение для $\rho_s^{/}$ в виде

$$\rho_s^{/} = \sum_{k=1}^{\alpha} \mu^{\kappa} \left[\rho_s - \rho_s^{\left(i_s^{(k)}\right)}\left(\rho_{ik}^{\left(i_1^{(k)}\right)}, \mathrm{K}, \rho_{s-1,k}^{\left(i_{s-1}^{(k)}\right)}, \rho_{s+1,k}^{\left(i_{s+1}^{(k)}\right)}, \dots, \rho_{nk}^{\left(i_n^{(k)}\right)}, \tau^*\right)\right]^{\overline{M}_k^{(s)}} \overline{A}_{sk}(\rho_s,\tau^*) +$$

$$+ \mu^{\alpha+1} Q_{s,\alpha+1}(\rho_s,\tau^*) + \mathrm{K}, \tag{16}$$

где $\overline{M}_k^{(s)}$ – нечетные числа, а многочлены $\overline{A}_{sk}$ сохраняют знак в указанных пределах (18).

Для того чтобы узнать, каким образом интегральные кривые будут пересекать кривые (14) с помощью (15) и меняя (если будет нужно) θ_s на $-\theta_s$, получим

$$\rho_s^{/} = \sum_{k=1}^{\alpha} \mu^{k} \left(-\varepsilon_{s1}\right)^{\overline{M}_s^{(k)}} \overline{A}_{sk}\left(\rho_{sk}^{\left(i_s^{(k)}\right)} + \varepsilon_{s1}, \tau^*\right) + \mu^{\alpha+1} Q_{s,\alpha+1}\left(\rho_s,\tau^*\right) + \mathrm{K}, \tag{17}$$

$$\rho_s^{/}=\sum_{k=1}^{\alpha}\mu^k\varepsilon_{s2}^{\overline{M}_k^{(s)}}\overline{A}_{sk}\left(\rho_{sk}^{\left(i_s^{(k)}\right)}-\varepsilon_{s2},\tau^*\right)+\mu^{\alpha+1}Q_{s,\alpha+1}\left(\rho_s,\tau^*\right)+\ldots \qquad (18)$$

Знак производных $\rho_s^{/}$ по (17) и (18) при малых значениях *m* определяется членами *a*-го порядка по *m* независимо от членов более высокого порядка, т.е.

$$\rho_s'=\sum_{k=1}^{\alpha}\mu^k(-\varepsilon_{s1})^{\overline{M}_k^{(s)}}\overline{A}_{sk}<0\,, \qquad (19)$$

$$\rho_s^{/}=\sum_{k=1}^{\alpha}\mu^k\left(\varepsilon_{s2}\right)^{\overline{M}_k^{(s)}}\overline{A}_{sk}>0\,. \qquad (20)$$

Неравенства (19) и (20) показывают, что интегральные кривые секут кривые $\rho_{sk}^{\left(i_s^{(k)}\right)}+\varepsilon_{s1}$ снаружи внутрь, а кривые $\rho_{sk}^{\left(i_s^{(k)}\right)}-\varepsilon_{s2}$ – изнутри наружу.

Следовательно, на основании теоремы Бендиксона, можно сказать, что внутри замкнутых областей (14) находится, по крайней мере, по одному предельному значению ρ_s, соответствующему стационарному решению исходной системы.

Таким образом, нами доказано, что достаточным условием существования стационарных решений системы (1) или (3) по членам *a*-го порядка относительно *m* независимо от старших членов, является наличие набора из (11) нечетной кратности.

Рассмотрев набор корней, которые содержат неотрицательные вещественные корни из (11) системы (10) четной кратности, мы бы убедились, что найденные стационарные решения выбором членов, например, при $\mu^{\alpha+1}$ можно сохранить или уничтожить по желанию. Этим и доказывается необходимость условий теоремы.

В случае *a* = 1 (первое приближение) уравнения (10), (*), (13) упрощаются и принимают вид

$$-\sum_{\varepsilon=1}^{n}\frac{\partial u_{s1}^{\left(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)}\right)}(\theta_s,\tau)}{\partial\theta i}+A_{s1}^{\left(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)}\right)}(\theta_s,\tau)=g_{s1}^{\left(k_1^{(s)},\mathrm{K},k_n^{(s)}\right)}(\tau)$$

$$g_{s1}^{\left(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)}\right)}=\frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\!\!\ldots\!\int_0^{2\pi}A_{s1}^{\left(k_1^{(s)},\ldots,k_n^{(s)}\right)}(\theta_s,\tau)d\theta_1\ldots d\theta_n$$

$$\rho_s^{/}=\mu Q_{s1}^{\left(M_1^{(s)}\right)}(\rho_s)+\mu^2Q_{s2}^{\left(M_2^{(s)}\right)}(\rho_s,Q_s,\tau)+\ldots,$$

а стационарное решение независимо от членов второго и выше порядков по *m* определяется неотрицательными вещественными корнями нечетной кратности следующей системы алгебраических уравнений

$$Q_{s1}^{\left(M_1^{(s)}\right)}\left(\rho_1,\rho_2,\ldots,\rho_n,\tau^*\right)=0,\quad (s=1,2,\ldots,n)\,.$$

Итак, для системы (1) при некоторых ограничениях получены необходимые и достаточные условия существования решений и способы их построения.

Теперь исследуем устойчивость решений системы (1) *a*-го приближения, не привлекая к рассмотрению уравнения в вариациях. Для этого рассмотрим корни (17), удовлетворяющие теореме 1, и с их учетом перепишем (17) и (18) в следующем виде:

$$\rho_s'=\sum_{k=1}^{\alpha}\mu^k\left(-\varepsilon_{s1}\right)^{\widetilde{M}_k^{(s)}}\widetilde{A}_{sk}\left(\rho_{sk}^{\left(i_s^{(k)}\right)}+\varepsilon_{s1}\tau^*\right)+\mu^{\alpha+1}Q_{s,\alpha+1}\left(\rho_{sk}^{\left(i_s^{(k)}\right)}+\varepsilon_{s1},\theta_s,\tau^*,\mu\right), \qquad (21)$$

$$\rho_s^{/} = \sum_{k=1}^{\alpha} \varepsilon_{s2}^{\widetilde{M}_k^{(s)}} \widetilde{A}_{sk}\left(\rho_{sk}^{\left(i_s^{(k)}\right)} - \varepsilon_{s2}, \tau^*\right) + \mu^{\alpha+1} Q_{s,\alpha+1}\left(\rho_{sk}^{\left(i_s^{(k)}\right)} - \varepsilon_{s2}, \theta_s, \tau^*, \mu\right). \quad (22)$$

В (21) и (22) знаки $\widetilde{A}_{sk}\left(\rho_{sk}^{\left(i_s^{(k)}\right)} + \varepsilon_{s1}\right)$ и $\widetilde{A}_{sk}\left(\rho_{sk}^{\left(i_s^{(k)}\right)} - \varepsilon_{s2}\right)$ одинаковы, или оба положительны или оба отрицательны, так как $\widetilde{A}_{sk}$ должны сохранить постоянный знак согласно (20), в пределах (14). При достаточно малом значении m знак производных $\rho_s^{/}$ как в (21), так и в (22) определяется членами *a*-го порядка по μ независимо от членов $\mu^{\alpha+1}$ и выше.

Тогда, если $\widetilde{A}_{sk}\left(\rho_{sk}^{\left(i_k^{(s)}\right)} + \varepsilon_{s1}\right) > 0$, то $\rho_s' < 0$ и если $\widetilde{A}_{sk}\left(\rho_{sk}^{\left(i_s^{(k)}\right)} - \varepsilon_{s2}\right) < 0$, то $\rho_s' > 0$.

Если же $\widetilde{A}_{sk}\left(\rho_{sk}^{\left(i_s^{(k)}\right)} + \varepsilon_{s1}\right) < 0$, то $\rho_s' > 0$, а если $\widetilde{A}_{sk}\left(\rho_{sk}^{\left(i_s^{(k)}\right)} - \varepsilon_{s2}\right) > 0$, то $\rho_s' < 0$. Отсюда можно заключить, что при $\widetilde{A}_{sk}\left(\rho_{sk}^{\left(i_k^{(s)}\right)} + \varepsilon_{s1}\right) > 0$ стационарное решение устойчиво, а при $\widetilde{A}_{sk}\left(\rho_{sk}^{\left(i_s^{(k)}\right)}\right) < 0$ – неустойчиво. Эти условия можно выразить в виде теоремы.

Теорема 2. Если система (1) или (3) при значениях *m*, удовлетворяющих условию (9), такова, что соответствующие этой системе уравнения (10) имеют вещественные неотрицательные корни (13) нечетной кратности, равной $\overline{M}_k^{(s)}$, и если $\dfrac{d^{\overline{M}_k^{(s)}} Q_{sk}\left(\rho_s, \tau^*\right)}{d\rho_{sk}^{\overline{M}_k^{(s)}}} < 0$ при $\rho_s = \rho_{sk}^{\left(i_s^{(k)}\right)}$, то стационарные колебания, отвечающие корням (17) устойчивы.

Если же $\dfrac{dQ_{sk}^{\overline{M}_k^{(s)}}\left(\rho_s, \tau^*\right)}{d\rho_s^{\overline{M}_k^{(s)}}} > 0$ при $\rho_s = \rho_{sk}^{\left(i_s^{(k)}\right)}$, то неустойчивы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Каменков Г.В.* Избранные труды. Т. 1, 2. М.: Наука, 1971.

2. *Камматов К.К.* О колебаниях в некоторых существенно нелинейных системах // Журнал ДУ. 1971. № 6. Т. VII. С. 998-1106.

3. *Камматов К.К.* Устойчивость и колебания некоторых систем нелинейной механики. Алматы, 2005.

4. *Камматов К.К., Шамбилова Г.К., Махатова. В.В.* Необходимые и достаточные условия существования колебаний квазилинейных систем с медленно меняющимися коэффициентами // Докл. НАН РК. 2005. № 3. С. 17-23.

Резюме

Г. В. Каменков ұсынған әдісті негізге алып, ауқымды сызықты емес автономды дифференциалдық теңдеулер жүйесінің тербелісті шешімдерін тұрғызып, оның орнықтылық шартын жасақтайды.

Summary

In the given work the stability and fluctuations of essentially nonlinear independent systems with slowly changing factors with the help of G. V. Kamenkova's method is considered.

Поступила 3.05.06г.