УДК 532.5

С. Т. МУХАМБЕТЖАНОВ

О КОРРЕКТНОСТИ ОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕРАВНОВЕСНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

(Представлена академиком НАН РК Т. Ш. Кальменовым)

Исследована математическая модель неравновесной фильтрации, описывающей процесс вытеснения нефти полимерными растворами. Наличие активной примеси сводится к увеличению или уменьшению доли водной фазы в потоке. В одномерном случае с помощью автомодельных переменных рассматриваемая математическая модель изучена в работе [1]. В потоке активная примесь может находиться в трех состояниях: растворенной в воде, растворенной в нефти и адсорбированной на стенках поровых каналов.

1. Вывод уравнений. Введение дополнительного фактора (активной примеси) приводит к изменению системы уравнений двухфазной фильтрации, состоящей из уравнений баланса воды и нефти в потоке, закона фильтрации Дарси и условия капиллярного равновесия:

$$\frac{\partial}{\partial t}(m \cdot s \cdot \rho_1) + div(\rho_1 \cdot \vec{u}_1) = 0, \qquad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(m \cdot (1-s) \cdot \rho_2) + div(\rho_2 \cdot \vec{u}_2) = 0, \qquad (2)$$

$$\vec{v}_i = -k\frac{f_i}{\mu_i}\nabla p_i, \; i = 1,2, \qquad (3)$$

$$p_2 - p_1 = p_c(S), \qquad (4)$$

где m, ρ_i, μ_i, f_i, k и $p_c(s)$ – соответственно пористость среды, плотности фаз, вязкости жидкостей, относительные фазовые проницаемости, проницаемость среды и капиллярное давление. В уравнениях (1)–(4) все основные характеристики жидкостей и пористой среды при введении активной примеси меняются, и система не является замкнутой. Исходя из результатов работы [1] для замыкания модели добавляется следующее уравнение относительно концентрации с-активной примеси:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(m \cdot c \cdot s \cdot \rho_1 + m \cdot \varphi \cdot \rho_2 (1-s) + a(c)\right) =$$

$$= div\left(D \cdot \nabla c - c \cdot \vec{v}_1 \cdot \rho_1 - \varphi \cdot \vec{v}_2 \cdot \rho_2\right), \qquad (5)$$

где $j(c)$, $a(c)$ – соответственно массовые концентрации примеси в нефтяной фазе и адсорбированные примеси в единице объема пористой среды. В соотношении (5) при вытеснении нефти полимерными растворами функция $j(c)=0$, а функция $a(c)$, как правило, определяется через уравнение Ленгмюра или по закону Генри. Такое предположение не всегда оправданно. В частности, для мицеллярных растворов изотерма сорбции ПАВ в окрестности критической концентрации мицеллообразования c_* может быть немонотонной. Указанную трудность можно обойти введением следующей функции: $\chi(c) = 1$ при $c > c_*$, $\chi(c) = 0$ при $c < c_*$ и $\chi(c) \in [0,1]$ при $c = c_*$. Тогда функцию $a(x,t)$ можно определить из следующего уравнения:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \cdot (\chi(c) - a), \qquad (6)$$

где t – время прибывания каждой молекулы в адсорбционный центр.

Лемма 1. Пусть $u \in W_p^1(Q)$, Q – ограниченная область в R^k, $p > 1$, $A_\varepsilon = \{x \in Q \,|\, |u(x)| \le \varepsilon\}$. Тогда $\nabla u = 0$ п.в. в A_0.

Лемма 2. Пусть Q – ограниченная область в R^k, v_n, $v, g \in L_p(Q)$, $p > 1$, $\forall x \in Q \setminus A$, $\lim\limits_{n\to\infty} v_n(x) = f(x)$ и $\forall n \in N$, $|v_n(x)| \le g(x)$, где $mesA = 0$; $v_n \to v$ слабо в $L_p(Q)$. Тогда $v \ge f$ п.в. в Q.

2. Постановка задачи. Будем рассматривать фильтрационное течение с активной примесью в заданной конечной области W с кусочно-гладкой границей $\Gamma \equiv \partial\Omega$. В соответствии с различными видами граничных условий граница Γ может разбиваться на несколько связных компонентов Γ^i. Пусть $Q_T = \Omega \times [0,T]$,

$S_T^i = \Gamma^i \times [0,T]$, $\vec n$ – внешняя нормаль к границе Γ. Следуя результатам работы [3], систему (1)–(6) можно представить как

$$m \cdot \frac{\partial s}{\partial t} = div\left(K_0 \cdot a_1 \cdot \nabla s - b \cdot \vec v + \vec F\right), \quad (7)$$

$$div\left(K \cdot \nabla P + \vec f\right) = 0, \ -\vec v = K \cdot \nabla P + \vec f, \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(m \cdot c \cdot s + a) = div\left(D \cdot \nabla c - c \cdot \vec v\right), \quad (9)$$

$$\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \cdot (\chi(c) - a), \quad (10)$$

где m – пористость; $K = K_0(x)$ – тензор фильтрации для однородной жидкости; капиллярное давление обладает следующими свойствами: $\frac{\partial P_k}{\partial s} < 0$ и $\frac{\partial P_k}{\partial c} \le 0$, а $p = p_1 - \int \frac{\partial p_k}{\partial s}\frac{k_{02}}{k} d\xi + \rho_1 g h$ – приведенное давление, остальные коэффициенты и функции определяются из следующих соотношений:

$$k = k_{01}(s) + k_{02}(s), \ a_1 = -\frac{\partial p_k}{\partial s}\frac{k_{01}k_{02}}{k},$$

$$\vec F = K_1 \int \nabla \frac{\partial p_k}{\partial s}\frac{k_{02}}{k} d\xi, \quad (11)$$

$$K = K_1 + K_2 = kK_0 = (k_{01} + k_{02})K_0,$$

$$\bar f = K \int \nabla \frac{\partial p_k}{\partial s}\frac{k_{02}}{k} d\xi + K_2 \nabla p_k + K_2(\rho_2 - \rho_1)\vec g.$$

Требуется найти функции $\{s, p, \vec v, c, a\}$ – водонасыщенность, давление, скорость течения, концентрация активной примеси, функция адсорбции, определенные в Q_T, удовлетворяющие уравнениям (7)-(10), начальным

$$s|_{t=0} = s_0(x), \ c|_{t=0} = c_0(x), \ a|_{t=0} = a_0(x) \quad (12)$$

и граничным условиям

$\vec v \vec n = \vec v_1 \vec n = 0$ – условие непротекания

и $c(x,t) = 0$ при $(x,t) \in S^0 = \Gamma^0 \times [0,T]$ (13)

$$p = p_0(x,t),$$

$$s = s_0(x,t), -D \cdot \frac{\partial c}{\partial n} + \vec v_{1n} \cdot c = \vec v_{1n} \cdot \tilde c$$

$$\text{при } (x,t) \in S^2 = \Gamma^2 \times [0,T], \quad (14)$$

$$-(K\nabla p + \vec f)\vec n \equiv \vec v \vec n = R(x,t), (x,t) \in S^1 = \Gamma^1 \times [0,T],$$

$$-(K_0 a_1 \nabla s + K_1 \nabla p + \vec f_0)\vec n \equiv \vec v_1 \vec n = bR(x,t), (x,t) \in S^1. \quad (15)$$

$$-D \cdot \frac{\partial c}{\partial n} + \vec v_{1n} \cdot c = q_n \cdot c^*$$

$$\text{при } (x,t) \in S^1 = \Gamma^1 \times [0,T],$$

где q_n – заданный расход на единицу площади; $\tilde c$ и c^* – известные значения концентрации примеси.

Далее всюду предполагается, что все коэффициенты в системе уравнений (7)–(10) опре-делены при всех (x,s,c) и имеют непрерывные производные вплоть до первого порядка.

В дальнейшем систему уравнений (7)–(10) с дополнительными условиями (12) – (15) будем называть задачей 1.

Определение. Ограниченные измеримые в Q_T функции $s(x,t)$, $p(x,t)$, $c(x,t)$, $a(x,t)$ назовем обобщенным решением задачи 1, если:

а) $0 \le s(x,t) \le 1$, $0 \le c(x,t)$, $0 \le a(x,t) \le 1$ почти всюду в Q_T;

б) $\nabla p \in L_{2,\infty}(Q_T)$, $a_1 \cdot \nabla s \in L_2(Q_T)$, $D \cdot \nabla c \in L_2(Q_T)$;

в) a_t, $a \in L_\infty(Q_T)$;

г) на S^2 выполняются граничные условия (14);

д) для произвольных допустимых функций, таких, что

$$\varphi(x,t), \ v(x,t) \in W_2^{1,1}(Q_T), \ \psi(x) \in W_2^1(\Omega),$$

$$\varphi(x,t)\big|_{S^2} = v(x,t)\big|_{S^2} = \Psi(x)\big|_{S^2} = 0,$$

при почти всех $t \in [0,T]$ выполняются равенства

$$\Im_1 \equiv (ms, \varphi_t)_{Q_t} + (\vec v_1, \nabla\varphi)_{Q_t} = (bR, \varphi)_{S_t^1} - (ms, \varphi)_\Omega\Big|_0^t, \quad (16)$$

$$\Im_2 \equiv (\vec v, \nabla\psi)_\Omega = (R, \psi)_{\Gamma^1}, \quad (17)$$

$$\Im_3 \equiv (m \cdot s \cdot c + a, v_t)_{Q_t} + (D \cdot \nabla c - c \cdot \vec v_1, \nabla v)_{Q_t} = (v_{1n} \cdot \tilde c, v)_{S_t^1} - (m \cdot s \cdot c + a, v)_\Omega\Big|_0^t. \quad (18)$$

Замечание 1. Всюду далее считается, что в области течения отсутствуют застойные зоны, в которых достигаются предельные значения s=0,1. Задачу 1 в этом случае будем называть регулярной, т.е. $a_1 \geq \delta > 0$, а ее решения – регулярными. Такое определение введено в работе [2].

Замечание 2. В области $E_c = \{(x,t) \in \in Q_T | c(x,t) = c_*\}$ выполняются равенства (см. лемму 1). Тогда из уравнений (9), (10) выводится $\chi[c(x,t)] = a(x,t)$ для п.в. в $(x,t) \in E_c$ и из определения функции $c(c)$ следует, что $0 \leq a(x,t) \leq 1$ для п.в. $(x,t) \in E_c$. Здесь и далее обозначения норм и пространств функций совпадают с обозначениями в [2].

1п. Существование. Функция $c(c)$ аппроксимируется непрерывными монотонными функциями $\chi_n(c)$, совпадающими с $c(c)$ при $c > c_* + \frac{1}{n}$, $c < c_*$, n = 1,2,.... Через $(7)_n$–$(10)_n$ обозначаются система уравнений (7) – (10), где вместо функции $c(c)$ рассматривается функция $\chi_n(c)$. Тогда задача 1 решается в следующей последовательности: эллиптическая задача относительно давления, затем нелинейные параболические задачи относительно насыщенности $s(x,t)$ и с использованием теоремы Шаудера о неподвижной точке концентрация активной примеси $c(x,t)$ с функцией

$$a(x,t) = a_0(x) \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} + \int_0^t \chi_n(g(x,\zeta)) \cdot e^{\frac{\zeta - t}{\tau}} d\zeta, \tag{19}$$

причем $c(x,t) = \Lambda(g(x,t))$, где $\Lambda : W_2^{1,1}(Q_T) \to \to W_2^{1,1}(Q_T)$ – оператор, неподвижная точка которого дает решение задачи 1. При этом имеет место следующая

Теорема 1. Пусть коэффициенты в системе уравнений имеют непрерывные производные вплоть до первого порядка и дополнительно

$$\left(\|p_0\|_{\infty,Q_t}; \sup_t \|p_0\|_{W_2^1(\Omega)}; \|s_{0_t}\|_{1,Q_T}; \|\nabla s_0\|_{2,Q_T}; \right.$$
$$\left. \|\varepsilon_t\|_{1,Q_T}; \|\nabla c_0\|_{2,Q_T} \right) \leq M;$$

$a_0(x)$ измерима и $0 \leq a(x,t) \leq 1$, $x \in \Omega$.

Тогда существует одно обобщенное решение задачи 1 (в смысле выполнения определения 1) и функции $s(x,t)$, $c(x,t)$ и $a(x,t)$ удовлетворяют п.в. в Q_T неравенствам

$$0 < \delta_0 \leq \min s_0(x,t) \leq s(x,t) \leq$$
$$\leq \max s_0(x,t) \leq 1 - \delta_1 < 1, \tag{20}$$

$$0 \leq c(x,t) \leq 1, \ 0 \leq a(x,t) \leq 1, \ |a_t| \leq 1. \tag{21}$$

Доказательство. Оценка (19) и первое неравенство в (21) являются следствием принципа максимума, а второе неравенство в (21) следует из представления (18). Существование решения задачи 1 относительно функций (s,p) полностью повторяет рассуждения из [2], т.е. приближенные решения вспомогательной задачи 1 ищутся в виде

$$s^n(x,t) = \sum_{k=1}^N \tilde{a}_k^N(t) \cdot \varphi_k(x) + s_0(x,t), \tag{22}$$

$$p^n(x,t) = \sum_{k=1}^N \tilde{b}_k^N(t) \cdot \psi_k(x) + p_0(x,t). \tag{23}$$

Аналогичное представление имеет место для функции $c(x,t)$:

$$c^N(x,t) = \sum_{k=1}^N d_k^N(t) \cdot v_k(x) + \tilde{c}(x,t), \tag{24}$$

где фундаментальные в $W_2^1(\Omega, \Gamma^2) = \{\varphi(x), v(x) \in \in W_2^1(\Omega), \varphi(x) = v(x) = 0, x \in \Gamma^2\}$ системы функций φ_k, v_k и ψ_k нормированы следующим образом: $(m\varphi_k, \varphi_i) = \delta_{ik}$, $(mv_k, v_i) = \delta_{ik}$, $(\nabla\psi_k, \nabla\psi_i) = \delta_{ik}$, где δ_{ik} – символы Кронекера. Для определения неизвестных функций $\tilde{a}_k^N(t)$, b_k^N, $d_k^N(t)$ получаем нелинейную эволюционно-стационарную систему уравнений

$$\frac{d\tilde{a}_k^N}{dt} = \sum_{j=1}^N \tilde{a}_j^N \cdot \alpha_{jk} + \beta_k, \tilde{a}_k^N(0) = 0, \tag{25}$$

$$\sum_{j=1}^N b_j^N \cdot \mu_{jk} + \lambda_k = 0, \tag{26}$$

$$\frac{dd_k^N}{dt} = \sum_{j=1}^N d_j^N \cdot \gamma_{jk} + \aleph_k, d_k^N(0) = 0$$

(27)

в которой

$$\alpha_{jk}=-\left(K_0\cdot\bar{a}_1\cdot\nabla\varphi_j,\nabla\varphi_k\right)_\Omega+\left(b\cdot\vec{v},\nabla\varphi_k\right)_\Omega;$$

$$\beta_k=-\left(ms_{0_t},\varphi_k\right)_\Omega+\left(\vec{F},\nabla\varphi_k\right)_\Omega-$$

$$-\left(K_0\cdot\bar{a}_1\cdot\nabla s_0,\nabla\varphi_k\right)_\Omega;$$

$$\mu_{jk}=\left(K\cdot\nabla\psi_j,\nabla\psi_k\right)_\Omega;$$

$$\lambda_k=\left(\vec{f},\nabla\psi_k\right)_\Omega-\left(R,\psi_k\right)_{\Gamma^2};$$

$$\gamma_{jk}=-\left(D\cdot\nabla v_j,\nabla v_k\right)_\Omega+\left(\vec{v}_1\cdot v_j,\nabla v_k\right)_\Omega-$$

$$-\left(m\cdot\bar{s}_t\cdot v_j,v_k\right)_\Omega+\frac{1}{\tau}\left(a-p(g),v_k\right)_\Omega;$$

$$\aleph_k=-\left(m\cdot\bar{s}\cdot\tilde{c}_t,v_k\right)_{\Gamma^2}-\left(D\cdot\nabla\tilde{c},\nabla v_k\right)_\Omega+$$

$$+\left(\tilde{c}\cdot\vec{v}_1,\nabla v_k\right)_{\Gamma^2}.$$

Разрешимость задач (25)–(27) следует из сделанных предположений на коэффициенты этой вспомогательной системы, т.е. функции $\mu_{jk},\lambda_k,\gamma_{jk}$ ограничены, а $\beta_k,\aleph_k$ – интегрируемые функции по $t\in[0,T]$ при всех значениях $\tilde{a}_k^N$, b_k^N, d_k^N. Сначала решается (26) для определения b_k^N в каждый момент времени из нелинейной системы алгебраических уравнений. Затем решается задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений (25) и (27) для определения функций $\tilde{a}_k$ и d_k^N соответственно. Последнее утверждение в силу указанных выше свойств коэффициентов система уравнений разрешима для всех $t\in[0,T]$, и решения принадлежат пространству $W_2^1(0,T)$. Следовательно, при каждом N на интервале (0,T) существует единственное решение задачи Коши при $k = 1,2,...,N$. Тогда, следуя результатам работ [2, 4], легко получить равномерные по N оценки приближенных решений, позволяющие совершить предельный переход при N®Θ. Таким образом, полученное решение определяет в $W_2^{1,1}(Q_T)$ некоторое выпуклое, ограниченное подмножество, которое оператор L переводит в себя. Так как L вполне непрерывный, то по теореме Шаудера существует неподвижная точка оператора L, которая и дает решение задачи 1_n. Обозначим его через $\{s_n,p_n,c_n,a_n\}$.Тогда в силу априорных оценок для $\{s_n,p_n,c_n,a_n\}$ и ограниченность $\chi_n(c_n)$ позволяют выделить подпоследовательность n_k, такую, что $\{s_{n_k},p_{n_k},c_{n_k},a_{n_k}\}\to\{s,p,c,a\}$ п.в. в Q_T,

$$\frac{\partial s_{n_k}}{\partial t}\to\frac{\partial s}{\partial t},\qquad \frac{\partial c_{n_k}}{\partial t}\to\frac{\partial c}{\partial t},\qquad \nabla s_{n_k}\to\nabla s,$$

$\nabla c_{n_k}\to\nabla c$, $\nabla p_{n_k}\to\nabla p$, слабо в $L_2(Q_T)$, $a_{n_k}\to a$, $\dfrac{\partial a_{n_k}}{\partial t}\to\dfrac{\partial a}{\partial t}$, $\chi_{n_k}(c_{n_k})\to h$ слабо в $L_\infty(Q_T)$. Из определения функции χ_n и сходимости c_{n_k} к c п.в. в Q_T, следует, что $h(x,t)=\chi(c)$ п.в. в $Q_T\setminus E_c$, а также из леммы 2 на множестве E_c функция $h(x,t) = a(x,t)$. Окончательно, переходя к пределу в интегральных тождествах, аналогичным (16)–(18), получаем искомое решение задачи 1.

2п. Устойчивость и единственность решений.

Теорема 2. Пусть выполнены условия (а)–(д) из определения и граница $\Gamma\equiv\partial\Omega\in H_*^1$, $\{s_j,p_j,\vec{v}_j,c_j,a_j\}$ – обобщенные решения регулярных задач 1 соответственно с начальными и граничными функциями вида (12) – (15), $j = 1,2$, и такие, что $\left(\|\nabla s_j\|_{\alpha_1,\beta_1,Q_T};\|\nabla p_j\|_{\alpha_2,\beta_2,Q_T};\|R_j\|_{\alpha_0,\beta_0,\Gamma''}\right)\le\ \le M$ и данные удовлетворяют условиям (11), то для $s = s_1-s_2$, $p = p_1-p_2$, $c = c_1-c_2$, $a = a_1-a_2$, $\left(\|s;p\|_{V_2(Q_T)}\right)\le C_0\cdot\mu$; $\left(\|\nabla s;\nabla p\|_{q,Q_T}\right)\le C_0\cdot\mu^{1-\gamma}$;

$$\|c\|_{q,Q_T}^{(2)}\le C_1\cdot\lambda^{1/q},\quad \|a_t\|_{p,Q_T}+\|a\|_{p,Q_T}\le C_2\cdot\lambda^{1/p}.$$

Здесь $\mu=\left(\|s_0\|_{V_2(Q_T)}+\|c_0\|_{V_2(Q_T)}+\|p_0\|_{V_2(Q_T)}+\right.$ $\left.+\|R\|_{\alpha_0,\beta_0,\Gamma^1}+\|a_0\|_{V_2(Q_T)}+\|s_{0t}\|_{2,Q}+\|a_{0t}\|_{V_2(Q_T)}\right)$, $1\le p<\infty$, константы C_0, C_1, C_2 зависят от $\alpha_i,\beta_i,T,\Omega$ и от норм данных.

Доказательство теоремы следует из результатов работ [2, 4]. При этом составляются интегральные тождества вида (16)–(17). Вычитая соответствующие тождества для $j = 1$ и $j = 2$

друг из друга, с помощью интерполяционных неравенств получаем необходимые оценки. Далее легко получается единственность решения, для этого необходимо поставить вместо данных $s_0 = p_0 = R = a_0 = 0$ и воспользоваться свойствами коэффициентов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жумагулов Б.Т., Мухамбетжанов С.Т., Шыганаков* Н.А. Моделирование вытеснения нефти с учетом массообменных процессов. Алматы: Ғылым, 2004. 232 с.

2. *Антонцев С.Н., Кажихов А.В.,Монахов В.Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983. 319 с.

3. *Мейрманов А.М.* Задача Стефана. Новосибирск: Наука, 1986. 237 с.

4. *Калиев И.А., Разинков Е.Н.* О задаче Стефана с фазовой релаксацией // Динамика сплошной среды. 1989. Вып. 91. С. 21-36.

Резюме

Салмақсыз сүзгілеу теориясының бір есебінің шешімділігі қарастырылған. Қазіргі заманда жиі қолданылатын функционалдық талдау әдістері арқылы шешімнің бар болуын, қосымша есептің берілгендеріне үзіліссіз байланыстылығы мен шешімнің жалғыздығы дәлелденіп көрсетілген.

Summary

In the present job the correctness of one problem of a nonequilibrium filtration is investigated. On the basis of modern methods of the functional analysis the theorem of existence of the solution of a considered problem is proved, the continuous dependence on the data and uniqueness of the solution is shown.

Казахский национальный
педагогический университет
им. Абая

Поступила 25.09.06г.