М. А. САДЫБЕКОВ, А. М. САРСЕНБИ

НОВОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Предлагаются и обосновываются новые формулы для построения цепочек присоединенных функций несамосопряженных уравнений.

*1. **Введение.*** Центральное место в спектральной теории дифференциальных операторов занимает вопрос о разложимости произвольной функции в биортогональный ряд по собственным и присоединенным функциям дифференциальных операторов. Если система собственных функций самосопряженного оператора с точечным спектром всегда образует ортонормированный базис, то система собственных функций несамосопряженного оператора может оказаться даже неполной. Тогда приходится их дополнять так называемыми присоединенными функциями при их наличии.

В теории линейных функциональных уравнений [1, с. 179] совокупность N_l всех векторов f, которые при каком-нибудь натуральном m удовлетворяют уравнению

$$(A - lE)^m f = 0,$$

(где A – вполне непрерывный оператор в гильбертовом пространстве; l – собственное значение оператора A), называют корневым подпространством оператора A, соответствующим собственному значению l, а каждый элемент f названного подпространства N_l называют корневым вектором. Собственные и присоединенные вектора оператора А являются корневыми векторами, т.е. для каждого собственного значения l в корневом подпространстве N_l можно выбрать базис из собственных и присоединенных элементов, который состоит из цепочки функций $f_0, f_1, \ldots, f_k$, таких, что справедливы равенства

$$Af_0 = \lambda f_0, \;\; Af_1 = \lambda f_1 + f_0, \ldots, \; Af_k = \lambda f_k + f_{k-1}.$$

Замечание 1. Хорошо известно, что система собственных и присоединенных функций определяется неоднозначно, так как если f_0 – собственная функция, а f_k – соответствующая ей присоединенная функция порядка $k \geq 1$, то $c \cdot f_0$ также является собственной функцией, а $f_k + c_k f_0$ является присоединенной функцией, соответствующими тому же собственному значению, где c_k – некоторая постоянная.

2. Анализ способов построения присоединенных функций. В известных работах [2, 3] М. В. Келдыша была построена теория присоединенных функций и доказана полнота системы собственных и присоединенных функций широкого класса несамосопряженных дифференциальных уравнений.

Согласно теории присоединенных функций М. В. Келдыша цепочки присоединенных функций несамосопряженного обыкновенного дифференциального уравнения порядка n строятся следующим образом [4, с. 27].

Пусть коэффициенты линейного дифференциального выражения

$$\lambda(y) = p_0(x,\lambda)y^{(n)} + p_1(x,\lambda)y^{(n-1)} + \dots +$$
$$+ p_{n-1}(x,\lambda)y' + p_n(x,\lambda)y,$$

заданного на интервале $[a,b]$, и коэффициенты линейных форм, порождающих краевые условия,

$$U_v(y) = \alpha_{v0}(\lambda)y_a + \alpha_{v1}(\lambda)y'_a + \dots + \alpha_{v,n-1}(\lambda)y_a^{(n-1)} +$$
$$+ \beta_{v0}(\lambda)y_b + \beta_{v1}(\lambda)y'_b + \dots + \beta_{v,n-1}(\lambda)y_b^{(n-1)};$$
$$v = 1,2,\dots,n$$

являются аналитическими функциями параметра l. Если рассмотреть обобщенную задачу на собственные значения

$$l(y) = 0,\ U_v(y) = 0,\ v = 1,2,\dots,n,$$

и предположить, что l_0 – собственное значение, а $\varphi_0(x)$ – соответствующая собственная функция этой задачи, то систему функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_k(x)$ называют цепочкой функций, присоединенных к собственной функции $j(x)$, при условии, что функции $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_k(x)$ удовлетворяют при $l=l_0$ дифференциальным уравнениям

$$\lambda(\varphi_q) + \frac{1}{1!}\frac{\partial\lambda}{\partial\lambda}(\varphi_{q-1}) + \dots + \frac{1}{q!}\frac{\partial^q\lambda}{\partial\lambda^q}(\varphi_0) = 0,$$
$$q = 0,\dots,k, \tag{1}$$

и краевым условиям

$$U_v(\varphi_q) + \frac{1}{1!}\frac{\partial U_v}{\partial\lambda}(\varphi_{q-1}) + \dots + \frac{1}{q!}\frac{\partial^q U_v}{\partial\lambda^q}(\varphi_0) = 0,$$
$$q = 0,\dots,k;\ v = 1,2,\dots,n. \tag{2}$$

В частности, если коэффициенты линейных форм U_v не зависят от l, а дифференциальное выражение $\lambda(y)$ имеет вид $\lambda(y) = (L - \lambda E)y$, то собственные и присоединенные функции будут построены по формулам

$$L\varphi_0 = \lambda_0\varphi_0,\ L\varphi_1 = \lambda_0\varphi_1 + \varphi_0,\ \dots,$$
$$L\varphi_q = \lambda_0\varphi_q + \varphi_{q-1}, \tag{3}$$

которые вытекают из формул (1) и (2).

Формула (3) является бесконечномерным аналогом хорошо известной формулы нахождения присоединенных векторов конечномерной матрицы.

Однако при дальнейшем использовании формулы (3) для исследования свойств системы собственных и присоединенных функций ряда задач, исследователи сталкиваются с определенными неудобствами. Остановимся на этом подробнее.

Недостатки формул (1) были обнаружены на следующем после полноты этапе исследования несамосопряженных дифференциальных уравнений В. А. Ильиным [5].

После установления полноты системы собственных и присоединенных функций естественным образом возникает актуальный для приложений вопрос о возможности разложения по этой системе произвольной функции из некоторого класса. Может оказаться, что в случае, когда общее число присоединенных функций является бесконечным, полная и минимальная система собственных и присоединенных функций будет базисом при одном выборе присоединенных функций (т.е. при одном выборе констант c_k из замечания 1) и перестает быть базисом при другом выборе присоединенных функций (т.е. при другом выборе констант c_k из замечания 1). Так, в случае несамосопряженной (за счет краевых условий) регулярной (но не усиленно регулярной) краевой задачи, рассмотренной В.А.Ильиным [5],

$$-u''(x) = \lambda u(x),\ u(0) = 0,\ u'(0) = u'(1),$$

система собственных и присоединенных функций

$$\{x,\ \ \sin 2k\pi x,\ \ -x(4k\pi)^{-1}\cos 2k\pi x + c\sin 2k\pi x\},$$

является базисом в $L_2(0,1)$ только при $c = 0$.

В этой связи в математической литературе встречается термин «при специальном выборе присоединенных функций» [5, 6].

Это обстоятельство побудило В. А. Ильина [7] ввести понятие приведенной системы собственных и присоединенных функций, которая обладает свойством базисности всякий раз, если только существует хотя бы один выбор присоединенных функций, обеспечивающей базисность всей системы собственных и присоединенных функций. В. А. Ильиным указан конструктивный метод построения приведенной системы собственных и присоединенных функций общего несамосопряженного обыкновенного дифференциаль-ного оператора и доказаны необходимые и достаточные условия ее базисности.

Неудобство использования формулы (3) нахождения присоединенной функции обнаруживается также и при исследовании степеней оператора, и при совместном рассмотрении прямого и обратного операторов.

Если рассмотреть степени оператора L, то соответствующие собственным функциям представления, имеют следующий вид:

$$Lu_{k0} = \lambda_0 u_{k0},\ L^2 u_{k0} = \lambda_k^2 u_{k0},\ L^3 u_{k0} = \lambda_k^3 u_{k0},$$

а для присоединенных функций u_{kj} из (3) получаем следующую картину

$$Lu_{kj} = \lambda_k u_{kj} + u_{k,j-1}, \quad j \ge 1;$$

$$L^2 u_{kj} = \lambda_k^2 u_{kj} + 2\lambda_k u_{k,j-1} + u_{k,j-2}, \quad j \ge 1; \quad (4)$$

$$L^3 u_{kj} = \lambda_k^3 u_{kj} + 3\lambda_k^2 u_{k,j-1} + 3\lambda_k u_{k,j-2} + u_{k,j-3}, \quad j \ge 1.$$

В случае обратного оператора L^{-1} из формул (3) получаются такие соотношения:

$$L^{-1} u_{k0} = \frac{1}{\lambda_k} u_{k0},\ L^{-1} u_{k1} = \frac{1}{\lambda_k} u_{k1} - \frac{1}{\lambda_k^2} u_{k0},$$

$$L^{-1} u_{k2} = \frac{1}{\lambda_k} u_{k2} - \frac{1}{\lambda_k^2} u_{k1} + \frac{1}{\lambda_k^3} u_{k0},\ \ldots,$$

$$L^{-1} u_{kj} = \frac{1}{\lambda_k} u_{kj} - \frac{1}{\lambda_k^2} u_{kj-1} + \ldots + \frac{(-1)^j}{\lambda_k^{j+1}} u_{k0}. \quad (5)$$

Как видим, соответствующие формулы нахождения присоединенных функций для операторов L, L^2, L^3, L^{-1} не идентичны в смысле порядка коэффициентов по l.

3. Новое определение присоединенных функций. На основании изложенного анализа применения формул (3) для построения цепочек присоединенных функций несамосопряженных дифференциальных уравнений предлагаются и обосновываются новые формулы для определения присоединенных функций дифференциального оператора L (с вполне непрерывным обратным оператором L^{-1}):

$$Lu_0 = \lambda_0 u_0,\ L\,u_1 = \lambda_0(u_1 + u_0),$$

$$L\,u_2 = \lambda_0(u_2 + u_1),\ \ldots,\ L\,u_k = \lambda_0(u_k + u_{k-1}), \quad (6)$$

где l_0 – собственное значение.

Применение формул (6) для определения присоединенных функций не меняет свойства полноты, минимальности систем собственных и присоединенных функций, которыми они обладали при построении присоединенных функций по формулам (3).

При применении формул (6) соотношения (4) и (5) примут следующий вид:

$$Lu_{kj} = \lambda_k(u_{kj} + u_{k,j-1}), \quad j \ge 1;$$

$$L^2 u_{kj} = \lambda_k^2(u_{kj} + 2u_{k,j-1} + u_{k,j-2}); \quad (4Ұ)$$

$$L^3 u_{kj} = \lambda_k^3(u_{kj} + 3u_{k,j-1} + 3u_{k,j-2} + u_{k,j-3}),$$

а в случае обратного оператора L^{-1}

$$L^{-1} u_{k0} = \frac{1}{\lambda_k} u_{k0},\ L^{-1} u_{k1} = \frac{1}{\lambda_k}(u_{k1} - u_{k0}),$$

$$L^{-1} u_{k2} = \frac{1}{\lambda_k}(u_{k2} - u_{k1} + u_{k0}),\ \ldots,$$

$$L^{-1} u_{kj} = \frac{1}{\lambda_k}(u_{kj} - u_{kj-1} + \ldots + (-1)^j u_{k0}).$$

(5Ұ)

Сравнивая формулы (4), (5) с соответствующими формулами (4Ұ) и (5Ұ), легко заметить разницу в порядках по l. Эта разница играет существенную роль в теории антиаприорных оценок в смысле В.А.Ильина [8]. Как показали наши другие исследования, формулы (4Ұ) и (5Ұ) являются гораздо более удобными для использования, чем (4) и (5).

При применении формул (6) для нахождения присоединенных функций указанного выше эффекта нарушения свойства базисности в зависимости от выбора присоединенных функций не возникает. Более того, справедлива следующая теорема.

Теорема. Пусть u_{k0} – собственные функции, а u_{k1} – присоединенные функции, построенные по формулам (6) дифференциального оператора L с вполне непрерывным обратным оператором L^{-1} и пусть система $\{u_{k0}, u_{k1}\}$ образует безусловный базис пространства L_2. Тогда для безусловной базисности в L_2 системы $\{u_{k0}, u_{k1} + c_k u_{k0}\}$ необходимо и достаточно выполнение неравенства

$$\| u_{k0} \|_{L_2} \le \| u_{k1} \|_{L_2} \qquad (7)$$

для всех номеров k.

Неравенства (7) принято называть антиаприорными оценками.

Замечание 2. В случае регулярного оператора Шредингера

$$Lu = -u'' + q(x)u, \; x \in G, \quad |G| < \infty, \qquad (8)$$

порожденного какими-нибудь краевыми условиями, конкретный вид которых не имеет особого значения, для присоединенных функций, определенных по формулам (3), антиаприорные оценки имеют следующий вид [9, 10]:

$$\| u_{k,j-1} \|_{L_2(G)} \le c_0 \, |\sqrt{\lambda}| \cdot \| u_{k,j} \|_{L_2(G)}, \qquad (9)$$

при условии $|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}| \le const$ и $q(x) \in L_1(G)$, если же присоединенные функции определять по формулам (6), то при тех же условиях антиаприорные оценки (9) примут вид

$$\| u_{k,j-1} \|_{L_2(G)} \le c_1 \cdot \| u_{k,j} \|_{L_2(G)}.$$

Таким образом, для регулярного оператора Шредингера оценки (7) всегда выполнены, если только $|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}| \le const$ и $q(x) \in L_1(G)$ и в силу приведенной теоремы система собственных и присоединенных функций образует безусловный базис при любом выборе коэффициентов c_k, если она является базисом хотя бы при одном выборе c_k.

Именно инвариантность свойств базисности при произвольном выборе системы собственных и присоединенных функций и является основным преимуществом при использовании нового определения присоединенных функций.

Следует отметить, что на улучшение свойств базисности собственных и присоединенных функций при использовании определения вида $Lu_{kj} = \lambda_k u_{kj} + \sqrt{\lambda_k} u_{kj-1}$ указывается в работах В. А. Ильина [11], Н. И. Ионкина [12].

Замечание 3. Оценки (7) имеют место для диссипативных операторов [13, с. 418], если присоединенные функции определены по формулам (6).

Из сделанных замечаний и приведенной теоремы вытекают следующие следствия.

Следствие 1. Если система собственных и присоединенных функций $\{u_{k0}, u_{k1}\}$ оператора Шредингера (8) определена по формулам (6) и образует безусловный базис пространства L_2(G), то любая другая система собственных и присоединенных функций вида $\{u_{k0}, u_{k1} + c_k u_{k0}\}$ того же оператора также образует безусловный базис в $L_2(G)$.

Следствие 2. Если система собственных и присоединенных функций диссипативного оператора определена по формулам (6) и образует безусловный базис при каком-нибудь одном выборе присоединенных функций, то это свойство базисности сохраняется при любом другом выборе присоединенных функций.

Важно отметить, что использование нового определения не улучшает спектральной сущности задачи, а лишь дает удобную для использования формулу определения присоединенной функции. Так, если система собственных и присоединенных функций по определению (3) образует базис, хотя бы при одном выборе коэффициентов c_k из замечания 1, то собственные и присоединенные функции по новому определению (6) образует базис при каждом выборе c_k. Наоборот, если собственные и присоединенные функции по определению (3) не образуют базиса ни при каком выборе коэффициентов c_k из замечания 1, то и система собственных и присоединенных функ-ций, построенных по новому определению (6), также не обладает свойством базисности.

В заключение авторы выражают глубокую благодарность акад. НАН РК М. О. Отелбаеву, акад. НАН РК Т. Ш. Кальменову, проф. Б. Е. Кангужину за ценные советы, обсуждение результатов и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ахиезер Н.И., Глазман И.М.* Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. М., 1966. 544 с.

2. *Келдыш М.В.* О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // ДАН СССР. 1951. Т. 77, № 1. С. 11-14.

3. *Келдыш М.В.* О полноте собственных и присоединенных функций некоторых классов несамосопряженных линейных операторов // Успехи математических наук. 1974. Т. 26, вып. 4. С. 15-41.

4. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969. 528 с.

5. *Ильин В.А.* О существовании приведенной системы собственных и присоединенных функций у несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора // Тр. МИАН СССР. 1976. Т. 142. С. 148-155.

6. *Кангужин Б.Е.* Формулы преобразования и спектральные свойства дифференциальных операторов высших порядков на отрезке: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. Алматы, 2005. 181 с.

7. *Ильин В.А.* О связи между видом краевых условий и свойствами базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом разложений по корневым функциям несамосопряженного дифференциального оператора // Дифференциальные уравнения. 1994. Т. 30, № 9. С. 1516-1529.

8. *Ильин В.А.* Необходимые и достаточные условия базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом спектральных разложений. I, II // Дифференциальные уравнения. 1980. № 5. С. 777-794; № 6. С. 981-1009.

9. *Тихомиров В.В.* Точные оценки регулярных решений одномерного уравнения Шредингера со спектральным параметрам // ДАН СССР. 1983. Т. 273, № 4. С. 807-810.

10. *Ломов И.С.* Некоторые свойства собственных и присоединенных функций оператора Штурма-Лиувилля // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18, № 10. С. 1684-1694.

11. *Ильин В.А.* Необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых векторов разрывных операторов второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1986. Т. 22, № 12. С. 2059-2071.

12. *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. М., 1977. Т. 13, № 2. С. 294-304.

13. *Гохберг И.Ц., Крейн Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М., 1965. 448 с.

Резюме

Өз-өзіне түйіндес емес теңдеулердің меншікті функцияларына қосымша алынған функциялар тізбекшесін құруға арналған жаңа формулалар ұсынылылып отыр және мұндай формулалардың қажеттілігі негізделген.

Summary

This article offers and maintaines New formulas for building Lines of the united functions non-self-conjugacy of equations.

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, г. Шымкент

Поступила 2.06.06г.