УДК 517.927.25

А. М. САРСЕНБИ

О БЕЗУСЛОВНОЙ БАЗИСНОСТИ СИСТЕМ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ НЕКЛАССИЧЕСКОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ

В данной работе устанавливается базисность Рисса систем собственных и присоединенных функций краевой задачи

$$-u''(x) = \lambda u(-x), \ -1 \le x \le 1, \qquad (1)$$

с краевыми условиями

$$u(-1) = 0, \ u'(1-) = u(1). \qquad (2)$$

Эта задача показывает, что при рассмотрении дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом типа (1) некоторые задачи обладают более хорошими спектральными свойствами с точки зрения базисности систем корневых векторов по сравнению с обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Если рассмотреть краевую задачу

$$-u''(x) = \lambda u(x), \ u(0) = 0, \ u'(0) = u(1), \qquad (3)$$

где $0 \le x \le 1$, с нерегулярными в смысле Биркгофа [1. С. 66] краевыми условиями, изучавшуюся Гофманом [2], то можно обнаружить, что все собственные значения краевой задачи (3) являются простыми и система собственных функций не образует базиса в $L_2\,[0,1]$. Эта задача приводит к уравнению на собственные значения вида

$$\mu_k = \sin \mu_k,$$

где $\mu_k^2 = \lambda_k$. Решения этого уравнения имеют следующую асимптотику:

$$\mu_0 = 0,$$

$$\mu_{2k+1} = \pi\left(2k + \frac{1}{2}\right) - i \ln \pi(4k+1) + O\left(\frac{\ln k}{k}\right),$$

$$\mu_{2k+2} = \pi\left(2k + \frac{1}{2}\right) + i \ln \pi(4k+1) + O\left(\frac{\ln k}{k}\right),$$

$$k = 0,1,2,...$$

Соответствующими собственными функциями служат функции

$$u_0(x) = 6x, \ u_k(x) = c_k \sin \mu_k(x),$$

а биортогонально сопряженной системой является система функций

$$\overline{\upsilon_0}(x) = 1 - x, \ \overline{\upsilon_k}(x) = \sin \mu_k (1-x), \ k = 1,2,...,$$

так, что для этой пары систем выполняется соотношение

$$(u_i, \upsilon_j) = \delta_{i,j},$$

при этом коэффициенты c_k в представлении функции $u_k(x)$ выбираются из последнего условия.

Как видно из явного вида собственных значений, собственные значения краевой задачи (3) не принадлежат так называемой параболе Карлемана, т.е. не выполнены неравенства

$$\left|\operatorname{Im} \mu_k\right| \le const.$$

В данном случае мнимая часть корня из собственных значений имеет логарифмический рост.

Вопросы суммируемости спектральных разложений по системе собственных функций краевой задачи (3) изучены В.В.Тихомировым в работе [3].

Перейдем к изучению неклассической краевой задачи (1), (2). Линейно независимыми решениями уравнения (1) являются функции

$$u_1(x) = e^{\rho x} - e^{-\rho x}, \ u_2(x) = e^{i\rho x} + e^{-i\rho x},$$

где $\rho^2 = \lambda$. Любое решение уравнения (1) записывается в виде линейной комбинации функций $u_1(x)$, $u_2(x)$

$$u(x) = c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x),$$

где c_1, c_2 являются решениями линейной алгебраической однородной системы уравнений.

$$\begin{cases} c_1 U_1(u_1) + c_2 U_2(u_2) = 0, \\ c_1 U_2(u_1) + c_2 U_2(u_2) = 0, \end{cases} \qquad (4)$$

где U_1, U_2 – линейные формы, порождающие краевые условия (2).

В данном случае эти формы имеют вид

$$U_1(u) = u'(-1) - u(1),$$

$$U_2(u) = u(-1),$$

так что

$$U_1(u_1) = (\rho+1)e^{-\rho} + (\rho-1)\cdot e^{\rho},$$

$$U_1(u_2) = (i\rho-1)e^{-i\rho} + (-i\rho-1)\cdot e^{i\rho},$$

$$U_2(u_1) = e^{-\rho} - e^{\rho},$$

Однородная система (4) имеет ненулевые решения только тогда, когда определитель системы равен нулю, т.е.

$$\begin{vmatrix} U_1(u_1) & U_1(u_2) \\ U_2(u_1) & U_2(u_2) \end{vmatrix} = 0$$

или

$$\begin{vmatrix} (\rho+1)e^{-\rho}+(\rho-1)\cdot e^{\rho} & (i\rho-1)e^{-i\rho}+(-i\rho-1)\cdot e^{i\rho} \\ e^{-\rho}-e^{\rho} & e^{-i\rho}+e^{i\rho} \end{vmatrix} = 0.$$

После несложных преобразований будем иметь

$$[(1-i)\rho+2]\cdot e^{(-1-i)\rho}+[(1+i)\rho+2]\cdot e^{(-1+i)\rho}+$$
$$+[(1+i)\rho-2]\cdot e^{(1-i)\rho}+[(1-i)\rho+2]\cdot e^{(-1-i)\rho}+$$
$$+[(1+i)\rho+2]\cdot e^{(-1+i)\rho}+[(1+i)\rho-2]\cdot e^{(1-i)\rho}+$$
$$+[(1-i)\rho-2]\cdot e^{(1+i)\rho}=0.$$

Обе части полученного равенства разделим на (1–*i*)*r*. Тогда

$$\left[1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\cdot e^{(-1-i)\rho}+\left[i+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\cdot e^{(-1+i)\rho}+ \quad (5)$$

$$+\left[i+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\cdot e^{(1-i)\rho}+\left[1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\cdot e^{(1+i)\rho}=0.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Краевая задача (1), (2) имеет две серии собственных значений, которые имеют следующий асимптотический вид:

$$\lambda_{k1}=-\left(k+\frac{1}{4}\right)\pi^2+O\left(\frac{1}{k^2}\right),$$

$$\lambda_{k2}=\left(k+\frac{1}{4}\right)\pi^2+O\left(\frac{1}{k^2}\right).$$

Эти собственные значения начиная с некоторого являются простыми.

Доказательство. Пусть $\rho=\rho_1+i\rho_2$. При $\rho_1=\pm\rho_2$ задача не имеет собственных значений. Предполагаем, что *r* достаточно большое по модулю комплексное число.

Рассмотрим области комплексной r-плоскости, находящиеся между биссектрисами координатных углов.

Если r лежит между биссектрисами I и II координатных углов в верхней полуплоскости комплексной r-плоскости, то $\rho_2\geq 0$ и $\rho_2>|\rho_1|$. В этом случае второе и четвертое слагаемые в уравнении (5) экспоненциально стремятся к нулю при $|\rho|\to\infty$. Поэтому уравнение (5) принимает вид

$$\left[1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\cdot e^{(-1-i)\rho}+\left[i+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\cdot e^{(1-i)\rho}=0. \quad (6)$$

Преобразуем уравнение к виду

$$e^{-2\rho}=-\frac{i+O\left(\frac{1}{\rho}\right)}{1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)}=-i+O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Отсюда имеем

$$\rho=\left(k+\frac{1}{4}\right)\pi i+O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Далее, используя методику, изложенную в монографии М. А. Наймарка [1. С. 74], получаем утверждение теоремы.

Этот же результат получится, если рассмотреть случай $\rho_2\leq 0$ и $|\rho_2|>|\rho_1|$, т.е. случай, когда r лежит в нижней полуплоскости, между биссектрисами III и IV координатных углов.

В случае, когда r лежит в правой полуплоскости между биссектрисами I и IV координатных углов, т.е. в случае $\rho_1\geq 0$, $\rho_1>|\rho_2|$, первое и второе слагаемые в уравнении (5) экспоненциально стремятся к нулю при $|\rho|\to\infty$. В результате этого уравнение (5) запишется в виде

$$\left[i+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\cdot e^{(1-i)\rho}+\left[1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]\cdot e^{(1+i)\rho}=0.$$

После несложных преобразований будем иметь

$$e^{-2i\rho}=-\frac{1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)}{i+O\left(\frac{1}{\rho}\right)}=i+O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Значит,

$$\rho=-\left(k+\frac{1}{4}\right)\pi+O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Далее, поступая как и в случае уравнения (6), получим утверждение теоремы. К этому результату приводит и случай, когда r лежит в левой полуплоскости, между биссектрисами II и III координатных углов. Теорема доказана.

Перейдем к изучению вопросов базисности систем корневых функций краевой задачи (1), (2). Оказывается, этот вопрос можно свести к известным задачам обыкновенных дифференциальных уравнений.

Теорема 2. Система собственных и присоединенных функций краевой задачи (1), (2) образует безусловный базис пространства L_2 [–1,1].

Доказательство. Для доказательства теоремы два раза продифференцируем обе части уравнения (1) по x:

$$-u'''(x) = -\lambda u'(-x),$$

$$-u^{IV}(x) = \lambda u''(-x). \qquad (7)$$

В правую часть второго уравнения в (7) подставляем (1). Тогда

$$u^{IV}(x) = \lambda^2 u(x). \qquad (8)$$

Мы получили обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка. Из первого уравнения в (7) и из (1) следует, что

$$-u''(-1) = \lambda u(1), \quad -u''(1) = \lambda u(-1),$$

$$u'''(-1) = \lambda u'(1), \; u'''(1) = \lambda u'(-1). \qquad (9)$$

Так как $u(-1)=0$, то к краевым условиям (2) добавится еще одно условие

$$u''(1) = 0, \qquad (10)$$

которое вытекает из второго соотношения в (9). В правую часть четвертого соотношения (9) подставим второе краевое условие (2) и рассмотрим два следующих равенства:

$$-u''(-1) = \lambda u(1), \; u'''(1) = \lambda u(1),$$

из которых вытекает еще одно краевое условие

$$u'''(1) = -u''(-1). \qquad (11)$$

Итак, для обыкновенного дифференциального уравнения (8) имеем следующие краевые условия (2), (10), (11):

$$u(-1) = 0, \;\; u'(-1) = u(1), \;\;\; u''(1) = 0,$$

$$u'''(1) = -u''(-1). \qquad (12)$$

Краевые условия (12) относятся к типу усиленно регулярных краевых условий [1. С. 67] для обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка. В самом деле,

$$\frac{\theta_{-1}}{S} + \theta_0 + \theta_1 S = \begin{vmatrix} 0 & S\omega_2^3 & \frac{1}{S}\omega_3^3 & \omega_4^3 \\ 0 & S\omega_2^2 & \frac{1}{S}\omega_3^2 & \omega_4^2 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Краевые условия (12) будут усиленно регулярными, если числа $\theta_0, \theta_{-1}, \theta$ удовлетворяют условиям $\theta_0^2 - 4\theta_1\theta_{-1} \neq 0$.

В рассматриваемом случае $\theta_{-1} = -2, \;\; \theta_1 = -2, \;\; \theta_0 = 0$, т.е. краевые условия (12) являются усиленно регулярными и, следовательно, на основании теорем В П. Михайлова [4], Г. М. Кессельмана [5] система собственных и присоединенных элементов краевой задачи (8), (12) образует без-условный базис пространства L_2[0,1].

Для завершения доказательства теоремы нужно показать, что любая собственная функция краевой задачи (8), (12) является собственной функцией краевой задачи (1), (2). При этом нужно учесть, что обе краевые задачи имеют только конечное число присоединенных функций, так что система собственных и присоединенных функций краевой задачи (1), (2) может отличаться от соответствующей системы собственных и присоединенных функций краевой задачи (8), (12) только конечным числом элементов.

Элементарно доказывается тот факт, что, если l_0 – собственное значение и j_0 – соответствующая собственная функция оператора А, то λ_0^2 является собственным значением оператора A^2 и ему соответствует собственная функция j_0. Утверждение, обратное этому, мы сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма. Если λ_0^2 – собственное значение, а j_0 – соответствующая собственная функция оператора A^2 и $-l_0$ не является собственным значением оператора А, то l_0 является собственным значением, а j_0 соответствующей собственной функцией оператора А.

Доказательство. Пусть $A^2\varphi_0 - \lambda_0^2\varphi_0 = 0$. Поскольку

$$A^2 - \lambda_0^2 E = (A - \lambda_0 E)\cdot(A + \lambda_0 E) =$$

$$= (A + \lambda_0 E) \cdot (A - \lambda_0 E),$$

и $-l_0$ не является собственным значением оператора A, то из равенства

$$0 = (A^2 - \lambda_0^2 E) = (A + \lambda_0 E) \cdot \big((A - \lambda_0 E)\varphi_0\big)$$

следует $(A - \lambda_0 E)\varphi_0 = 0$, т.е. l_0 – собственное значение, а j_0 – соответствующая собственная функция оператора A. Лемма доказана.

В случае краевой задачи (8), (12) и (1), (2) все условия леммы выполнены. Собственными значениями краевой задачи (1), (2) будут либо λ_k, либо $-\lambda_k$. В противном случае краевая задача (8), (12) имела бы кратные собственные значения, что противоречит условиям усиленно регулярных краевых задач. Таким образом, любая собственная функция задачи (8), (12) является собственной функцией задачи (1), (2). Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969. 528 с.
2. *Hoffman S.P.* Second Order Linear Differential Operators by Irregubar Boundary Conditions, Disserlation Yale Univ., 1957.
3. *Тихомиров В.В.* Об одной нерегулярной краевой задаче // ДАН СССР. 1975. Т. 232, №5. С. 1026-1027.
4. *Михайлов В.П.* О базисах Рисса в $L_2(0,1)$ // ДАН СССР. 1962. Т. 144, № 5. С. 981-984.
5. *Кессельман Г.М.* О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифферен-циальных операторов // Изв. вузов СССП. Математика. 1964. № 2. С. 82-93.

Резюме

Жұмыста $-u''(x) = \lambda u(-x)$, $x \in [-1,1]$, $u(-1) = 0$, $u'(-1) = u(1)$ шеттік есебінің меншікті және оларға қосымша алынған функциялар жиынының Рисс базисі болатындығы көрсетілген.

Summary

In this article are established Riss's basis of eigen and roots functions of boundary-value problem $-u''(x) = \lambda u(-x)$, $x \in [-1,1]$, $u(-1) = 0$, $u'(-1) = u(1)$.

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, г. Шымкент

Поступила 2.07.06г.