М. О. САТКАЛИЕВА

СИНТЕЗ ПРОСТРАНСТВЕННОГО НАПРАВЛЯЮЩЕГО ДВУХПОДВИЖНОГО МЕХАНИЗМА V КЛАССА ПО ЗАДАННЫМ ПОЛОЖЕНИЯМ ВЫХОДНЫХ ТОЧЕК ШАТУННЫХ ЗВЕНЬЕВ

Рассмотрим задачу синтеза пространственного направляющего механизма V класса общего вида в соответствии с рисунком по заданным положениям входных звеньев 1 и 7:

$$\varphi_{1i} = \varphi_1(t_i), \quad \varphi_{7i} = \varphi_7(t_i) \tag{1}$$

и выходных точек T_1, T_2 соответственно шатунных звеньев 3, 5:

$$X_{T1i} = X_{T1}(t_i),\ Y_{T1i} = Y_{T1}(t_i),\ Z_{T1i} = Z_{T1}(t_i),$$
$$i = \overline{1{,}5}\ .$$
$$X_{T2i} = X_{T2}(t_i),\ Y_{T2i} = Y_{T2}(t_i),\ Z_{T2i} = Z_{T2}(t_i),$$
$$i = \overline{1{,}5}\ . \tag{2}$$

Решение задачи синтеза механизма проведено с использованием метода интерполирования. Для решения задачи синтеза кинематической цепи *DENM* механизма по заданным положениям выходной точкой T_2 звена 5 (*EN*) [1], в котором приближающая окружность точки *N* радиусом $l_{NM} = l_{6\phi}$ с центром в точке *M* звена 6 (*NM*) определяется как линия пересечения сферы с координатами X_{M1}, Y_{M1}, Z_{M1} и плоскости, удобно использовать выражения взвешенных разнос-тей [2]:

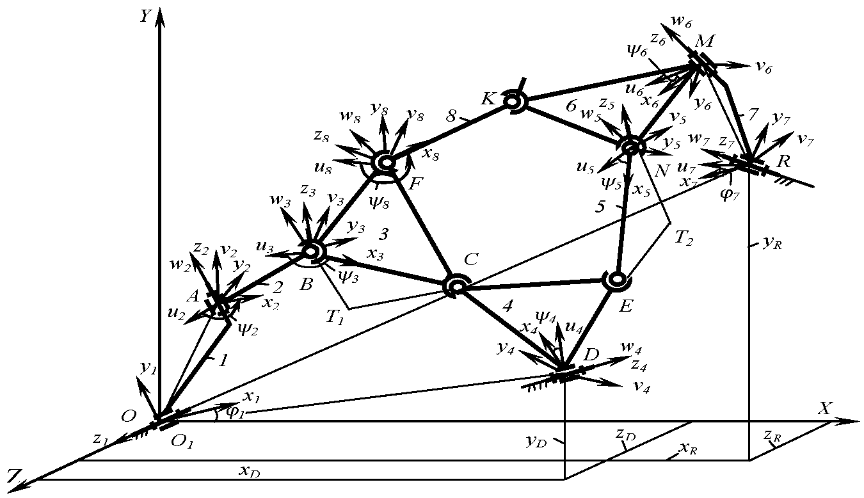
$$\Delta q = l_6^2 - l_{6\phi}^2, \tag{2}$$

$$\Delta q_i = ax_{5Ni} + by_{5Ni} + cz_{5Ni} - 1 = 0\ , \tag{3}$$

где $l_{6\phi}$ – расстояние между точками *N* звена 5 и M_1:

$$l_{6\phi}^2 = (X_{M1} - X_{Ni})^2 + (Y_{M1} - Y_{Ni})^2 + (Z_{M1} - Z_{Ni})^2 \quad ; \tag{4}$$

a, *b*, *c* – коэффициенты уравнения приближающей плоскости; X_{M1}, Y_{M1}, Z_{M1}, X_{Ni}, Y_{Ni}, Z_{Ni} – соответствующие координаты точек M_1 (центра сферы) и *N* звена 5(*EN*) в абсолютной системе координат *OXYZ*. По условию синтеза координаты точки *N* звена 5 (*EN*), которому принадлежат локальные координаты выходной точки



T_2, в абсолютной системе координат $OXYZ$ определя-ются с использованием обобщенного метода символических обозначений преобразования координат [3] в виде

$$X_N = x_{5N}\cos(\psi_4+\psi_5) + z_{5N}\sin(\psi_4+\psi_5) + X'_N,$$
$$Y_N = -y_{5N}\cos\beta_5 + Y'_N, \qquad (5)$$
$$Z_N = x_{5N}\sin(\psi_4+\psi_5) - z_{5N}\cos(\psi_4+\psi_5)) + Z'_N,$$

где

$$X'_N = a_{04} + a_{5,4}\cos\psi_4,\ Y'_N = -b_{04} - b_{5,4},$$
$$Z'_N = c_{04} + a_{5,4}\sin\psi_4.$$

Синтезу подлежат 10 неизвестных геометрических параметров кинематической цепи $DENM$ механизма. Из них 7 параметров: x_{5N}, y_{5N}, z_{5N}, X_M, Y_M, Z_M, l_{NM} – параметры синтезируемого звена 6 (NM) – и 3 параметра X_{M1}, Y_{M1}, Z_{M1} – координаты центра сферы.

Вычисление пяти параметров рассмотрим на примере одного из вариантов: $X_{M1}, Y_{M1}, Z_{M1},\ y_{5N}, l_{NM1}$.

Выражение взвешенной разности (2) с учетом уравнений координат точки N запишем в виде обобщенного полинома

$$\Delta q = p_1 f_1(\varphi_1,\psi_4) + p_2 f_2(\varphi_1,\psi_4) + p_3 f_3(\varphi_1,\psi_4) +$$
$$+ p_4 f_4(\varphi_1,\psi_4) + p_5 f_5(\varphi_1,\psi_4) + p_3 p_4 f_6(\varphi_1,\psi_4) -$$
$$- F(\varphi_1,\psi_4), \qquad (6)$$

где

$$p_1 = X_{M1},\quad f_1(\varphi_1,\psi_4) = -2[x_{5N}\cos(\psi_4+\psi_5) +$$
$$+ z_{5N}\sin(\psi_4+\psi_5) + X'_N],$$
$$p_2 = Y_{M1},\quad f_2(\varphi_1,\psi_4) = -2Y'_N,$$
$$p_3 = Z_{M1},\quad f_3(\varphi_1,\psi_4) =$$
$$= -2[x_{5N}\sin(\psi_4+\psi_5) + z_{5N}\cos(\psi_4+\psi_5) + Z'_N],$$
$$p_4 = y_{5N},\quad f_4(\varphi_1,\psi_4) = -2Y'_N\cos\beta_5,$$
$$p_5 = X_{M1}^2 + Y_{M1}^2 + Z_{M1}^2 + y_{5N}^2 - l_{NM1}^2,\quad f_5(\varphi_1,\psi_4) = 1,$$
$$p_3 p_4 = y_{5N} Y_{M1},\quad f_6(\varphi_1,\psi_4) = 2\cos\beta_5,$$
$$F(\varphi_1,\psi_4) =$$
$$= -2x_{5N}[X'_N\cos(\psi_4+\psi_5) + Z'_N\sin(\psi_4+\psi_5)] -$$
$$- 2z_{5N}[X'_N\sin(\psi_4+\psi_5) + Z'_N\cos(\psi_4+\psi_5)] +$$
$$+ 2x_{5N}z_{5N}\sin 2(\psi_4+\psi_5)) -$$
$$- (x_{5N}^2 + z_{5N}^2) - (X_N'^2 + Y_N'^2 + Z_N'^2).$$

При решении задачи синтеза по методу интерполирования для четырех заданных положений механизма отклонения взвешенной разности должны равняться нулю. С учетом этого из выражения (6) имеем

$$p_1 f_1(\varphi_{1i},\varphi_{2i}) + p_2 f_2(\varphi_{1i},\varphi_{2i}) + p_3 f_3(\varphi_{1i},\varphi_{2i}) +$$
$$+ p_4 f_4(\varphi_{1i},\varphi_{2i}) + p_5 f_5(\varphi_{1i},\varphi_{2i}) + p_3 p_4 f_6(\varphi_{1i},\varphi_{2i}) -$$
$$- F(\varphi_{1i},\varphi_{2i}) = 0,\quad i = \overline{1,5}. \qquad (7)$$

Решая систему уравнений (7) методом исключения неизвестных, получаем квадратное уравнение относительно неизвестного p_4:

$$k_1 p_4^2 + k_2 p_4 + k_3 = 0. \qquad (8)$$

Решая уравнение (8), определяем геометрические *параметры кинематической цепи DENM* механизма по формулам

$$X_{M1} = p_1, \quad Y_{M1} = p_2, \quad Z_{M1} = p_3, \; y_{5N} = p_4,$$
$$l_{NM1} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 - p_5}.$$

Вычисление остальных пяти параметров: $x_{5N}, z_{5N}, X_M, Y_M, Z_M$ – проводим с использованием выражения взвешенной разности (3)

$$\Delta q_i = ax_{3Ci} + by_{3Ci} + cz_{3Ci} - 1 = 0, \; i = \overline{1,5}.$$

С учетом координат точки N записываем систему пяти уравнений в виде

$$aX_{N1} + bY_{N1} + cZ_{N1} = 1,$$
$$aX_{N2} + bY_{N2} + cZ_{N2} = 1,$$
$$aX_{N3} + bY_{N3} + cZ_{N3} = 1,$$
$$aX_{N4} + bY_{N4} + cZ_{N4} = 1,$$
$$aX_{N5} + bY_{N5} + cZ_{N5} = 1. \qquad (9)$$

Из первых трех уравнений определяем коэффициенты приближающей плоскости

$$a = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \; b = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \; c = \frac{\Delta_3}{\Delta}, \text{ если } \mathrm{D} \text{ № } 0. \qquad (10)$$

Для решения задачи синтеза указанных пяти параметров записываем систему трех алгебраических уравнений, состоящую из двух уравнений системы (9) и квадратного уравнения (8). Решая полученную систему трех алгебраических уравнений, после соответствующих преобразований получаем

$$T_4(z^0)x^4 + T_3(z\ )x^3 + T_2(z^2)x^2 + T_1(z^3)x +$$
$$+ T_0(z^4) = 0,$$
$$S_6(z^0)x^6 + S_5(z\ )x^5 + S_4(z^2)x^4 + S_3(z^3)x^3 +$$
$$+ S_2(z^4)x^2 + S_1(z^5)x \; + S_0(z^6) = 0, \qquad (11)$$

где $x = x_{5N}$, $y = y_{5N}$, $z = z_{5N}$.

Система уравнений (11) содержит неизвестные x и z. Исключая неизвестное x, получаем алгебраическое уравнение 24-й степени относительно неизвестного z. Решая данное уравнение, находим вещественные решения относительно неизвестного, число которых определяется по теореме Штурма. Для положительных вещественных значений неизвестного z определяем значения остальных неизвестных $x = x_{3C}$, $y = y_{3C}$. В частном случае, когда одна из двух подвижных систем координат принимается за неподвижную систему, совпадающую с абсолютной системой координат *OXYZ*, координаты x_M, y_M, z_M (центра окружности) приравниваются к координатам точки M: X_M, Y_M, Z_M. Следовательно, основание перпендикуляра, опущенного из центра сферы точки M_1 к плоскости, определяет координаты X_M, Y_M, Z_M центра M приближающей окружности:

$$X_M = X_{M1} + Q_x d, \quad Y_M = Y_{M1} + Q_x d,$$
$$Z_M = Z_{M1} + Q_x d, \qquad (12)$$

где $Q_x = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $\quad Q_y = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $Q_z = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ – направляющие косинусы оси вращательной пары в точке D звена 4;

$$d = \frac{aX_{M1} + bY_{M1} + cZ_{M1} - 1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}. \qquad (13)$$

Длина звена 6(*NM*), т.е. радиус окружности, определяется по формуле

$$l_{6(NM)\phi} =$$
$$= \sqrt{(X_{\mathrm{M}} - X_N)^2 + (Y_M - Y_N)^2 + (Z_M - Z_N)^2}. \quad (14)$$

Для кинематической цепи *DENM* механизма определены 10 геометрических параметров: x_{5N}, y_{5N}, z_{5N}, X_M, Y_M, Z_M, l_{NM}, X_{M1}, Y_{M1}, Z_{M1}.

Для решения задач синтеза кинематической цепи *ABCD* механизма по заданным положениям выходной точки T_1 звена 3 (*BC*), в котором приближающая окружность точки C радиусом $l_{CD} = l_{4\phi}$ с центром в точке D звена 4 (*CD*) определяется как линия пересечения сферы с коорди-натами X_{D1}, Y_{D1}, Z_{D1} и плоскости, удобно использовать выражения взвешенных разностей [2]:

$$\Delta q = l_4^2 - l_{4\phi}^2, \qquad (15)$$

$$\Delta q_i = ax_{3Ci} + by_{3Ci} + cz_{3Ci} - 1 = 0. \qquad (16)$$

Синтезу подлежат 10 неизвестных геометрических *параметров кинематической цепи ABCD* механизма. Из них 7 параметров: x_{3C}, y_{3C}, z_{3C}, X_D, Y_D, Z_D, l_{CD} – параметры синтезируемого звена 4 (CD) и 3 параметра: X_{D1}, Y_{D1}, Z_{D1} – координаты центра сферы.

Вычисление пяти параметров рассмотрим на примере одного из вариантов: X_{D1}, Y_{D1}, Z_{D1}, y_{3C}, l_{CD1}.

Выражение взвешенной разности (15) с учетом координат точки C звена 3, которому принадлежат локальные координаты выходной точки T_1 звена 3 (BC), записываем в виде обобщенного полинома

$$\Delta q = p_1 f_1(\varphi_1,\psi_2) + p_2 f_2(\varphi_1,\psi_2) + p_3 f_3(\varphi_1,\psi_2) + \\ + p_4 f_4(\varphi_1,\psi_2) + p_5 f_5(\varphi_1,\psi_2) + p_3 p_4 f_6(\varphi_1,\psi_2) - \\ - F(\varphi_1,\psi_2), \tag{17}$$

При решении задачи синтеза по методу интерполирования для пяти заданных положений механизма отклонения взвешенной разности должны равняться нулю. С учетом этого из выражения (17) имеем

$$p_1 f_1(\varphi_{1i},\varphi_{2i}) + p_2 f_2(\varphi_{1i},\varphi_{2i}) + p_3 f_3(\varphi_{1i},\varphi_{2i}) + \\ + p_4 f_4(\varphi_{1i},\varphi_{2i}) + p_5 f_5(\varphi_{1i},\varphi_{2i}) + p_3 p_4 f_6(\varphi_{1i},\varphi_{2i}) - \\ - F(\varphi_{1i},\varphi_{2i}) = 0, \quad i = \overline{1,5}. \tag{18}$$

Решая систему уравнений (18) методом исключения неизвестных, получаем квадратное уравнение относительно неизвестного p_4:

$$k_1 p_4^2 + k_2 p_4 + k_3 = 0. \tag{19}$$

Выбирая положительные значения остальных неизвестных – p_1, p_2, p_3, определяем геометрические параметры кинематической цепи $ABCD$ механизма по формулам

$$X_{D1} = p_1, \quad Y_{D1} = p_2, \quad Z_{D1} = p_3, \quad y_{3C} = p_4,$$
$$l_{CD1} = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + p_4^2 - p_5}.$$

Вычисление остальных пяти параметров: $x_{3C}, z_{3C}, X_D, Y_D, Z_D$ – проводим с использованием выражения взвешенной разности (16)

$$\Delta q_i = a x_{3Ci} + b y_{3Ci} + c z_{3Ci} - 1 = 0, \quad i = \overline{1,5}. \tag{20}$$

Определяем коэффициенты $a = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $b = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, $c = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$,

если D № 0.

Для решения задачи синтеза указанных пяти параметров записываем систему трех алгебраических уравнений, состоящую из двух уравнений системы (20) и квадратного уравнения (18). После соответствующих преобразований получаем

$$T_4(z^0)x^4 + T_3(z\ \ )x^3 + T_2(z^2)x^2 + T_1(z^3)x + \\ + T_0(z^4) = 0,$$

$$S_6(z^0)x^6 + S_5(z\ \ )x^5 + S_4(z^2)x^4 + S_3(z^3)x^3 + \\ + S_2(z^4)x^2 + S_1(z^5)x + S_0(z^6) = 0, \tag{21}$$

где $x = x_{3C}$, $y = y_{3C}$, $z = z_{3C}$.

Решение системы уравнений аналогично решению системы уравнений (11). Для положительных вещественных значений неизвестного z определяем значения остальных неизвестных $x = x_{3C}$, $y = y_{3C}$. Находим координаты центра приближающей плоскости

$$X_D = X_{D1} + Q_x d, \quad Y_D = Y_{D1} + Q_x d, \quad Z_D = Z_{D1} + Q_x d.$$

Длина звена 4 (CD), т.е. радиус окружности, определяется по формуле

$$l_{CD\ ф} = \sqrt{(X_D - X_C)^2 + (Y_D - Y_C)^2 + (Z_D - Z_C)^2}.$$

Определены 10 параметров кинематической цепи $ABCD$ механизма: x_{3C}, y_{3C}, z_{3C}, X_D, Y_D, Z_D, $X_{D1}, Y_{D1}, Z_{D1}, l_{CD}$.

Таким образом, по пяти заданным положениям точек двух выходных шатунных звеньев механизма определены 20 параметров: x_{5N}, y_{5N}, z_{5N}, l_{NM}, X_M, Y_M, Z_M X_{M1}, Y_{M1}, Z_{M1}, x_{3C}, y_{3C}, z_{3C}, X_D, Y_D, Z_D, $X_{D1}, Y_{D1}, Z_{D1}, l_{CD}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Зиновьев В.А.* Пространственные механизмы с низшими парами. М.: Гостехиздат, 1952. 432 с.

2. *Артоболевский И.И., Левитский Н.И., Черкудинов С.А.* Синтез плоских механизмов. М.: Госиздат, 1959. 1084 с.

3. *Шет и Уикер мл.* Обобщенная система символических обозначений механизмов // Конструирование и технология машиностроения. 1971. № 1. С. 96-106.

Резюме

Екі дәрежелі V класты кеңістікті бағыттаушы механизмнің екі шатун буындарының шығыс нүктелерінің берілген бес жағдайына байланысты интерполяция тәсіліне сүйене отырып, геометриялық параметрлерінің синтез есебі шешілген.

Summary

The task of synthesis of geometrical parameters of a spatial guide link two- moving mechanism of V class upon five preset positions of output points of connecting rod links using the interpolation method is solved.

Поступила 09.07.06г.