УДК 539

А. Н. ТЮРЕХОДЖАЕВ, А. Г. ИБРАЕВ

ДИНАМИКА РЕЛЬСА, ЛЕЖАЩЕГО НА ДИСКРЕТНОМ ОСНОВАНИИ, ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ КОЛЕС ПОДВИЖНОГО СОСТАВА

Рассматривается продольное колебание рельса, лежащего на дискретном упругом основании, по которому движется железнодорожный состав, состоящий из четырехосных вагонов, с учетом сухого трения на контакте «рельс–колесо».

В настоящее время существует большое количество работ [1–4], которые описывают взаимодействие рельса с подвижными нагрузками. Однако в этих работах рельс рассматривается лежащим на сплошном упругом основании и без учета сухого трения на контакте «колесо–рельс». Учет дискретного основания рельса приводит к отысканию множества неизвестных реакций дискретных связей числом, равным количеству шпал, что представляет существенное затруднение для получения решения даже в статике. Учет такого нелинейного диссипационного механизма, как сухое трение между колесами и рельсом, порождает дополнительные усложнения задачи, тогда как неучет нарушает выполнение закона сохранения количества движения классической механики.

В задаче шпалы приняты как дискретные упругие связи. Тогда дифференциальное уравнение движения будет описываться следующим образом:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} + \alpha \sum_{i=1}^{m} u(t,x_i)\delta(x-x_i) =$$

$$= -\tau_k \sum_{r=0}^{s} \{\delta[v_0 t - x - r(2l_1 + l_2 + l_3)] + \delta[v_0 t - x - (2r+1)l_1 - r(l_2 + l_3)] +$$

$$+\delta[v_0 t - x - (2r+1)l_1 - (r+1)l_2 - rl_3] + \delta[v_0 t - x - 2(r+1)l_1 - (r+1)l_2 - rl_3]\}, \qquad (1)$$

где $u(x,t)$ – смещение сечения рельса x в момент времени t; a – коэффициент жесткости упругой связи; x_i – координата i-й шпалы; m – общее количество шпал; t_k – трение качения между рельсом и колесом; $d(z)$ – дельта-функция Дирака; a – скорость упругой волны в рельсе; v_0 – скорость центра колеса; l_1, l_2, l_3 – расстояния между колесами.

Будем считать, что в начальный момент времени имеет место мгновенный удар о торец рельса колесом, движущимся со скоростью v_0:

$$t = 0; \; u(0,x) = 0, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial u(0,x)}{\partial t} = v_0 \cdot \delta(x). \qquad (3)$$

Пусть граничные условия на торцах описываются соотношениями

$$x=0: \quad \frac{\partial u(t,0)}{\partial x} = -\frac{\sigma_0}{E}\left\{\delta\left[t - \frac{r(2l_1 + l_2 + l_3)}{v_0}\right] + \delta\left[t - \frac{(2r+1)l_1 + r(l_2 + l_3)}{v_0}\right] +\right.$$

$$\left. +\delta\left[t - \frac{(2r+1)l_1 + (r+1)l_2 + rl_3}{v_0}\right] + \delta\left[t - \frac{2(r+1)l_1 + (r+1)l_2 + rl_3}{v_0}\right]\right\}, \qquad (4)$$

$$\text{x=L:} \quad \frac{\partial u(t,L)}{\partial x} = 0. \qquad (5)$$

где L – длина рельса.

Методом частичной дискретизации профессора А. Н. Тюреходжаева [5] дифференциальное уравнение с частным производным приводим к следующему виду:

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2}\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2} = \frac{\alpha}{2a^2}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(t_k + t_{k+1})[u(t_k,x_i)\delta(t-t_k) - u(t_{k+1},x_i)\delta(t-t_{k+1})]\times$$

$$\times\delta(x-x_i) + \frac{\tau_k}{a^2}\sum_{r=0}^{s}\{\delta[v_0 t - x - r(2l_1 + l_2 + l_3)] + \delta[v_0 t - x - (2r+1)l_1 - r(l_2 + l_3)] +$$

$$+\delta[v_0 t - x - (2r+1)l_1 - (r+1)l_2 - rl_3] + \delta[v_0 t - x - 2(r+1)l_1 - (r+1)l_2 - rl_3]\}. \qquad (6)$$

Преобразуем уравнение (6) к каноническому виду, вводя характеристические переменные x и h:

$$\xi = at + x, \quad \eta = at - x. \qquad (7)$$

Тогда уравнение (6) принимает вид:

$$\frac{d^2 u(\xi,\eta)}{d\xi d\eta} = -\frac{\alpha}{2a}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(t_k + t_{k+1})[u(x_i,t_k)\delta(\xi+\eta-2at_k) - u(x_i,t_{k+1})\delta(\xi+\eta-2at_{k+1})]\times$$

$$\times\delta(\xi-\eta-2x_i) - \frac{\tau_k}{2a}\sum_{r=0}^{s}\{\delta[(a+v_0)\eta - (a-v_0)\xi - 2ar(2l_1 + l_2 + l_3)] +$$

$$+\delta\left[(a+v_0)\eta-(a-v_0)\xi-2a(2r+1)l_1+2ar(l_2+l_3)\right]+$$
$$+\delta\left[(a+v_0)\eta-(a-v_0)\xi-2a(2r+1)l_1+2a(r+1)l_2+2arl_3\right]+$$
$$+\delta\left[(a+v_0)\eta-(a-v_0)\xi-4a(r+1)l_1+2a(r+1)l_2+2arl_3\right]\Big\}. \quad (8)$$

Начальные условия с учетом (7) имеют вид

при $t = 0$ $x = -h$: $u(x,h) = 0,$ (9)

$$\frac{\partial u(0,x)}{\partial t}\Big|_{t=0} = a\left(\frac{\partial u}{\partial \xi}+\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\Big|_{\xi=-\eta} = v_0\delta(\xi), \quad (10)$$

граничные условия

при $x = 0$ $x = h$

$$\frac{\partial u(t,0)}{\partial x}\Big|_{x=0} = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\Big|_{\xi=\eta} = -\frac{\sigma_0 a}{E}\sum_{r=0}^{s}\left\{\delta\left[\eta-a\frac{r(2l_1+l_2+l_3)}{v_0}\right]+\delta\left[\eta-a\frac{(2r+1)l_1+r(l_2+l_3)}{v_0}\right]+\right.$$
$$\left.+\delta\left[\eta-a\frac{(2r+1)l_1+(r+1)l_2+rl_3}{v_0}\right]+\delta\left[\eta-a\frac{2(r+1)l_1+(r+1)l_2+rl_3}{v_0}\right]\right\},$$

(11)

при $x = L$ $x - h = 2L$:

$$\frac{\partial u(t,L)}{\partial x}\Big|_{x=L} = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}-\frac{\partial u}{\partial \eta}\right)\Big|_{\xi=\eta+2L} = 0\,. \quad (12)$$

Интегрирование (8) дает

$$u(\xi,\eta) = -\frac{\alpha}{4a}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(t_k+t_{k+1})\left[u(x_i,t_k)H(\xi-x_i-at_k)H(\eta+x_i-at_k)-\right.$$
$$\left.-u(x_i,t_{k+1})H(\xi-x_i-at_{k+1})H(\eta+x_i-at_{k+1})\right]+\frac{\tau_k}{a^2-v_0^2}\sum_{r=0}^{s}\left\{\left[(a+v_0)\eta-(a-v_0)\xi-2ar(2l_1+l_2+l_3)\right]\times\right.$$
$$\times H\left[(a+v_0)\eta-(a-v_0)\xi-2ar(2l_1+l_2+l_3)\right]+\left[(a+v_0)\eta-(a-v_0)\xi-2a(2r+1)l_1-2ar(l_2+l_3)\right]\times$$
$$\times H\left[(a+v_0)\eta-(a-v_0)\xi-2a(2r+1)l_1-2ar(l_2+l_3)\right]+$$
$$+\left[(a+v_0)\eta-(a-v_0)\xi-2a(2r+1)l_1+2a(r+1)l_2+2arl_3\right]\times$$
$$\times H\left[(a+v_0)\eta-(a-v_0)\xi-2a(2r+1)l_1+2a(r+1)l_2+2arl_3\right]+$$
$$+\left[(a+v_0)\eta-(a-v_0)\xi-4a(r+1)l_1-2a(r+1)l_2-2arl_3\right]\times$$
$$\left.\times H\left[(a+v_0)\eta-(a-v_0)\xi-4a(r+1)l_1-2a(r+1)l_2-2arl_3\right]\right\}+\varphi(\eta)+\psi(\xi).$$

(13)

Определяем функции $j(h)$, $y(x)$ из начальных и граничных условий

$$\varphi(\eta) = \frac{v_0}{2a}H(\eta)-\frac{\tau_k}{2a(a-v_0)}\sum_{r=0}^{s}\left\{\left[\eta-r(2l_1+l_2+l_3)\right]H\left[\eta-r(2l_1+l_2+l_3)\right]+\right.$$
$$+\left[\eta-(2r+1)l_1-r(l_2+l_3)\right]H\left[\eta-(2r+1)l_1-r(l_2+l_3)\right]+\left[\eta-(2r+1)l_1-(r+1)l_2-rl_3\right]\times$$
$$\times H\left[\eta-(2r+1)l_1-(r+1)l_2-rl_3\right]+\left[\eta-2(r+1)l_1-(r+1)l_2-rl_3\right]\times$$

$$\times H\left[\eta - 2(r+1)l_1 - (r+1)l_2 - rl_3\right]\Big\}, \tag{14}$$

$$\psi(\eta) = \frac{v_0}{2a}H(\eta) - \frac{\tau_k}{2a(a - v_0)}\sum_{r=0}^{s}\Big\{\left[\eta - r(2l_1 + l_2 + l_3)\right]H\left[\eta - r(2l_1 + l_2 + l_3)\right] +$$
$$+\left[\eta - (2r+1)l_1 - r(l_2 + l_3)\right]H\left[\eta - (2r+1)l_1 - r(l_2 + l_3)\right] + \left[\eta - (2r+1)l_1 - (r+1)l_2 - rl_3\right]\times$$
$$\times H\left[\eta - (2r+1)l_1 - (r+1)l_2 - rl_3\right] + \left[\eta - 2(r+1)l_1 - (r+1)l_2 - rl_3\right]\times H\left[\eta - 2(r+1)l_1 - (r+1)l_2 - rl_3\right]\Big\} +$$
$$-\frac{\tau_k \cdot a}{(a^2 - v^2{}_0)v_0}\sum_{r=0}^{s}\left\{\left[\eta - \frac{a}{v_0}r(2l_1 + l_2 + l_3)\right]H\left[\eta - \frac{a}{v_0}r(2l_1 + l_2 + l_3)\right] +\right.$$
$$+\left[\eta - \frac{a}{v_0}(2r+1)l_1 - \frac{a}{v_0}r(l_2 + l_3)\right]H\left[\eta - \frac{a}{v_0}(2r+1)l_1 - \frac{a}{v_0}r(l_2 + l_3)\right] +$$
$$+\left[\eta - \frac{a}{v_0}(2r+1)l_1 - \frac{a}{v_0}(r+1)l_2 - \frac{a}{v_0}rl_3\right]H\left[\eta - \frac{a}{v_0}(2r+1)l_1 - \frac{a}{v_0}(r+1)l_2 - \frac{a}{v_0}rl_3\right] +$$
$$\left.+\left[\eta - \frac{a}{v_0}2(r+1)l_1 - \frac{a}{v_0}(r+1)l_2 - \frac{a}{v_0}rl_3\right]H\left[\eta - \frac{a}{v_0}2(r+1)l_1 - \frac{a}{v_0}(r+1)l_2 - \frac{a}{v_0}rl_3\right]\right\} -$$
$$-\frac{\sigma_0 a}{E}\left\{H\left[\eta - \frac{a}{v_0}r(2l_1 + l_2 + l_3)\right] + H\left[\eta - \frac{a}{v_0}(2r+1)l_1 - \frac{a}{v_0}r(l_2 + l_3)\right] +\right.$$
$$\left.+H\left[\eta - \frac{a}{v_0}(2r+1)l_1 - \frac{a}{v_0}(r+1)l_2 - rl_3\right] + H\left[\eta - \frac{a}{v_0}(2r+1)l_1 - \frac{a}{v_0}(r+1)l_2 - \frac{a}{v_0}rl_3\right]\right\}, \tag{15}$$

$$\psi(\eta + 2L) = \frac{v_0}{2a}H(\eta) - \frac{\tau_k}{2a(a - v_0)}\sum_{r=0}^{s}\Big\{\left[\eta - r(2l_1 + l_2 + l_3)\right]H\left[\eta - r(2l_1 + l_2 + l_3)\right] +$$
$$+\left[\eta - (2r+1)l_1 - r(l_2 + l_3)\right]H\left[\eta - (2r+1)l_1 - r(l_2 + l_3)\right] +$$
$$+\left[\eta - (2r+1)l_1 - (r+1)l_2 - rl_3\right]H\left[\eta - 2(r+1)l_1 - (r+1)l_2 - rl_3\right] +$$
$$+\left[\eta - 2(r+1)l_1 - (r+1)l_2 - rl_3\right]H\left[\eta - 2(r+1)l_1 - (r+1)l_2 - rl_3\right]\Big\} +$$
$$-\frac{\tau_k \cdot a}{(a^2 - v^2{}_0)v_0}\sum_{r=0}^{s}\left\{\left[\eta - \frac{a - v_0}{v_0}L - \frac{a}{v_0}r(2l_1 + l_2 + l_3)\right]H\left[\eta - \frac{a - v_0}{v_0}L - \frac{a}{v_0}r(2l_1 + l_2 + l_3)\right] +\right.$$
$$+\left[\eta - \frac{a - v_0}{v_0}L - \frac{a}{v_0}(2r+1)l_1 - r(l_2 + l_3)\right]H\left[\eta - \frac{a - v_0}{v_0}L - \frac{a}{v_0}(2r+1)l_1 - r(l_2 + l_3)\right] +$$
$$+\left[\eta - \frac{a - v_0}{v_0}L - \frac{a}{v_0}(2r+1)l_1 - \frac{a}{v_0}(r+1)l_2 - \frac{a}{v_0}rl_3\right]\times$$
$$\times H\left[\eta - \frac{a - v_0}{v_0}L - \frac{a}{v_0}(2r+1)l_1 - \frac{a}{v_0}(r+1)l_2 - \frac{a}{v_0}rl_3\right] +$$

$$+\left[\eta-\frac{a-v_0}{v_0}L-\frac{a}{v_0}2(r+1)l_1-\frac{a}{v_0}(r+1)l_2-\frac{a}{v_0}rl_3\right]\times$$

$$\times H\left[\eta-\frac{a-v_0}{v_0}L-\frac{a}{v_0}2(r+1)l_1-\frac{a}{v_0}(r+1)l_2-\frac{a}{v_0}rl_3\right]\Bigg\}. \qquad (16)$$

Из (13) с учетом (14)–(16), возвращаясь к старым переменным t и x, получаем

$$u(t,x)=-\frac{\alpha}{4a}\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}(t_k+t_{k+1})[u(t_k,x_i)H(at+x-x_i-at_k)H(at-x+x_i-at_k)-$$
$$-u(t_{k+1},x_i)H(at+x-x_i-at_{k+1})H(at-x+x_i-at_{k+1})]+\frac{\tau_k}{a^2-v_0^2}\sum_{r=0}^{s}\{[v_0t-x-r(2l_1+l_2+l_3)]\times$$
$$\times H[v_0t-x-r(2l_1+l_2+l_3)]+[v_0t-x-(2r+1)l_1-r(l_2+l_3)]H[v_0t-x-(2r+1)l_1-r(l_2+l_3)]+$$
$$+[v_0t-x-(2r+1)l_1-(r+1)l_2-rl_3]H[v_0t-x-(2r+1)l_1-(r+1)l_2-rl_3]+ \qquad (17)$$
$$+[v_0t-x-2(r+1)l_1-(r+1)l_2-rl_3]H[v_0t-x-2(r+1)l_1-(r+1)l_2-rl_3]\}+\varphi(at-x)+\psi(at+x),$$

где функция $\varphi(at-x)+\psi(at+x)$ для интервала $0<t<\frac{2L}{a}$ принимает вид

$$\varphi(at-x)+\psi(at+x)=\frac{v_0}{2a}[H(at-x)-H(at+x)]-\frac{\tau_k}{2a(a-v_0)}\sum_{r=0}^{s}\{[at-x-r(2l_1+l_2+l_3)]\times$$
$$\times H[at-x-r(2l_1+l_2+l_3)]-[at+x+r(2l_1+l_2+l_3)]H[at+x+r(2l_1+l_2+l_3)]+$$
$$+[at-x-(2r+1)l_1-r(l_2+l_3)]H[at-x-(2r+1)l_1-r(l_2+l_3)]-$$
$$-[at+x+(2r+1)l_1+r(l_2+l_3)]H[at+x+(2r+1)l_1+r(l_2+l_3)]+$$
$$+[at-x-(2r+1)l_1-(r+1)l_2-rl_3]H[at-x-(2r+1)l_1-(r+1)l_2-rl_3]-$$
$$-[at+x+(2r+1)l_1+(r+1)l_2+rl_3]H[at+x+(2r+1)l_1+(r+1)l_2+rl_3]+$$
$$+[at-x-2(r+1)l_1-(r+1)l_2-rl_3]H[at-x-2(r+1)l_1-(r+1)l_2-rl_3]-$$
$$-[at+x+2(r+1)l_1+(r+1)l_2+rl_3]H[at+x+2(r+1)l_1+(r+1)l_2+rl_3]\}+$$
$$+\frac{\tau_k\cdot a}{(a^2-v^2{}_0)v_0}\sum_{r=0}^{s}\left\{\left[at+x+\frac{a}{v_0}r(2l_1+l_2+l_3)\right]H\left[at+x+\frac{a}{v_0}r(2l_1+l_2+l_3)\right]+\right.$$
$$+\left[at+x+\frac{a}{v_0}(2r+1)l_1+\frac{a}{v_0}r(l_2+l_3)\right]H\left[at+x+\frac{a}{v_0}(2r+1)l_1+\frac{a}{v_0}r(l_2+l_3)\right]+$$
$$+\left[at+x+\frac{a}{v_0}(2r+1)l_1+\frac{a}{v_0}(r+1)l_2+\frac{a}{v_0}rl_3\right]H\left[at+x+\frac{a}{v_0}(2r+1)l_1+\frac{a}{v_0}(r+1)l_2+\frac{a}{v_0}rl_3\right]+$$
$$\left.+\left[at+x+\frac{a}{v_0}2(r+1)l_1+\frac{a}{v_0}(r+1)l_2+\frac{a}{v_0}rl_3\right]H\left[at+x+\frac{a}{v_0}2(r+1)l_1+\frac{a}{v_0}(r+1)l_2+\frac{a}{v_0}rl_3\right]\right\}-$$

$$-\frac{\sigma_0\cdot a}{E}\sum_{r=0}^{s}\left\{\left[at+x+\frac{a}{v_0}r(2l_1+l_2+l_3)\right]H\left[at+x+\frac{a}{v_0}r(2l_1+l_2+l_3)\right]+\right. \qquad (18)$$

$$+\left[at+x+\frac{a}{v_0}(2r+1)l_1+\frac{a}{v_0}r(l_2+l_3)\right]H\left[at+x+\frac{a}{v_0}(2r+1)l_1+\frac{a}{v_0}r(l_2+l_3)\right]+$$

$$+\left[at+x+\frac{a}{v_0}(2r+1)l_1+\frac{a}{v_0}(r+1)l_2+\frac{a}{v_0}rl_3\right]H\left[at+x+\frac{a}{v_0}(2r+1)l_1+\frac{a}{v_0}(r+1)l_2+\frac{a}{v_0}rl_3\right]+$$

$$+\left[at+x+\frac{a}{v_0}2(r+1)l_1+\frac{a}{v_0}(r+1)l_2+\frac{a}{v_0}rl_3\right]H\left[at+x+\frac{a}{v_0}2(r+1)l_1+\frac{a}{v_0}(r+1)l_2+\frac{a}{v_0}rl_3\right]\Bigg\}.$$

Для интервала $\frac{2L}{a}<t<\frac{4L}{a}$ функция $\varphi(at-x)+\psi(at+x)$ принимает вид

$$\varphi(at-x)+\psi(at+x)=\frac{v_0}{2a}\left[H(at-x)-H(at+x)\right]-\frac{\tau_k}{2a(a-v_0)}\sum_{r=0}^{s}\{[at-x-r(2l_1+l_2+l_3)]\times$$

$$\times H[at-x-r(2l_1+l_2+l_3)]-[at+x+r(2l_1+l_2+l_3)]H[at+x+r(2l_1+l_2+l_3)]+$$

$$+[at-x-(2r+1)l_1-r(l_2+l_3)]H[at-x-(2r+1)l_1-r(l_2+l_3)]-$$

$$-[at+x+(2r+1)l_1+r(l_2+l_3)]H[at+x+(2r+1)l_1+r(l_2+l_3)]+$$

$$+[at-x-(2r+1)l_1-(r+1)l_2-rl_3]H[at-x-(2r+1)l_1-(r+1)l_2-rl_3]-$$

$$-[at+x+(2r+1)l_1+(r+1)l_2+rl_3]H[at+x+(2r+1)l_1+(r+1)l_2+rl_3]+$$

$$+[at-x-2(r+1)l_1-(r+1)l_2-rl_3]H[at-x-2(r+1)l_1-(r+1)l_2-rl_3]-$$

$$-[at+x+2(r+1)l_1+(r+1)l_2+rl_3]H[at+x+2(r+1)l_1+(r+1)l_2+rl_3]\}+$$

$$+\frac{\tau_k\cdot a}{(a^2-v_0^2)v_0}\sum_{r=0}^{s}\left\{\left[at-x-\frac{a-v_0}{v_0}-\frac{a}{v_0}r(2l_1+l_2+l_3)\right]H\left[at-x-\frac{a-v_0}{v_0}-\frac{a}{v_0}r(2l_1+l_2+l_3)\right]-\right.$$

$$-\left[at+x+\frac{a-v_0}{v_0}L+\frac{a}{v_0}r(2l_1+l_2+l_3)\right]H\left[at+x+\frac{a-v_0}{v_0}L+\frac{a}{v_0}r(2l_1+l_2+l_3)\right]+$$

$$+\left[at-x-\frac{a-v_0}{v_0}L-\frac{a}{v_0}(2r+1)l_1-\frac{a}{v_0}r(l_2+l_3)\right]H\left[at-x-\frac{a-v_0}{v_0}L-\frac{a}{v_0}(2r+1)l_1-\frac{a}{v_0}r(l_2+l_3)\right]-$$

$$-\left[at+x+\frac{a-v_0}{v_0}L+\frac{a}{v_0}(2r+1)l_1+\frac{a}{v_0}r(l_2+l_3)\right]H\left[at+x+\frac{a-v_0}{v_0}L+\frac{a}{v_0}(2r+1)l_1+\frac{a}{v_0}r(l_2+l_3)\right]+$$

$$+\left[at-x-\frac{a-v_0}{v_0}L-\frac{a}{v_0}(2r+1)l_1-\frac{a}{v_0}(r+1)l_2-\frac{a}{v_0}rl_3\right]\times$$

$$\times H\left[at-x-\frac{a-v_0}{v_0}L-\frac{a}{v_0}(2r+1)l_1-\frac{a}{v_0}(r+1)l_2-\frac{a}{v_0}rl_3\right]-$$

$$-\left[at+x+\frac{a-v_0}{v_0}L+\frac{a}{v_0}(2r+1)l_1+\frac{a}{v_0}(r+1)l_2+\frac{a}{v_0}rl_3\right]\times$$

$$\times H\left[at+x+\frac{a-v_0}{v_0}L+\frac{a}{v_0}(2r+1)l_1+\frac{a}{v_0}(r+1)l_2+\frac{a}{v_0}rl_3\right]+$$

$$+\left[at - x - \frac{a - v_0}{v_0}L - \frac{a}{v_0}2(r+1)l_1 - \frac{a}{v_0}(r+1)l_2 - \frac{a}{v_0}rl_3\right]\times$$

$$\times H\left[at - x - \frac{a - v_0}{v_0}L - \frac{a}{v_0}2(r+1)l_1 - \frac{a}{v_0}(r+1)l_2 - \frac{a}{v_0}rl_3\right]-$$

$$-\left[at + x + \frac{a - v_0}{v_0}L + \frac{a}{v_0}2(r+1)l_1 + \frac{a}{v_0}(r+1)l_2 + \frac{a}{v_0}rl_3\right]\times$$

$$\times H\left[at + x + \frac{a - v_0}{v_0}L + \frac{a}{v_0}2(r+1)l_1 + \frac{a}{v_0}(r+1)l_2 + \frac{a}{v_0}rl_3\right]\Bigg\}. \qquad (19)$$

Аналогично, пользуясь методом математической индукции, можно записать решения для $\frac{2jL}{a} < t < \frac{2(j+1)L}{a}$, иными словами, для всей области зависимости решений на полосе $0 \le x \le L$, $0 \le t < \infty$.

Теперь определим $u(t_k, x_i)$ из (17) для различного t_k:

$$u(t_k, x_i) = \frac{4\tau_k \cdot a}{(a^2 - v_0^2)[4a + \alpha(t_{k+1} - t_{2k-1})]}\sum_{r=0}^{s}\{[v_0 t_k - x_i - r(2l_1 + l_2 + l_3)]\times$$

$$\times H[v_0 t_k - x_i - r(2l_1 + l_2 + l_3)] + [v_0 t_k - x_i - (2r+1)l_1 - r(l_2 + l_3)]\times$$

$$\times H[v_0 t_k - x_i - (2r+1)l_1 - r(l_2 + l_3)] +$$

$$+[v_0 t_k - x_i - (2r+1)l_1 - (r+1)l_2 - rl_3]H[v_0 t_k - x_i - (2r+1)l_1 - (r+1)l_2 - rl_3] +$$

$$+[v_0 t_k - x_i - 2(r+1)l_1 - (r+1)l_2 - rl_3]H[v_0 t_k - x_i - 2(r+1)l_1 - (r+1)l_2 - rl_3]\}-$$

$$-\frac{\alpha(t_1 + t_2)}{4a + \alpha(t_{k+1} - t_{k-1})}u(t_1, x_i) - \sum_{j=1}^{k-2}\frac{\alpha(t_{j+2} - t_j)}{4a + \alpha(t_{k+1} - t_{k-1})}u(t_{j+1}, x_i) + \varphi(at_k - x_i) + \psi(at_k + x_i). \qquad (20)$$

С позиции волновой динамики впервые выполнена постановка задачи о напряженно-деформированном состоянии железнодорожного рельса и получено аналитическое решение по определению поля напряжений и поля смещения рельса с рассмотрением циклически дискретного распределения шпал при помощи метода частичной дискретизации нелинейных уравнений

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тимошенко С.П.* Прочность и колебания элементов конструкций. М.: Наука, 1975.

2. *Тимошенко С.П.* О динамических напряжениях в рельсах // Статические и динамические проблемы теории упругости. Киев: Наукова думка, 1975. С. 28-44.

3. *Петров Н.П.* К вопросу о прочности рельса. СПб., 1912. 65 с.

4. *Петров Н.П.* Влияние поступательной скорости колеса на напряжения в рельсе // Записки Русского технического общества. 1903. Т. 37, № 2. С. 27-115.

5. *Тюреходжаев А.Н., Ибраев А.Г.* Продольные колебания рельса, лежащего на дискретном основании, с учетом диссипационного механизма // Изв. Кыргызского ГТУ. 2006. № 9, т II. С. 256-261.

Резюме

Дискретті серпімді негізде жатқан рельске қозғалыстағы төрт осьті вагондардан тұратын темір жол құрамасының «рельс–доңғалақ» жанасу нүктесіндегі құрғақ үйкелісті ескере отырып, рельстің бойлық тербелістерін ішінара дискреттеу әдісімен қарастырылады.

Summary

The report considers longitudinal vibration of rail which lies on the discrete elastic basis and along which the railway train which consist of tetraaxial vans is moving taking into account dry friction on a “wheel-rail” contact.

КазНТУ им. К. И. Сатпаева,
г. Алматы

Поступила 10.01.06г.