УДК 621.01

Ж. Ж. БАЙГУНЧЕКОВ[1], *Б. К. НУРАХМЕТОВ*[1], *Э. М. МАЖИЕВА*[2]

МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЗАМКНУТОСТИ КОНТУРОВ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПАРАЛЛЕЛЬНОГО МАНИПУЛЯТОРА ВИДА ВВВСССС

Получены символические и матричные уравнения замкнутости контуров пространственного параллельного манипулятора вида ВВВСССС (В – вращательная, С – сферическая кинематические пары).

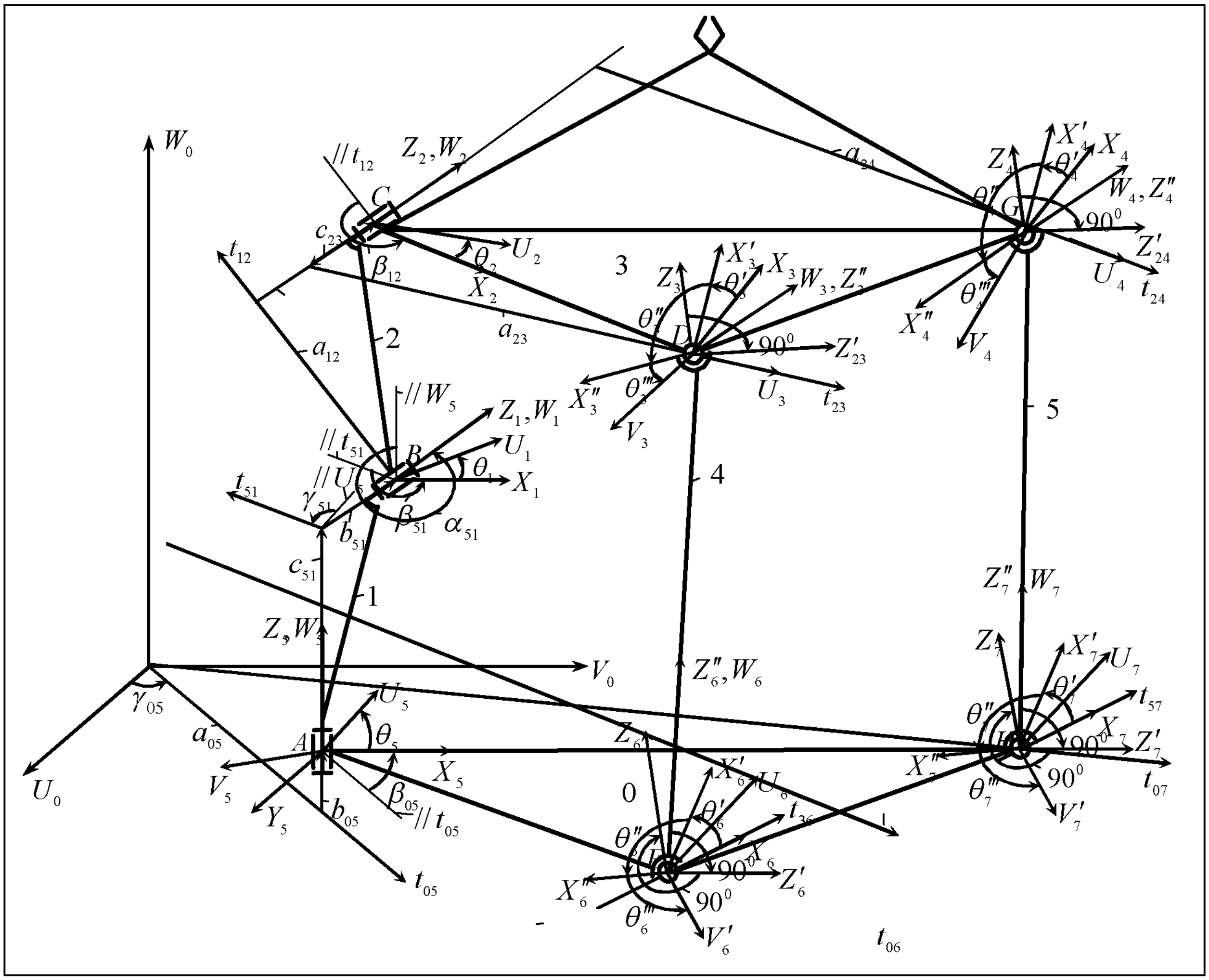
Пусть пространственный параллельный манипулятор (ППМ) содержит n кинематических пар, m обобщенных координат и L независимых контуров, а каждый контур l, (l=1,2,...,L) состоит из n_l звеньев.

Для упрощения записи уравнений кинематики и динамики контуры выбираются таким образом, чтобы все они содержали стойку и чтобы каждый контур отходил от стойки в одной и той же точке. Звенья каждого контура нумеруются последовательно, начиная со стойки, которой приписывается номер 1. Примыкающее к стойке через общую кинематическую пару звено получает номер 2 и т.д. вдоль контура до звена n_l, которое снова примыкает к стойке, замыкая контур. Заметим, что звено нулевой длины (например, при моделировании пружины двумя звеньями) также нумеруется и что какое-нибудь звено может входить более чем в один контур. Таким образом, a-му звену контура l приписывается пара индексов (l,a).

Системы координат, жестко связанные с каждым элементом в каждой кинематической паре, также имеют пару индексов (l,a). Например, системы координат $X_{l,a}Y_{l,a}Z_{l,a}$ и $U_{l,a}V_{l,a}W_{l,a}$ жестко соединены с элементами кинематической пары (l,a), соединяющей звено (l,a) с звеном (l, a+1).

Вектор $\vec{v}^{\,k}_{l,a}$ (k=1,2,3) переменных параметров кинематических пар подразделяется на зависимые переменные $h^{(k)}(l,a),(1 \le (l,a) \le n-m)$ и независимые переменные (обобщенные координаты) $q(l,a)$, $(n-m+1 \le (l,a) \le n)$. Здесь k – число переменных параметров кинематической пары (l,a), которое определяется степенями свободы данной кинематической пары. Например, для одноподвижных кинематических пар (вращательная, поступательная, винтовая) k = 1, для двухподвижных кинематических пар (цилиндрическая, сферическая с пальцем) k = 2 и для трехподвижных кинематических пар (сферическая, плоскостная) k = 3. В рассматриваемом ППМ позиционирующего типа с жесткой платформой в качестве входных кинематических пар использованы вращательные кинематические пары. Поэтому для обобщенных координат $q(l,a)$ k = 1. Таким образом, каждая кинематическая пара ППМ снабжена своим определенным номером, причем выходные и промежуточные кинематические пары нумеруются от 1 до (n–m), а входные кинематические пары – от (n–m+1) до n.

Изложенное продемонстрируем для ППМ вида **ВВВСССС** (см. рисунок). Рассматриваемый ППМ имеет 7 кинематических пар, n_l = 5 звеньев, m = 1 обобщенных координат и L = 2 контура. Соответствие между номерами кинематических пар ($P_{l,a}$) и осями $Z_{l,a}$, относительно которых происходит движение в этих парах, представлено в таблице.



Пространственный параллельный манипулятор вида ВВВСССС

l	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2
a	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
$(P_{l,a})$	5	1	2	3	6	5	1	2	4	7

Запишем символические уравнения замкнутости контуров рассматриваемого ППМ вида **ВВВСССС**

контур 1:

$$\underbrace{[P_0]}_{Пара\ 0}\underbrace{\left|\begin{matrix}a_{05}\\0\\b_{05}\\\beta_{05}\\0\\\gamma_{05}\end{matrix}\right|}_{Звено\ 0}\underbrace{[P_5]^B(\theta_{15})}_{Пара\ 5}\underbrace{\left|\begin{matrix}0\\\alpha_{11}\\b_{11}\\\beta_{11}\\c_{11}\\\gamma_{11}\end{matrix}\right|}_{Звено\ 1}\underbrace{[P_1]^B(\theta_{11})}_{Пара\ 1}\underbrace{\left|\begin{matrix}a_{12}\\0\\b_{12}\\\beta_{12}\\0\\\gamma_{12}\end{matrix}\right|}_{Звено\ 2}\underbrace{[P_2]^B(\theta_{12})}_{Пара\ 2}\underbrace{\left|\begin{matrix}a_{13}\\0\\0\\0\\c_{13}\\0\end{matrix}\right|}_{Звено\ 3}\underbrace{[P_3]^C\left(\theta'_{13},\theta''_{13},\theta''_{13}\right)}_{Пара\ 3}\underbrace{\left|\begin{matrix}0\\0\\0\\0\\c_{14}\\0\end{matrix}\right|}_{Звено\ 4}\underbrace{[P_6]^C\left(\theta'_{60},\theta''_{60},\theta'''_{60}\right)}_{Пара\ 4}\underbrace{\left|\begin{matrix}0\\0\\0\\0\\c_{60}\\0\end{matrix}\right|}_{Звено\ 5}=[E];\quad (1)$$

контур 2:

$$\underbrace{[P_0]}_{Пара\ 0}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{05} \\ 0 \\ b_{05} \\ \beta_{05} \\ 0 \\ \gamma_{05} \end{vmatrix}}_{Звено\ 0}\underbrace{[P_5]^B(\theta_{25})}_{Пара\ 5}\underbrace{\begin{vmatrix} 0 \\ \alpha_{21} \\ b_{21} \\ \beta_{21} \\ c_{21} \\ \gamma_{21} \end{vmatrix}}_{Звено\ 1}\underbrace{[P_1]^B(\theta_{21})}_{Пара\ 1}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{22} \\ 0 \\ b_{22} \\ \beta_{22} \\ 0 \\ \gamma_{22} \end{vmatrix}}_{Звено\ 2}\underbrace{[P_2]^B(\theta_{22})}_{Пара\ 2}\underbrace{\begin{vmatrix} a_{23} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_{23} \\ 0 \end{vmatrix}}_{Звено\ 3}\underbrace{[P_4]^C\left(\theta'_{24},\theta''_{24},\theta''_{24}\right)}_{Пара\ 4}\underbrace{\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_{25} \\ 0 \end{vmatrix}}_{Звено\ 5}\underbrace{[P_7]^C\left(\theta'_{70},\theta''_{70},\theta'''_{70}\right)}_{Пара\ 7}\underbrace{\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ c_{70} \\ 0 \end{vmatrix}}_{Звено\ 0} = [E]. \quad (2)$$

Символ [E] означает, что контур замкнут.

Пусть $\vec{r}_{l,a-1}^{(Z_{l,a-1})}$ является радиус-вектором точки на звене, содержащем систему координат $X_{l,a-1}Y_{l,a-1}Z_{l,a-1}$, т.е. на звене, которое предшествует кинематической паре (l, a–1), а $\vec{r}_{l,a-1}^{(W_{l,a-1})}$ является радиус-вектором той же точки в системе координат $U_{l,a-1}V_{l,a-1}W_{l,a-1}$ звена, следующим за кинематической парой (l, a–1). Тогда эти два радиус-вектора будут связаны матричным уравнением

$$\vec{r}_{l,a-1}^{(Z_{l,a-1})} = \left[P_{l,a-1}\right]\cdot \vec{r}_{l,a-1}^{(W_{l,a-1})} \quad (3)$$

или

$$\begin{bmatrix} 1 \\ X_{l,a-1} \\ Y_{l,a-1} \\ Z_{l,a-1} \end{bmatrix} = \left[P_{l,a-1}\right]\cdot \begin{bmatrix} 1 \\ U_{l,a-1} \\ V_{l,a-1} \\ W_{l,a-1} \end{bmatrix}, \quad (4)$$

где матрица $\left[P_{l,a-1}\right]$ кинематической пары (l, a–1) в зависимости от ее вида имеет форму. Матрица вращательной кинематической пары имеет вид

$$\left[P_j\right]^B\left(\theta_j\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_j & -\sin\theta_j & 0 \\ 0 & \sin\theta_j & \cos\theta_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Тогда матрица сферической кинематической пары записывается в форме

$$\left[P_j\right]^C\left(\theta'_{lj},\theta''_{lj},\theta'''_{lj}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \begin{matrix}\cos\theta'_{lj}\cdot\cos\theta''_{lj}\cdot\cos\theta'''_{lj} + \\ +\sin\theta'_{lj}\cdot\sin\theta'''_{lj}\end{matrix} & \begin{matrix}-\cos\theta'_{lj}\cdot\cos\theta''_{lj}\cdot\sin\theta'''_{lj} + \\ +\sin\theta'_{lj}\cdot\cos\theta'''_{lj}\end{matrix} & \cos\theta'_{lj}\cdot\sin\theta''_{lj} \\ 0 & \begin{matrix}\sin\theta'_{lj}\cdot\cos\theta''_{lj}\cdot\cos\theta'''_{lj} - \\ -\cos\theta'_{lj}\cdot\sin\theta'''_{lj}\end{matrix} & \begin{matrix}\sin\theta'_{lj}\cdot\cos\theta''_{lj}\cdot\sin\theta'''_{lj} - \\ -\cos\theta'_{lj}\cdot\cos\theta'''_{lj}\end{matrix} & \sin\theta'_{lj}\cdot\sin\theta''_{lj} \\ 0 & \sin\theta''_{lj}\cdot\cos\theta'''_{lj} & -\sin\theta''_{lj}\cdot\sin\theta'''_{lj} & -\cos\theta''_{lj} \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Матричное уравнение связи между радиус-векторами $\vec{r}_{l,a-1}^{(W_{l,a-1})}$ и $\vec{r}_{l,a}^{(Z_{l,a})}$ данной точки, измеренными в двух системах $U_{l,a-1}V_{l,a-1}W_{l,a-1}$ и $X_{l,a}Y_{l,a}Z_{l,a}$, жестко связанных на двух концах звена (l,a), имеет вид

$$\vec{r}_{l,a-1}^{(W_{l,a-1})} = \left[T_{l,a-1}\right] \cdot \vec{r}_{l,a}^{(Z_{l,a})} \tag{7}$$

или

$$\begin{bmatrix} 1 \\ U_{l,a-1} \\ V_{l,a-1} \\ W_{l,a-1} \end{bmatrix} = \left[T_{l,a-1}\right] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ X_{l,a} \\ Y_{l,a} \\ Z_{l,a} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Подставляя значение радиус-вектора $\vec{r}_{l,a-1}^{(W_{l,a-1})}$ из уравнения (7) в уравнение (3), получаем

$$\vec{r}_{l,a-1}^{(Z_{l,a-1})} = \left[P_{l,a-1}\right] \cdot \left[T_{l,a-1}\right] \cdot \vec{r}_{l,a}^{(Z_{l,a})}. \tag{9}$$

Если исключить верхний индекс $Z_{l,a-1}$ радиус-вектора $\vec{r}_{l,a-1}^{(Z_{l,a-1})}$ и принять обозначение

$$\left[A_{l,a-1}\right] = \left[P_{l,a-1}\right] \cdot \left[T_{l,a-1}\right], \tag{10}$$

то уравнение (9) принимает вид

$$\vec{r}_{l,a-1} = \left[A_{l,a-1}\right] \cdot \vec{r}_{l,a}. \tag{11}$$

Последовательно выполняя преобразование (11) для всех звеньев контура и замечая, что все контуры замкнуты, имеем

а) для контура 1

$$\left[A_{05}\right] \cdot \left[A_{15}\right] \cdot \left[A_{11}\right] \cdot \left[A_{12}\right] \cdot \left[A_{13}\right] \cdot \left[A_{10}\right] = \left[E\right], \tag{12}$$

б) для контура 2

$$\left[A_{05}\right] \cdot \left[A_{25}\right] \cdot \left[A_{21}\right] \cdot \left[A_{22}\right] \cdot \left[A_{24}\right] \cdot \left[A_{20}\right] = \left[E\right], \tag{13}$$

где [E] – единичная матрица.

Уравнения (12) и (13), которые называются матричными уравнениями замкнутости контуров, устанавливают связь между зависимыми и независимыми переменными.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Baigunchekov Zh.Zh., Nurakhmetov B.K.* Kinematics of the Parallel Manipulators with Functionally Independent Drives (Part I & II). The XI World IFToMM Congress. 1-4 April, 2004, Tianjin, China. 1647-1655 p.

Резюме

Кеңістіктік параллель манипулятордың АААСССС түрінің (А – айналмалы, С – сфералық кинематикалық жұп) тұйықталған контурларының символикалық және матрицалық теңдеулері алынды.

Summary

The contours symbolical and matrix equations of the spatial parallel manipulator of a kind RRRSSSS (B – rotary, C – spherical kinematic pairs) are received.

[1]*Казахстанско-Британский технический университет, г. Алматы;*
[2]*Алматинский технологический университет, г. Алматы*
Поступила 02.02.06г.