УДК 621.01

Ж. Ж. БАЙГУНЧЕКОВ, Б. К. НУРАХМЕТОВ, Ж. М. МЫРЗАГЕЛЬДИЕВА

УРАВНЕНИЯ РАВНОВЕСИЯ БИНАРНОГО ЗВЕНА ВИДА ЦЦ

С каждым элементом кинематических пар *i* и *j* бинарного звена *j* вида **ЦЦ** (где Ц – цилиндрическая кинематическая пара) (см. рисунок) жестко связываем системы координат $X_iY_iZ_i$, $U_iV_iW_i$ и $X_jY_jZ_j$, $U_jV_jW_j$, причем системы координат $X_iY_iZ_i$ и $X_jY_jZ_j$ жестко связаны со звеньями *i* и *j* соответственно, а системы координат $U_kV_kW_k$ и $U_jV_jW_j$ – со звеньями *j* и *k* соответственно.

Начала и координатные оси названных систем координат выбраны следующим образом:

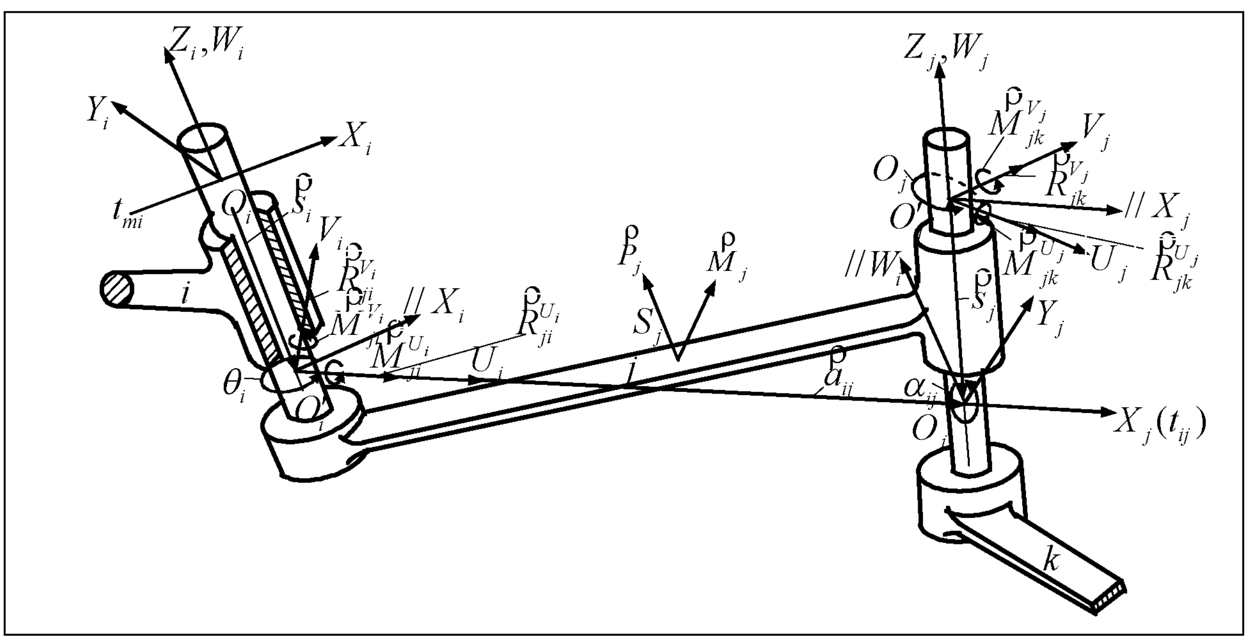
– координатные оси Z_i, W_i и Z_j, W_j лежат вдоль осей вращений и поступательных движений цилиндрических кинематических пар *i* и *j* и их положительные направления совпадают;

– начала O_i и O_j систем координат $X_iY_iZ_i$ и $X_jY_jZ_j$ находятся в точках пересечений координатных осей Z_i и Z_j с общими перпендикулярами t_{mi} и t_{ij} между осями W_m и Z_i, а также W_i и Z_j, где W_m – координатная ось кинематической пары *m*, расположенной в начале звена *i*;

– координатные оси X_i и X_j лежат вдоль общих перпендикуляров t_{mi} и t_{ij} и их положительные направления совпадают с направлениями векторов $\vec{a}_{mi}$ и $\vec{a}_{ij}$, модули которых равны расстояниям между осями W_m и Z_i, W_i и Z_j и направлены от осей W_m и W_i к осям Z_i и Z_j;

– начала $O_i^{/}$ и $O_j^{/}$ систем координат $U_iV_iW_i$ и $U_jV_jW_j$ находятся в точках пересечения координатных осей W_i и W_j с общими перпендикулярами t_{ij} и t_{jk}, где t_{jk} – общий перпендикуляр между осями W_j и Z_k;

– координатные оси U_i и U_j лежат вдоль общих перпендикуляров t_{ij} и t_{jk} и их положительные направления совпадают с направлениями векторов $\vec{a}_{ij}$ и $\vec{a}_{jk}$.



Бинарное звено вида **ЦЦ**

Матрицы бинарного звена *j* вида **ЦЦ** и цилиндрической кинематической пары *j* имеют вид

$$\left[G_{ij}\right]^{ЦЦ} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{ij} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha_{ij} & -\sin\alpha_{ij} \\ 0 & 0 & \sin\alpha_{ij} & \cos\alpha_{ij} \end{bmatrix} \quad (1)$$

и

$$\left[P_j\right]^{Ц} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_j & -\sin\theta_j & 0 \\ 0 & \sin\theta_j & \cos\theta_j & 0 \\ a_j & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где α_{ij} – угол между осями W_i и Z_j, измеренный против хода часовой стрелки вокруг положительного направления оси X_j; a_j – расстояние от точки O_j до точки O_j', a_j является положительным, если направление вектора $\vec{a}_j$ совпадает с положительным направлением оси Z_j, где $\vec{a}_j$ – вектор, направленный вдоль координатной оси Z_j от точки O_j к точке O_j'; θ_j – угол между осями X_j и U_j, измеренный против хода часовой стрелки вокруг положительного направления оси Z_j.

Все внешние силы и моменты, действующие на звено *j*, в том числе силы и моменты сил инерции звена, приводим в точку приведения S_j к главному вектору $\vec{P}_j$ и главному моменту $\vec{M}_j$. Под действием $\vec{P}_j$ и $\vec{M}_j$ в кинематических парах *i* и *j* возникают силы реакции.

Силы реакции в кинематических парах *i* и *j*, действующие на звено *j* со стороны звеньев *i* и *k*, приводим в точки O_i' и O_j' и заменим их главными векторами $\vec{R}_{ji}, \vec{R}_{jk}$ и главными моментами $\vec{M}_{ji}, \vec{M}_{jk}$, которые в системах координат $U_iV_iW_i$ и $U_jV_jW_j$ имеют следующие компоненты:

$$\left.\begin{aligned} \vec{R}_{ji} &= \left[R_{ji}^{U_i}, R_{ji}^{V_i}, 0\right] \\ \vec{M}_{ji} &= \left[M_{ji}^{U_i}, M_{ji}^{V_i}, 0\right] \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \vec{R}_{jk} &= \left[R_{jk}^{U_j}, R_{jk}^{V_j}, 0\right] \\ \vec{M}_{jk} &= \left[M_{jk}^{U_j}, M_{jk}^{V_j}, 0\right] \end{aligned}\right\}. \quad (4)$$

Главные векторы $\vec{P}_j, \vec{R}_{jk}$ и главные моменты $\vec{M}_j, \vec{M}_{jk}$ в системе координат $U_iV_iW_i$ имеют компоненты

$$\left.\begin{aligned} \vec{P}_j &= \left[P_j^{U_i}, P_j^{V_i}, P_j^{W_i}\right] \\ \vec{M}_j &= \left[M_j^{U_i}, M_j^{V_i}, M_j^{W_i}\right] \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

и

$$\left.\begin{aligned} \vec{R}_{jk} &= \left[R_{jk}^{U_i}, R_{jk}^{V_i}, R_{jk}^{W_i}\right] \\ \vec{M}_{jk} &= \left[M_{jk}^{U_i}, M_{jk}^{V_i}, M_{jk}^{W_i}\right] \end{aligned}\right\}. \quad (6)$$

Главный вектор $\vec{P}_j$ и главный момент $\vec{M}_j$ внешних сил, а также силу и момент реакции $\vec{R}_{jk}$ и $\vec{M}_{jk}$ в кинематической паре *j* приведем в точку O_i' – начало системы координат и $U_iV_iW_i$.

Тогда уравнения равновесия звена *j* имеют вид

$$\left.\begin{aligned} R_{ji}^{U_i} + P_j^{U_i} + R_{jk}^{U_i} &= 0 \\ R_{ji}^{V_i} + P_j^{V_i} + R_{jk}^{V_i} &= 0 \\ P_j^{W_i} + R_{jk}^{W_i} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

и

$$\left.\begin{aligned} M_{ji}^{U_i} + M_{jk}^{U_i} + M_{O_i'}^{U_i}\left(\vec{R}_{jk}\right) + M_j^{U_i} + M_{O_i'}^{U_i}\left(\vec{P}_j\right) &= 0 \\ M_{ji}^{V_i} + M_{jk}^{V_i} + M_{O_i'}^{V_i}\left(\vec{R}_{jk}\right) + M_j^{V_i} + M_{O_i'}^{V_i}\left(\vec{P}_j\right) &= 0 \\ + M_{jk}^{W_i} + M_{O_i'}^{W_i}\left(\vec{R}_{jk}\right) + M_j^{W_i} + M_{O_i'}^{W_i}\left(\vec{P}_j\right) &= 0 \end{aligned}\right\}, \quad (8)$$

где компоненты силы реакции $\vec{R}_{jk}$ и момента реакции $\vec{M}_{jk}$ в системах координат $U_iV_iW_i$ и

$U_jV_jW_j$ связаны между собой следующими матричными уравнениями:

$$\begin{bmatrix} R_{jk}^{U_i} \\ R_{jk}^{V_i} \\ R_{jk}^{W_i} \end{bmatrix} = \left[g_{ij}\right]^{ЦЦ} \cdot \left[p_j\right]^{Ц} \cdot \begin{bmatrix} R_{jk}^{U_j} \\ R_{jk}^{V_j} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (9)$$

$$\begin{bmatrix} M_{jk}^{U_i} \\ M_{jk}^{V_i} \\ M_{jk}^{W_i} \end{bmatrix} = \left[g_{ij}\right]^{ЦЦ} \cdot \left[p_j\right]^{Ц} \cdot \begin{bmatrix} M_{jk}^{U_j} \\ M_{jk}^{V_j} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad (10)$$

где $\left[g_{ij}\right]^{ЦЦ}$ и $\left[p_j\right]^{Ц}$ – подматрицы вращения матриц (1) и (2).

Подставляя подматрицы вращения $\left[g_{ij}\right]^{ЦЦ}$ и $\left[p_j\right]^{Ц}$ в уравнения (9) и (10), получим

$$\left.\begin{aligned} R_{jk}^{U_i} &= l_{11}^j R_{jk}^{U_j} + l_{12}^j R_{jk}^{V_j} \\ R_{jk}^{V_i} &= l_{21}^j R_{jk}^{U_j} + l_{22}^j R_{jk}^{V_j} \\ R_{jk}^{W_i} &= l_{91}^j R_{jk}^{U_j} + l_{92}^j R_{jk}^{V_j} \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

и

$$\left.\begin{aligned} M_{jk}^{U_i} &= l_{11}^j M_{jk}^{U_j} + l_{12}^j M_{jk}^{V_j} \\ M_{jk}^{V_i} &= l_{21}^j M_{jk}^{U_j} + l_{22}^j M_{jk}^{V_j} \\ M_{jk}^{W_i} &= l_{91}^j M_{jk}^{U_j} + l_{92}^j M_{jk}^{V_j} \end{aligned}\right\}, \qquad (12)$$

где

$l_{11}^j = -\cos\theta_j; l_{12}^j = -\sin\theta_j; l_{19}^j = 0; l_{21}^j = \cos\alpha_{ij}\sin\theta_j$,

$l_{22}^j = \cos\alpha_{ij}\cos\theta_j; l_{29}^j = \sin\alpha_{ij}; l_{91}^j = \sin\alpha_{ij}\sin\theta_j$,

$l_{92}^j = \sin\alpha_{ij}\cos\theta_j; l_{99}^j = \cos\alpha_{ij}$.

Тогда уравнения сил (7) бинарного звена j принимают вид

$$\left.\begin{aligned} R_{ji}^{U_i} + l_{11}^j R_{jk}^{U_j} + l_{12}^j R_{jk}^{V_j} &= -P_j^{U_i} \\ R_{ji}^{V_i} + l_{21}^j R_{jk}^{U_j} + l_{22}^j R_{jk}^{V_j} &= -P_j^{V_i} \\ l_{91}^j R_{jk}^{U_j} + l_{92}^j R_{jk}^{V_j} &= -P_j^{W_i} \end{aligned}\right\}. \qquad (13)$$

В системе уравнений (8) величины $M_{O_i'}^{U_i}\left(\vec{R}_{jk}\right)$, $M_{O_i'}^{V_i}\left(\vec{R}_{jk}\right)$ и $M_{O_i'}^{W_i}\left(\vec{R}_{jk}\right)$ являются компонентами вектора момента силы реакции $\vec{R}_{jk}$ относительно точки O_i' в системе координат $U_iV_iW_i$, определяемого выражением

$$\vec{M}_{O_i'}\left(\vec{R}_{jk}\right) = \vec{r}_i^{\,O_j'} \times \vec{R}_{jk} = \begin{vmatrix} \vec{u}_i & \vec{v}_i & \vec{w}_i \\ U_i^{O_j'} & V_i^{O_j'} & W_i^{O_j'} \\ R_{jk}^{U_i} & R_{jk}^{V_i} & R_{jk}^{W_i} \end{vmatrix}, \qquad (14)$$

где $\vec{u}_i, \vec{v}_i, \vec{w}_i$ – единичные векторы системы координат $U_iV_iW_i$; $U_i^{O_j'}$, $V_i^{O_j'}$, $W_i^{O_j'}$ – координаты точки приложения O_j' силы реакции $\vec{R}_{jk}$ в системе $U_iV_iW_i$.

Корме того, точка O_j' в системе координат $X_jY_jZ_j$ имеет координаты $\left[0,0,a_j\right]$. Тогда между координатами точки O_j' в системах координат $U_iV_iW_i$ и $X_jY_jZ_j$ существует связь в виде уравнений

$$\begin{bmatrix} 1 \\ U_i^{O_j'} \\ V_i^{O_j'} \\ W_i^{O_j'} \end{bmatrix} = \left[G_{ij}\right]^{ЦЦ} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ a_j \end{bmatrix}. \qquad (15)$$

Подставляя в уравнения (15) матрицу (1), получим

$$\left.\begin{aligned} U_i^{O_j'} &= a_{ij} \\ V_i^{O_j'} &= -a_j \cdot \sin\alpha_{ij} \\ W_i^{O_j'} &= a_j \cdot \cos\alpha_{ij} \end{aligned}\right\}. \qquad (16)$$

Если подставить (16) и (11) в определитель (14) и раскрыть его относительно элементов первой строки, то получим

$$\left. \begin{aligned} M_{O_i'}^{U_i}\left(\vec{R}_{jk}\right) &= h_{11}^{j} R_{jk}^{U_j} + h_{12}^{j} R_{jk}^{V_j} \\ M_{O_i'}^{V_i}\left(\vec{R}_{jk}\right) &= h_{21}^{j} R_{jk}^{U_j} + h_{22}^{j} R_{jk}^{V_j} \\ M_{O_i'}^{W_i}\left(\vec{R}_{jk}\right) &= h_{91}^{j} R_{jk}^{U_j} + h_{92}^{j} R_{jk}^{V_j} \end{aligned} \right\}, \quad (17)$$

где

$$h_{11}^{j} = -a_j \sin\theta_j ; h_{12}^{j} = -a_j \cos\theta_j ,$$

$$h_{21}^{j} = a_j \cos\alpha_{ij} \cos\theta_j - a_{ij} \sin\alpha_{ij} \sin\theta_j ,$$

$$h_{22}^{j} = -\left(a_j \cos\alpha_{ij} \sin\theta_j + a_{ij} \sin\alpha_{ij} \cos\theta_j\right),$$

$$h_{91}^{j} = a_j \cos\alpha_{ij} \cos\theta_j + a_{ij} \cos\alpha_{ij} \sin\theta_j ,$$

$$h_{92}^{j} = a_j \cos\alpha_{ij} \cos\theta_j - a_j \sin\alpha_{ij} \sin\theta_j .$$

Подставляя (17) и (12) в систему уравнений (8), имеем уравнения моментов

$$\left. \begin{aligned} M_{ji}^{U_i} + l_{11}^{j} M_{jk}^{U_j} + l_{12}^{j} M_{jk}^{V_j} + h_{11}^{j} R_{jk}^{U_j} + h_{12}^{j} R_{jk}^{V_j} &= \\ = -M_j^{U_i} - M_{O_i'}^{U_i}\left(\vec{P}_j\right)&, \\ M_{ji}^{V_i} + l_{21}^{j} M_{jk}^{U_j} + l_{22}^{j} M_{jk}^{V_j} + h_{21}^{j} R_{jk}^{U_j} + h_{22}^{j} R_{jk}^{V_j} &= \\ = -M_j^{V_i} - M_{O_i'}^{V_i}\left(\vec{P}_j\right)&, \\ l_{91}^{j} M_{jk}^{U_j} + l_{92}^{j} M_{jk}^{V_j} + h_{91}^{j} R_{jk}^{U_j} + h_{92}^{j} R_{jk}^{V_j} &= \\ = -M_j^{W_i} - M_{O_i'}^{W_i}\left(\vec{P}_j\right)&, \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

которые совместно с системой уравнений сил (13) составляют уравнения равновесия бинарного звена j вида **ЦЦ**.

Системы уравнений равновесия (13) и (18) представим в матричном виде

$$\left[R_{ji}\right] = \left[L_{ij}\right] \cdot \left[R_{jk}\right] + \left[Q_j\right], \quad (19)$$

$$\left[M_{ji}\right] = \left[L_{ij}\right] \cdot \left[M_{jk}\right] + \left[H_{ij}\right] \cdot \left[R_{jk}\right] + \left[M_j\right], \quad (20)$$

где

$$\left[R_{ji}\right] = \begin{bmatrix} R_{ji}^{U_i} \\ R_{ji}^{V_i} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \left[R_{jk}\right] = \begin{bmatrix} R_{jk}^{U_j} \\ R_{jk}^{V_j} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \left[Q_j\right] = \begin{bmatrix} P_j^{U_i} \\ P_j^{V_i} \\ P_j^{W_i} \end{bmatrix};$$

$$\left[M_{ji}\right] = \begin{bmatrix} M_{ji}^{U_i} \\ M_{ji}^{V_i} \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \left[M_{jk}\right] = \begin{bmatrix} M_{jk}^{U_j} \\ M_{jk}^{V_j} \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\left[M_j\right] = -\begin{bmatrix} M_j^{U_i} + M_{O_i'}^{U_i}\left(\vec{P}_j\right) \\ M_j^{V_i} + M_{O_i'}^{V_i}\left(\vec{P}_j\right) \\ M_j^{W_i} + M_{O_i'}^{W_i}\left(\vec{P}_j\right) \end{bmatrix};$$

$$\left[L_{ij}\right] = -\begin{bmatrix} l_{11}^{j} & l_{12}^{j} & l_{19}^{j} \\ l_{21}^{j} & l_{22}^{j} & l_{29}^{j} \\ l_{91}^{j} & l_{92}^{j} & l_{99}^{j} \end{bmatrix}; \left[H_{ij}\right] = -\begin{bmatrix} h_{11}^{j} & h_{12}^{j} & 0 \\ h_{21}^{j} & h_{22}^{j} & 0 \\ h_{91}^{j} & h_{92}^{j} & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, бинарное звено j вида **ЦЦ** содержит 6 уравнений равновесия (13) и (18) с 8 неизвестными: $R_{ji}^{U_i}$, $R_{ji}^{V_i}$, $R_{jk}^{U_j}$, $R_{jk}^{V_j}$, $M_{ji}^{U_i}$, $M_{ji}^{V_i}$, $M_{jk}^{U_j}$, $M_{jk}^{V_j}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Baigunchekov Zh.Zh., Nurakhmetov B.K.* and e.a. Kinematics of the Parallel Manipulators with Functionally Independent Drives (Part I and II). The XI World IFToMM Congress. 1-4 April, 2004, Tianjin, China. 1647-1656 p.

Резюме

ЦЦ типті (Ц – цилиндрлік кинематикалық жұп) бинарлық буынның тепе-теңдік теңдеулері құрастырылған.

Summary

In the given paper the equilibrium equations of a **CC** binary link are made.

Казахстанско-Британский технический университет, г. Алматы

Поступила 02.02.06г.