УДК 517.927.25

М. А. САДЫБЕКОВ, А. М. САРСЕНБИ

ОБ УСЛОВИЯЗ БЕЗУСЛОВНОЙ БАЗИСНОСТИ НЕКОТОРОЙ СПЕЦИАЛЬНО ВЫБРАННОЙ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ

(Представлена академиком Т. Ш. Кальменовым)

Установлены условия безусловной базисности системы $\{u_{k0}, u_{k1} + cu_{k0}\}$ при единственном требовании безусловной базисности системы $\{u_{k0}, u_{k1}\}$.

Новый эффект был обнаружен при изучении несамосопряженных краевых задач, обладающих бесконечным числом присоединенных функций. Оказывается, полная и минимальная система собственных и присоединенных функций дифференциального оператора L, удовлетворяющая уравнению

$$Lu_{k0} = \lambda_k u_{k0},\ Lu_{k1} = \lambda_k u_{k1} - u_{k0}, \qquad (*)$$

может образовать базис в пространстве $L_2(G)$ при одном выборе присоединенных функций и потерять это свойство при другом выборе присоединенных функций. Конкретным примером, подтверждающим этот эффект, может служить следующая задача [1], [2]:

$$-u''(x) = \lambda u(x),\ x \in (0,1),\ u(0) = 0, \quad u'(0) = u'. \ (1)$$

Система собственных и присоединенных функций этой задачи $\{x,\ \sin 2k\pi x,\ -x(4k\pi)^{-1}\cos 2k\pi x\}$, k=1,2,..., образует безусловный базис пространства $L_2(0,1)$, в то время как система $\{x,\ \sin 2k\pi x,\ -x(4k\pi)^{-1}\cos 2k\pi x + c\sin 2k\pi x\}$, также состоящая из собственных и присоединенных функций той же задачи, не образует базиса в $L_2(0,1)$ при любом $c \neq 0$.

В связи с возникшей проблемой естественным образом встает вопрос: каким соотношениям должны удовлетворять собственные и присоединенные функции, чтобы указанного выше эффекта не было?

Изучение этого вопроса составляет основное содержание настоящей заметки.

Формулировка и доказательство основных результатов. Пусть G – некоторый конечный интервал числовой оси и пусть $\{u_{k0}, u_{k1}\}$– произвольная полная в $L_2(G)$ и минимальная система. Тогда существует единственная система $\{\upsilon_{k0}, \upsilon_{k1}\}$, называемая биортогонально сопряженной к предыдущей системе и удовлетворяющая условиям

$$(u_{k0}, \upsilon_{k0}) = 1,\ (u_{k1}, \upsilon_{k1}) = 1,$$

$$(u_{k0}, \upsilon_{k1}) = 0,\ (u_{k1}, \upsilon_{k0}) = 0,$$

где символом $(\cdot,\cdot)$ обозначено скалярное произведение в $L_2(G)$. Всюду в дальнейшем символом $\|\cdot\|$ обозначены нормы в $L_2(G)$. Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Пусть система $\{u_{k0}, u_{k1}\}$ – безусловный базис пространства $L_2(G)$. Тогда, для того чтобы система $\{u_{k0}, u_{k1} + cu_{k0}\}$ была безусловным базисом в $L_2(G)$ необходимо и достаточно выполнение неравенств

$$\| u_{k0} \| \cdot \| \upsilon_{k0} - \bar{c}\upsilon_{k1} \| \le c_1 < \infty, \qquad (1)$$

$$\| u_{k1} + cu_{k0} \| \cdot \| \upsilon_{k1} \| \le c_2 < \infty, \qquad (2)$$

Доказательство. Легко проверить, что системы $\{u_{k0}, u_{k1} + cu_{k0}\}$ и $\{\upsilon_{k0} - \bar{c}\upsilon_{k1}, \upsilon_{k1}\}$ являются биортонормированными. Так, если система $\{u_{k0},\ u_{k1} + cu_{k0}\}$– безусловный базис, то неравенства (1), (2) всегда выполнены [3, с. 372]. Докажем достаточность условий (1), (2). Помимо этих неравенств в силу безусловной базисности системы $\{u_{k0}, u_{k1}\}$, мы в качестве необходимого условия базисности имеем оценки

$$\| u_{k0} \| \cdot \| \upsilon_{k0} \| \le c_3, \qquad (3)$$

$$\| u_{k1} \| \cdot \| \upsilon_{k1} \| \le c_4. \qquad (4)$$

С помощью оценок (3), (4) можно получить оценку для величины $\| u_{k0} \| \cdot \| \upsilon_{k1} \|$. Это будет следовать из следующих цепочек неравенств:

$$|c|\cdot\|u_{k0}\|\cdot\|\upsilon_{k1}\|=\|u_{k0}\|\cdot\|\bar{c}\upsilon_{k1}-\upsilon_{k0}+\upsilon_{k0}\|\le$$

$$\le\|u_{k0}\|\cdot\left[\ \|\upsilon_{k0}-\bar{c}\ \upsilon_{k1}\|+\|\upsilon_{k0}\|\ \right]=$$

$$=\|u_{k0}\|\cdot\|\upsilon_{k0}-\bar{c}\upsilon_{k1}\|+\|u_{k0}\|\cdot\|\upsilon_{k0}\|\le c_1+c_3 .$$

Мы получили еще одну оценку

$$\|u_{k0}\|\cdot\|\upsilon_{k1}\|\le c_5 , \qquad (5)$$

где $c_5=\dfrac{(c_1+c_3)}{|c|}$.

Теперь нам нужно доказать сходимость биортогонального разложения

$$f(x)=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\big(f,\upsilon_{k0}-\bar{c}\upsilon_{k1}\big)\cdot u_{k0}+(f,\upsilon_{k1})\cdot(u_{k1}+cu_{k0})\Big]. \qquad (6)$$

Так как система $\{u_{k0},u_{k1}\}$ – безусловный базис, то сходится следующий ряд:

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\Big[\big(f,\upsilon_{k0}\big)\cdot u_{k0}+(f,\upsilon_{k1})\cdot u_{k1}\Big] . \qquad (7)$$

Поэтому для сходимости ряда (6) достаточно показать сходимость ряда

$$J=\sum_{k=1}^{\infty}c\,(f,\upsilon_{k1})\cdot u_{k0} . \qquad (8)$$

Заметим, что если $\{\upsilon_{k0},\upsilon_{k1}\}$ – безусловный базис, то система $\left\{\dfrac{\upsilon_{k0}}{\|\upsilon_{k0}\|},\dfrac{\upsilon_{k1}}{\|\upsilon_{k1}\|}\right\}$ – базис Рисса.

Тогда система $\{u_{k0}\|\upsilon_{k0}\|,u_{k1}\|\upsilon_{k1}\|\}$ – также базис Рисса, и для коэффициентов биортогонального разложения таких базисов справедливо неравенство Бесселя

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left|\left(f,\frac{\upsilon_{k1}}{\|\upsilon_{k1}\|}\right)\right|^2=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left|(f,\upsilon_{k1})\right|^2}{\|\upsilon_{k1}\|^2}\le c_6\|f\|^2 . \qquad (9)$$

Далее в силу оценок (5), (9) из (8) имеем

$$\|J\|^2\le\sum_{k=1}^{\infty}|c|^2\left|(f,\upsilon_{k1})\right|^2\cdot\|u_{k0}\|^2=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left|(f,\upsilon_{k1})\right|^2}{\|\upsilon_{k1}\|^2}\cdot|c|^2\cdot\|u_{k0}\|^2\cdot\|\upsilon_{k1}\|^2\le$$

$$\le|c|^2\cdot c_5^2\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left|(f,\upsilon_{k1})\right|^2}{\|\upsilon_{k1}\|^2}\le c_7\|f\|^2,$$

где $c_7=|c|^2\cdot c_5^2\cdot c_6$.

Итак, выполнение оценок (1)–(4) влечет за собой оценку (5), а та, в свою очередь, – сходимость ряда (8). Сходимость рядов (7) и (8) обеспечивает сходимость ряда (6). Это значит, что система $\{u_{k0},u_{k1}+cu_{k0}\}$ – базис пространства $L_2(G)$. Теорема 1 доказана.

В спектральной теории несамосопряженных дифференциальных операторов оценки типа (1)–(4) называются условием базисности В. А. Ильина. Необходимость этих условий известна давно [3, с. 372]. Достаточность условий вида (1)–(4) для базисности систем корневых функций дифференциальных операторов впервые доказана В. А. Ильиным (см., например, [4]). Недавно одним из авторов настоящей статьи установлено еще несколько условий безусловной базисности систем корневых функций обыкновенного дифференциального оператора второго порядка [5–7].

На следующем этапе наших исследований установлен следующий результат.

Теорема 2. Пусть система $\{u_{k0},u_{k1}\}$ – безусловный базис пространства $L_2(G)$. Для того чтобы система $\{u_{k0},u_{k1}+cu_{k0}\}$ была безусловным базисом в $L_2(G)$, необходимо и достаточно выполнение равномерной оценки

$$\|u_{k0}\|\le c_8\|u_{k1}\| \qquad (10)$$

для всех номеров k.

Доказательство. Докажем необходимость условия (10). Пусть система $\{u_{k0},u_{k1}+cu_{k0}\}$ – безусловный базис. Тогда выполнены оценки (1), (2), (3), (4) и (5). В силу биортонормированности систем $\{u_{k0},u_{k1}\}$ и $\{\upsilon_{k0},\upsilon_{k1}\}$, оценку (4) можно записать в виде

$$1=(u_{k1},\upsilon_{k1})\le\|u_{k1}\|\cdot\|\upsilon_{k1}\|\le c_4,$$

откуда следует

$$\frac{1}{\|u_{k1}\|}\le\|\upsilon_{k1}\|\le\frac{c_4}{\|u_{k1}|} .$$

В (5) воспользуемся этим соотношением

$$\frac{\|u_{k0}\|}{\|u_{k1}\|}\le \mathrm{c}_5$$

или

$$\|u_{k0}\|\le \mathrm{c}_5\|u_{k1}\|,\ c_8=c_5 .$$

Для доказательства достаточности покажем, что из (10) следуют условия (1) и (2). Неравенства (1) выполнены, так как

$$\| u_{k0} \| \cdot \| \upsilon_{k0} - \bar{c}\upsilon_{k1} \| \le \| u_{k0} \| \cdot \| \upsilon_{k0} \| +$$
$$+ | c | \cdot \| u_{k0} \| \cdot \| \upsilon_{k1} \| \le \| u_{k0} \| \cdot \| \upsilon_{k0} \| +$$
$$+ | c | \cdot c_8 \| u_{k1} \| \cdot \| \upsilon_{k1} \| \le c_3 + | c | \cdot c_8 \cdot c_4 .$$

Здесь мы воспользовались соотношениями (3), (4), которые выполнены вследствие базисности системы $\{u_{k0}, u_{k1}\}$. Аналогичным образом устанавливается выполнение условия (2). Теорема доказана.

Следует отметить, что доказанные теоремы 1 и 2 носят общий характер. Рассматриваемая нами система не связана с дифференциальным оператором. Для собственных и присоединенных функций дифференциального оператора L, порожденного дифференциальным выражением

$$Lu = -u''(x) + q(x)u(x), \; x \in G, \qquad (11)$$

и какими-нибудь краевыми условиями, справедливы оценки (см., например, [4])

$$\| u_{k0} \| \le c_9 \, | \sqrt{\lambda} \, | \cdot \| u_{k1} \| \qquad (12)$$

при условии $\left| \operatorname{Im} \sqrt{\lambda} \right| \le \text{const}, \; q(x) \in L_1(G)$.

В спектральной теории несамосопряженных дифференциальных операторов оценки типа (10) или (12) впервые были введены В.А.Ильиным и названы антиаприорными оценками. Как показывает утверждение теоремы 2, важное значение в этих оценках имеет порядок относительно λ.

Для дифференциального оператора L, порожденного дифференциальным выражением (11), можно построить цепочки присоединенных функций по другой формуле, нежели (*), и тогда для собственных и присоединенных функций будут выполнены оценки (10).

Получение настоящих результатов стимулировали работы [1], [2].

Авторы выражают глубокую благодарность Т. Ш. Кальменову, Б. Е. Кангужину, а также всем участникам научного семинара под руководством д. ф.-м. н. М. А. Садыбекова за неоднократное обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ильин В.А.* О существовании приведенной системы собственных и присоединенных функций у несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора // Тр. МИ АН СССР. 1976. Т. 142. С. 148-155.

2. *Ионкин Н.И.* Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения. 1977. Т. 13. С. 294-304.

3. *Гохберг И.Ц., Крейн М.Г.* Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. М., 1965. 448 с.

4. *Ильин В.А.* О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора второго порядка // ДАН СССР. 1983. Т. 273, № 4. С. 1048-1053.

5. *Сарсенби А.М.* Критерий базисности Рисса корневых функций дифференциального оператора второго порядка // Докл. НАН РК. 2006. №1. С. 44-48.

6. *Сарсенби А.М.* Необходимые и достаточные условия базисности Рисса систем корневых функций оператора Шредингера // Изв. НАН РК. Сер. физ.-мат. 2006. №1. С. 32-34.

7. *Сарсенби А.М.* Об одном условии базисности Рисса корневых векторов операторов второго порядка // Вестник НАН РК. 2006. №1. С. 38-41.

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, г. Шымкент

Поступила 14.03.06г.