УДК 517.927.25

А. М. САРСЕНБИ

НЕРЕГУЛЯРНЫЕ КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ В СЛУЧАЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

(Представлена академиком НАН РК Т. Ш. Кальменовым)

Объектом наших рассмотрений служат следующие два вида краевых условий

$$\begin{cases} u'(0) + au'(1) + \alpha_{11}u(0) + \beta_{11}u(1) = 0, \\ u(0) - au(1) = 0 \end{cases} \quad (1)$$

и

$$\begin{cases} \alpha_1 u'(0) + \beta_1 u'(1) + \alpha_{11}u(0) + \beta_{11}u(1) = 0, \\ \alpha_1 u(0) - \beta_1 u(1) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Если связать каждое из этих краевых условий с обыкновенным дифференциальным уравнением второго порядка

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0, \ 0 \le x \le 1, \quad (3)$$

то краевые условия (1), (2) будут нерегулярными в смысле Биркгофа [1, с. 73].

При $\alpha_{11} = \beta_{11} = 0$ получаем вольтеррову задачу, изученную Б. Н. Бияровым в работе [2]. Если дополнительно выполнено условие $a = 0$ ($\beta_1 = 0$), то задача (3), (1) [(3), (2)] становится задачей Коши, вольтерровость которой хорошо известна.

Нерегулярные краевые задачи мало изучены. Изучение некоторых нерегулярных краевых задач изложено в совместной работе Б. Е. Кангужина и М. А. Садыбекова [3] (см. также [1, с. 100]).

Рассмотрим дифференциальное уравнение второго порядка с отклоняющимся аргументом

$$u''(x) + \lambda u(1-x) = 0, \ 0 \le x \le 1, \quad (4)$$

с краевыми условиями (2). В случае $\alpha_1 \cdot \beta_1 \ne 0$ краевые условия (2) сводятся к краевым условиям (1).

Собственной функцией обобщенной краевой задачи (4), (2) будем называть любую комплекснозначную функцию $u_{k0}(x)$ $(u_{k0}(x) \equiv 0)$ из класса $C^4[0,1]$, удовлетворяющую уравнению

$$-u''_{k0}(x) = \lambda_k u_{k0}(1-x)$$

и краевым условиям (2), где λ_k – собственное значение.

Присоединенной функцией порядка i, соответствующей собственной функции $u_{k0}(x)$ и тому же собственному значению λ_k, будем называть любую комплекснозначную функцию $u_{ki}(x)$ $(u_{ki}(x) \equiv 0)$, удовлетворяющую уравнению

$$-u''_{ki}(x) = \lambda_k u_{ki}(1-x) - u_{k,i-1}(1-x), \ i = 1,2,\dots,p$$

и краевым условиям (2).

Справедлива следующая теорема.

Теорема. Система собственных и присоединенных функций обобщенной краевой задачи (4), (2) образует базис Рисса при $\alpha_1^2 \ne \beta_1^2$.

Доказательство. Для доказательства теоремы уравнение (4) два раза продифференцируем по переменной x. Тогда

$$-u'''(x) = -\lambda u'(1-x), \ -u^{IV}(x) = \lambda u''(1-x). \quad (5)$$

В правую часть второго уравнения в (5) подставим (4). В результате этого получим обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка

$$u^{IV}(x) = \lambda^2 u(x). \quad (6)$$

Из уравнения (4) и первого уравнения (5), полагая последовательно x=0 и x=1, получим следующие соотношения

$$-u''(0) = \lambda u(1), \ -u''(1) = \lambda u(0); \quad (7)$$

$$u'''(0) = \lambda u'(1), \ u'''(1) = \lambda u'(0). \quad (8)$$

В дальнейшем будем различать два случая: $\alpha_1 \cdot \beta_1 \ne 0$ и $\alpha_1 \cdot \beta_1 = 0$.

1-й случай. Пусть $\alpha_1 \cdot \beta_1 \ne 0$, тогда из второго краевого условия (2) исключив $u(0)$ и подставляя полученное выражение в правую часть второго соотношения (7), будем иметь

$$-u''(0) = \lambda u(1), \ -u''(1) = \lambda \frac{\beta_1}{\alpha_1} u(1).$$

Умножив первое из полученных равенств на $-\dfrac{\beta_1}{\alpha_1}$ и прибавляя ко второму, получим

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}u''(0)-u''(1)=0$$

или

$$\beta_1 u''(0)-\alpha_1 u''(1)=0\,. \qquad (9)$$

Мы получили еще одно краевое условие для уравнения (6).

Далее исключим из первого соотношения в (2) $u'(0)$

$$u'(0)=-\frac{\beta_1}{\alpha_1}u'(1)-\frac{\alpha_{11}}{\alpha_1}u(0)-\frac{\beta_{11}}{\alpha_1}u(1)\,.$$

Полученное выражение подставим в правую часть второго равенства в (8). Тогда

$$u'''(0)=\lambda u'(1),$$

$$u'''(1)=-\lambda\frac{\beta_1}{\alpha_1}u'(1)-\lambda\frac{\alpha_{11}}{\alpha_1}u(0)-\lambda\frac{\beta_{11}}{\alpha_1}u(1).$$

Отсюда получим

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}u'''(0)+u'''(1)=-\lambda\frac{\alpha_{11}}{\alpha_1}u(0)-\lambda\frac{\beta_{11}}{\alpha_1}u(1)\,.$$

Далее, поочередно умножая первое равенство (7) на $\dfrac{\beta_{11}}{\alpha_1}$, второе равенство (7), на $\dfrac{\alpha_{11}}{\alpha_1}$ и прибавляя к последнему соотношению, мы придем к следующему краевому условию:

$$\frac{\beta_1}{\alpha_1}u'''(0)+u'''(1)-\frac{\beta_{11}}{\alpha_1}u''(0)-\frac{\alpha_{11}}{\alpha_1}u''(1)=0$$

или

$$\beta_1 u'''(0)+\alpha_1 u'''(1)-\beta_{11}u''(0)-\alpha_{11}u''(1)=0\,. \qquad (10)$$

Объединяя (2), (6), (9), (10), получим следующую краевую задачу

$$u^{IV}(x)=\lambda^2 u(x)\,,\ 0\le x\le 1,$$

$$\begin{cases}\beta_1 u'''(0)+\alpha_1 u'''(1)-\beta_{11}u''(0)-\alpha_{11}u''(1)=0,\\ \beta_1 u''(0)-\alpha_1 u''(1)=0,\\ \alpha_1 u'(0)+\beta_1 u'(1)+\alpha_{11}u(0)+\beta_{11}u(1)=0,\\ \alpha_1 u(0)-\beta_1 u(1)=0.\end{cases} \qquad (11)$$

Несложно проверить, что краевые условия (11) являются усиленно регулярными в смысле Биркгофа [1, с. 71].

В нашем случае

$$\frac{\theta_{-1}}{s}+\theta_0+\theta_1 s=$$

$$=\begin{vmatrix}\beta_1\omega_1^3 & (\beta_1+\alpha_1 s)\omega_2^3 & \left(\beta_1+\dfrac{\alpha_1}{s}\right)\omega_3^3 & \alpha_1\omega_4^3\\ \beta_1\omega_1^2 & (\beta_1-\alpha_1 s)\omega_2^2 & \left(\beta_1-\dfrac{\alpha_1}{s}\right)\omega_3^2 & -\alpha_1\omega_4^2\\ \alpha_1\omega_1 & (\alpha_1+\beta_1 s)\omega_2 & \left(\alpha_1+\dfrac{\beta_1}{s}\right)\omega_3 & \beta_1\omega_4\\ \alpha_1 & (\alpha_1-\beta_1 s) & \left(\alpha_1-\dfrac{\beta_1}{s}\right) & -\beta_1\end{vmatrix}.$$

Вычисляя этот определитель четвертого порядка, получим

$$\frac{\theta_{-1}}{s}+\theta_0+\theta_1 s=-4\left(\beta_1^2-\alpha_1^2\right)^2\cdot\left(\frac{1}{s}+s\right),$$

т.е. $\theta_{-1}=4\left(\beta_1^2-\alpha_1^2\right)^2=\theta_1$, $\theta_0=0$, следовательно, $\theta_0^2\ne 4\theta_1\theta_{-1}$ при $\beta_1^2-\alpha_1^2\ne 0$. Это означает, что краевые условия (11) в случае обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка являются усиленно регулярными при $\beta_1^2\ne\alpha_1^2$. Отсюда на основании результатов работ В. Михайлова [4] и Г. М. Кесельмана [5] заключаем, что система собственных и присоединенных функций краевой задачи (11) образует базис Рисса.

Сразу же заметим, что собственные значения усиленно регулярных краевых задач, за исключением их конечного числа, однократны [2, с. 74], так что в рассматриваемом случае общее число присоединенных функций конечно.

Поэтому системы собственных и присоединенных функций краевых задач (4), (2) и (11) могут отличаться друг от друга только конечным числом членов, что не влияет на сходимость биортогональных разложений по этим системам. Эти наши выводы основаны на следующей лемме. Однако мы предварительно укажем, что если λ_0 – собственное значение и φ_0 – соответствующая собственная функция линейного оператора А, то λ_0^2 является собственным значе-нием, φ_0 – соответствующей собственной функцией оператора А^2. Утверждение, обратное этому, мы сформулируем в виде следующей леммы.

Лемма. Если λ_0^2 – собственное значение, а φ_0 – соответствующая собственная функция линейного оператора А и $-\lambda_0$ не является собственным значением оператора А, то λ_0 является собственным значением, а φ_0 – соответствующей собственной функцией оператора А.

Доказательство. Пусть $A^2\varphi_0 - \lambda_0^2\varphi_0 = 0$. Поскольку

$$A^2 - \lambda_0^2 E = (A - \lambda_0 E)\cdot(A + \lambda_0 E) =$$

$$= (A + \lambda_0 E)\cdot(A - \lambda_0 E),$$

и $-\lambda_0$ не является собственным значением оператора А, то из равенства

$$0 = (A^2 - \lambda_0^2 E)\varphi_0 = (A + \lambda_0 E)\cdot\big((A - \lambda_0 E)\varphi_0\big)$$

следует $(A - \lambda_0 E)\varphi_0 = 0$, т.е. λ_0– собственное значение, φ_0 – собственная функция линейного оператора А. Лемма доказана.

В случае краевой задачи (4),(2) и (11) под оператором А понимаем выражение $Au(x) = -u''(1-x)$, $A^2u(x) = u^{IV}(x)$. Собственными значениями краевой задачи (4), (2) будут либо λ_k, либо $-\lambda_k$. В противном случае краевая задача (11) имела бы кратные собственные значения, что противоречит условиям усиленно регулярных краевых задач.

Таким образом, собственные функции краевых задач (4), (2) и (11) совпадают. Следовательно, система собственных и присоединенных функций обобщенной краевой задачи (4), (2) образует базис Рисса. Теорема доказана.

В заключение выражаем искреннюю признательность акад. НАН РК Т. Ш. Кальменову и участникам научного семинара под руководством д. ф.-м. н. М. А. Садыбекова за очень полезное обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы. М., 1969. 528 с.

2. *Бияров Б.Н.* О спектральных свойствах корректных суждений и расширений одного класса дифференциальных операторов: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Алма-Ата, 1989. 87 с.

3. *Кангужин Б.Е., Садыбеков М.А.* Дифференциальные операторы на отрезке. Распределение собственных значений. Алматы: Ғылым, 1996. 270 с.

4. *Михайлов В.Л.* О базисах Рисса в $L^2(0,1)$ // ДАН СССР. 1962. Т. 144, № 5. С. 981-984.

5. *Кесельман Г.М.* О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов // Известия вузов СССР. Математика. 1964. №2. С. 82-93.

Южно-Казахстанский государственный университет им. М. Ауезова, г. Шымкент

Поступила 24.04.06г.