УДК 531.1

М. Д. ШИНИБАЕВ, С. А. ЖАПБАРОВ, Н. М. УТЕНОВ

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ КРУГОВЫХ ДВИЖЕНИЙ ПРОБНОГО ТЕЛА В ПОЛЕ ТЯГОТЕНИЯ ШАРООБРАЗНОГО ЦЕНТРАЛЬНОГО И ВНЕШНЕГО ТЕЛА ПО УРАВНЕНИЯМ ПЕРВОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Пусть пробное тело P массы m движется в поле тяготения центрального шарообразного тела массы m_1 и возмущающего тела массы m_2. Предположим для определенности $m_2 > m_1 > m$, и что возмущающее тело движется относительно центрального по круговой орбите. Введем планетоцентрическую неподвижную систему координат *Oxyz* с началом в центре масс центрального тела, совмещая ось Oz с его осью вращения. Тогда силовая функция задачи будет аппроксимирована потенциалом Хилла [1]:

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{1}{2}\nu\rho^2 - \frac{3}{2}\nu\rho^2 \sin^2\psi , \tag{1}$$

где $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, x, y, z – координаты пробного тела; m – произведение постоянной тяготения на сумму масс центрального и пробного тела; n – постоянный параметр (включающий массу возмущающего тела).

Перейдем к сферическим координатам

$$x = \rho\cos\psi\cos\lambda, \quad y = \rho\cos\psi\sin\lambda,$$

$$z = \rho\sin\lambda, \tag{2}$$

тогда дифференциальные уравнения движения пробного тела имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\dot{\rho}}{dt} - \rho\dot{\psi}^2 - \rho\dot{\lambda}^2 = \cos^2\psi \quad -\frac{\mu}{\rho^2} + \nu\rho - 3\nu\rho\sin^2\psi,\\
&\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\lambda}\cos^2\psi\right) = 0,\\
&\frac{d}{dt}\left(\rho^2\dot{\psi}\right) + \rho^2\dot{\lambda}^2\cos\psi\sin\psi \quad -3\nu\rho^2\sin\psi\cos\psi.
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Дифференциальные уравнения (3) допускают частное решение

$$\rho = \rho_0, \quad \dot{\lambda} = \omega, \tag{4}$$

если при $t = 0$ соответственно $\psi_0 = 0, \quad \lambda_0 = 0$.

Принимая круговое движение (4) за невозмущенное, исследуем его устойчивость по дифференциальным уравнениям первого приближения.

Для этого введем обозначения:

$$\rho = \rho_0 + x_1, \quad \dot{\rho} = x_2, \quad \psi = x_3, \quad \dot{\psi} = x_4,$$

$$\dot{\lambda} = \omega + x_5, \tag{5}$$

где x_i – возмущения.

Внося (5) в дифференциальные уравнения (4) получим уравнения возмущенного движения пассивно гравитирующего тела в поле тяготения центрального шарообразного тела и внешнего тела:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt}=x_2,\\
&\frac{dx_2}{dt}=\left(\rho_0+x_1\right)x_4^2+\left(\rho_0+x_1\right)\left(\omega+x_5\right)^2\cos^2 x_3-\\
&-\frac{\mu}{\left(\rho_0+x_1\right)^2}+\nu\left(\rho_0+x_1\right)-3\nu\left(\rho_0+x_1\right)\sin^2 x_3,\\
&\frac{dx_3}{dt}=x_4,\\
&\frac{dx_4}{dt}=-\frac{x_2x_4}{\left(\rho_0+x_1\right)}-\left(\omega+x_5\right)^2\cos x_3\sin x_3-\\
&-3\nu\cos x_3\sin x_3,\\
&\frac{dx_5}{dt}=-\frac{2x_2\left(\omega+x_5\right)}{\rho_0+x_1}+2\frac{\left(\omega+x_5\right)x_4\sin x_3}{\cos x_3}.
\end{aligned}\right\}\quad(6)$$

Разложим правые части дифференциальных уравнений (6) в ряд Маклорена в окрестности $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0$, и сохраним только величины первого порядка малости относительно возмущений:

$$\begin{aligned}
&\left(\rho_0+x_1\right)x_4^2\quad 0,\ =\ \cos x_3\approx 1,\qquad \sin x_3\approx x_3,\\
&\left(\rho_0+x_1\right)\left(\omega+x_5\right)^2\cos^2 x_3=\\
&=\rho_0\omega^2+2\omega\rho_0x_5+\omega^2x_1+\ldots,\\
&-\frac{\mu}{\left(\rho_0+x_1\right)^2}=\quad-\rho_0\left(\nu+\omega^2\right)+2\left(\nu+\omega^2\right)x_1+\ldots,\\
&\nu\left(\rho_0+x_1\right)=\nu\rho_0+\nu x_1,\\
&-3\nu\left(\rho_0+x_1\right)\sin^2 x_3\quad 0+\ldots,\\
&-\frac{x_2x_4}{\left(\rho_0+x_1\right)}\quad 0+\ldots,\\
&-\left(\omega+x_5\right)^2\cos x_3\sin x_3\quad -\omega^2x_3\ldots,\\
&-3\nu\cos x_3\sin x_3\quad -3\nu x_3+\ldots,\\
&-\frac{x_2\left(\omega+x_5\right)}{\left(\rho_0+x_1\right)}=-\frac{1}{\rho_0}\omega x_2+\ldots,\\
&2\left(\omega+x_5\right)x_4 tgx_3\quad 0+\ldots.
\end{aligned}$$

Подставив разложения в (6) найдем дифференциальные уравнения (возмущенного движения) первого приближения:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dx_1}{dt}=x_2,\\
&\frac{dx_2}{dt}=3\left(\omega^2+\nu\right)x_1+2\omega\rho_0x_5,\\
&\frac{dx_3}{dt}=x_4,\\
&\frac{dx_4}{dt}=-\left(\omega^2+3\nu\right)x_3,\\
&\frac{dx_5}{dt}=-\frac{2}{\rho_0}\omega x_2.
\end{aligned}\right\}\quad(7)$$

Характеристический определитель имеет вид

$$\Delta\begin{Vmatrix}
-\lambda & 1 & 0 & 0 & 0\\
3\left(\omega^2+\nu\right) & -\lambda & 0 & 0 & 2\omega\rho_0\\
0 & 0 & =-\lambda & 1 & 0\\
0 & 0 & -\left(\omega^2+3\nu\right) & -\lambda & 0\\
0 & -\frac{2}{\rho}\omega & 0 & 0 & -\lambda
\end{Vmatrix}=0.\quad(8)$$

Раскрывая (8), найдем характеристическое уравнение

$$\lambda^5+2\omega^2\lambda^3+\left(\omega^4-9\nu^2\right)\lambda=0\,.$$
(9)

Вынесем λ за скобку в (9)

$$\lambda\left(\lambda^4+2\omega^2\lambda^2+\left(\omega^4-9\nu^2\right)\right)=0,$$

$$\lambda_1=0,\qquad \lambda^4+2\omega^2\lambda^2+\left(\omega^4-9\nu^2\right)=0\,.$$

Введем обозначения

$$z^2=\lambda^4,$$

тогда

$$z^2+2\omega^2z+\left(\omega^4-9\nu^2\right)=0\,;$$

$$z_{1,2} = -\omega^2 \pm 3\nu,$$

$$\lambda_2 = \sqrt{-\omega^2 + 3\nu} = \sqrt{\omega^3 - 3\nu} \quad i,$$

$$\lambda_3 = -\sqrt{\omega^2 - 3\nu} \quad i,$$

$$\lambda_4 = \sqrt{-\omega^2 - 3\nu} = \sqrt{\omega^3 + 3\nu} \quad i,$$

$$\lambda_5 = -\sqrt{\omega^2 + 3\nu} \quad i.$$

Таким образам характеристическое уравнение имеет один нулевой корень λ_1 и четыре различных мнимых корней.

В этом случае [2] все решения дифференциальных уравнений первого приближения остаются ограниченными, и нулевое решение, т.е. невозмущенное движение, устойчиво.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шинибаев М.Д.* Поступательное движение пассивно гравитирующего тела в центральном и нецентральном поле тяготения. Алматы: РИО ВАК РК, 2001. 128 с.

2. *Дубошин Г.Н.* Основы теории устойчивости движения. М.: МГУ, 1952. 318 с.

Резюме

Пассив гравитациялық дененің шар секілді және сыртқы ұйытқушы дененің күш өрісіндегі шеңберлік қозғалыстарының орнықтылығы бірінші жуықталған дифференциалдық теңдеулерді зерттеу әдісімен дәлелденген.

Summary

The stability circular movement of tested body in the sphere of gravity as a ball figure of central and indignation by diffe-rential equation of the first approach is researched.

Поступила 26.04.06г.