где $\mu_1 = \min\{\mu_0, \mu\}$. Поскольку $(\mu\Delta_h + \mu_0\Lambda_{33}) < 0$, А не зависит от $\tau, \aleph$, то выберем $\bar{\tau}$ так, что корень уравнения

$$\bar{\tau}(1 + \frac{1}{\mu_1 \aleph}) = \gamma_1. \quad (27)$$

Тогда при любом $\tau < \bar{\tau}(\aleph)$ имеем $\mathrm{B} > 0$ и по теореме 1 метод (1)–(3) сходится со скоростью геометрической прогрессии. Сходимость схемы второго порядка аппроксимации в сдвинутых сетках сходимости итерационного метода исследуется аналогично.

В условиях теоремы видно, что τ зависит от $\aleph_1$, следовательно, от γ_2. Если γ_1, γ_2, не зависят от *h*, то итерационный метод сходится при $\tau < \bar{\tau}$ независящемся от *h*. Пока нам не удалось построить для оператора А экономичной реализации на ЭВМ, в котором γ_1, γ_2 не зависят от *h* одновременно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочергин В.П.* Теория и метод расчета океанических течений. Новосибирск, 1978. 124 с.
2. *Вабищевич П.Н.* Метод фиктивных областей для задачи математической физики. М., 1991. 156 с.
3. *Смагулов Ш.* Метод фиктивных областей для краевой задачи уравнений Навье–Стокса. Препринт ВЦ СО АН. Новосибирск, 1976.
4. *Конавалов А.Н.* // Численные методы механики сплошной среды. 1972. Т. 3. № 5.
5. *Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск, 1983. 305 с.

Резюме

Океан моделінің итерациалық әдісінің бір класының жинақталуы зерттелінген. Итерациалық әдістің шешімінің геометриялық прогрессия жылдамдығымен жинақталатындығы дәлелденген.

Summary

In this work convergence of one class of an iterative method for model of ocean is investigated. It is proved that the decision of an iterative method converges with speed of a geometrical progression.

Поступила 3.06.07г.

УДК. 517.95

Б. Д. КОШАНОВ

ФУНКЦИЯ ГРИНА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЧЕТНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

(Представлена академиком НАН РК Т. Ш. Кальменовым)

Построен явный вид функции Грина задачи Дирихле в шаре для полигармонических уравнений в четной размерности.

Задача продолжения заданной функции с сохранением класса хорошо изучена. При исследовании спектральных свойств дифференциальных операторов возникает несколько иная задача – задача изменения значений заданной функции на некоторой фиксированной части области определения, сохраняя ее граничные значения и гладкость во всей области определения. Сформулируем строгую постановку задачи. Фиксируем натуральное число n. Пусть в области D из R^n задана достаточно гладкая функция $u(x)$, граничные значения которой удовлетворяют некоторому набору условий: $\Gamma_1 u\big|_{x\in\partial D}=0,\ \Gamma_2 u\big|_{x\in\partial D}=0\ ,...,\ \Gamma_m u\big|_{x\in\partial D}=0$. Требуется найти такую функцию $w(x)$, которая вне некоторой внутренней части D совпадает с заданной функцией и имеет в области D ту же гладкость, что исходная функция. Таким образом, построенная функция $w(x)$ удовлетворяет тем же граничным условиям, что исходная функция $u(x)$. Иногда для функции $w(x)$ должны выполняться оценки, справедливые для $u(x)$. При построении функции $w(x)$ по заданной функции $u(x)$ обычно используется краевая задача для полигармонического уравнения. Чтобы доказывать справедливость требуемых оценок для $w(x)$, необходимо иметь явные формулы решений краевых задач для полигармонического уравнения.

В данной статье в явном виде построена функция Грина задачи Дирихле в шаре для полигармонического уравнения в пространстве четной размерности. Отметим, что полученные формулы функции Грина имеют самостоятельное значение. В частности, в теории упругости важное место занимает явное представление решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения.

1. Вспомогательные утверждения. Основной результат. Постановка задачи. Требуется найти решение следующей задачи Дирихле в области $\Omega_\delta=\{x:\|x\|<\delta\}\subset R^n$ (n – четное натуральное число, δ – положительное число) с границей $S_\delta=\partial\Omega_\delta=\{x:\|x\|=\delta\}$:

$$\Delta_x^m u(x)=f(x), \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial^i}{\partial \vec{n}_x^i}u\right|_{|x|=\delta}=0,\quad i=0,1,2,...,m-1, \tag{2}$$

где $\vec{n}_x=\dfrac{x}{|x|}$ – производная по нормали к $\partial\Omega_\delta$ в точке x.

Имеет место следующие леммы:

Лемма 1. Когда n четное и 2m ≥ n, то фундаментальное решение уравнения (1) задается формулой [1]:

$$\varepsilon_{2m,n}(x)=c_{2m,n}|x|^{2m-n}\log|x|, \tag{3}$$

где

$$c_{2m,n}=\frac{(-1)^{n/2-1}}{\Gamma(m)\Gamma(m-n/2+1)2^{2m-1}\pi^{n/2}}.$$

Лемма 2. При любых $x,y\in\Omega_\delta$ ***выполняется тождество [2]***

$$\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|\ \log|x-y|\Bigg|_{\forall x,y\in\Omega_\delta}=\left|\frac{x}{\delta}\right|\left|y-\frac{x}{|x|^2}\delta^2\right|\ \log|x-y|\Bigg|_{\forall x,y\in\Omega_\delta}. \tag{4}$$

Лемма 3. При $x\in S_\delta$ ***и для любого*** $y\in\Omega_\delta$ ***выполняется тождество [2]***

$$\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|\ \log|x-y|\Bigg|_{|x|=\delta,\forall y\in\Omega_\delta}=|y-x|\ \log|x-y|\Big|_{|x|=\delta,\forall y\in\Omega_\delta}. \tag{5}$$

Справедлива следующая

Теорема 1. ***В случае n четное и 2m ≥ n функция Грина задачи Дирихле (1), (2) представима в виде***

$$G_{2m,n}(x,y)=\varepsilon_{2m,n}(x,y)-g^1_{2m,n}(x,y)-\sum_{k=2}^{m}g^k_{2m,n}(x,y),$$

где $\varepsilon_{2m,n}(x,y)=c_{2m,n}|x-y|^{2m-n}\ln|x-y|$, (6)

$$g^1_{2m,n}(x,y)=c_{2m,n}\left[\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|\right]^{2m-n}\ln|x-y|, \tag{7}$$

$$g^k_{2m,n}(x,y)=(2m-n)(2m-2-n)...(2m-2k+4-n)c_{2m,n}\cdot\left[\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|\right]^{2m-2k+2-n}\ln|x-y|\cdot$$

$$\left(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\right)^{k-1}\left(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2\right)^{k-1}\cdot\frac{\delta^{2(k-1)}}{(-2)^{k-1}(k-1)!},\ k=2,3,...,m, \tag{8}$$

$$c_{2m,n}=\frac{(-1)^{n/2-1}}{\Gamma(m)\Gamma(m-n/2+1)2^{2m-1}\pi^{n/2}}. \tag{9}$$

В случае нечетного n и при четных n, когда 2m < n, явный вид функции Грина задачи Дирихле (1), (2) представлен в работе [4].

2. Краткое доказательство теоремы. Требуемая функция Грина строится за m шагов, где m – степень оператора Лапласа в уравнении (1). На первом шаге построим первое приближение $\varepsilon^1_{2m,n}(x,y)$ функции Грина, которое является фундаментальным решением уравнения (1) и удовлетворяет условиям:

i) симметрично относительно перестановки (x,y) на (y,x),

ii) $\varepsilon^1_{2m,n}(x,y)\big|_{|x|=\delta}=0$.

В силу леммы 3 выполняется следующее тождество:

$$\varepsilon_{2m,n}(x,y)\big|_{|x|=\delta}=c_{2m,n}|x-y|^{2m-n}\log|x-y|\big|_{|x|=\delta}=c_{2m,n}\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-n}\log|x-y|\Big|_{|x|=\delta},$$

поэтому введем так называемую компенсирующую функцию $g^1_{2m,n}(x,y)$

$$g^1_{2m,n}(x,y)=c_{2m,n}\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-n}\log|x-y|, \tag{10}$$

которая удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\Delta^m_x g^1_{2m,n}(x,y)=0,$$

$$g^1_{2m,n}(x,y)\big|_{|x|=\delta}=\varepsilon_{2m,n}(x,y)\big|_{|x|=\delta}.$$

Разность функции

$$\varepsilon^1_{2m,n}(x,y)=\varepsilon_{2m,n}(x,y)-g^1_{2m,n}(x,y)$$

называем первым приближением функции Грина $G_{2m,n}(x,y)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$\Delta^m_x\varepsilon^1_{2m,n}(x,y)=\delta(x-y),$$

$$\varepsilon^1_{2m,n}(x,y)\Big|_{|x|=\delta}=0.$$

Во втором шаге вычислим производные по нормали $\vec{n}_x=\dfrac{x}{|x|}$ от функции $\varepsilon_{2m,n}(x,y),\ g^1_{2m,n}(x,y)$:

$$\frac{\partial}{\partial\vec{n}_x}\varepsilon_{2m,n}(x,y)=$$

$$=(2m-n)c_{2m,n}\cdot|x-y|^{2m-n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{\delta}\frac{x_j-y_j}{|x-y|}\log|x-y|+c_{2m,n}\cdot|x-y|^{2m-n-2}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{x_j^2-(x_j,y_j)}{|x|}\right]=$$

$$=\frac{(2m-n)c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot\varepsilon_{2m-2,n}(x,y)(|x|-\frac{(x,y)}{|x|})+c_{2m,n}|x-y|^{2m-2-n}(|x|-\frac{(x,y)}{|x|});$$

$$\frac{\partial}{\partial\vec{n}_x}g^1_{2m,n}(x,y)=(2m-n)c_{2m,n}\cdot\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-1-n}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{\delta}\frac{x_j-\dfrac{y_j}{|y|^2}\delta^2}{\left|x-\dfrac{y}{|y|^2}\delta^2\right|}\log|x-y|+$$

$$+c_{2m,n}\cdot\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-n}\frac{1}{|x-y|^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{|x|}(x_j-y_j)=$$

$$=\frac{(2m-n)c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot g^1_{2m-2,n}(x,y)(|x|\frac{|y|^2}{\delta^2}-\frac{(x,y)}{|x|})+c_{2m,n}\cdot\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-n}\frac{1}{|x-y|^2}(|x|-\frac{(x,y)}{|x|}).$$

На границе $S_\delta=\partial\Omega_\delta$ последнее выражение имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial\vec{n}_x}g^1_{2m,n}(x,y)\ \Big|_{|x|=\delta}=\frac{(2m-n)c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot g^1_{2m-2,n}(x,y)(|x|\frac{|y|^2}{\delta^2}-\frac{(x,y)}{|x|})\ \Big|_{|x|=\delta}+$$

$$+c_{2m,n}\cdot\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-n}\frac{1}{\left|\dfrac{y}{\delta}\right|^2\left|x-\dfrac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^2}(|x|-\frac{(x,y)}{|x|})\ \Big|_{|x|=\delta}=$$

$$=\frac{(2m-n)c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot g^1_{2m-2,n}(x,y)(|x|\frac{|y|^2}{\delta^2}-\frac{(x,y)}{|x|})\ \Big|_{|x|=\delta}+c_{2m,n}\cdot\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-2-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-2-n}(|x|-\frac{(x,y)}{|x|})\ \Big|_{|x|=\delta}.$$

Отсюда получим:

$$\frac{\partial}{\partial \overset{\rho}{n}_x}\varepsilon^1_{2m,n}(x,y)\Big|_{|x|=\delta}=\Big[\frac{\partial}{\partial \overset{\rho}{n}_x}\varepsilon_{2m,n}(x,y)-\frac{\partial}{\partial \overset{\rho}{n}_x}g^1_{2m,n}(x,y)\Big]\Big|_{|x|=\delta}=\frac{(2m-n)c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot g^1_{2m-2,n}(x,y)\Big(1-\frac{|y|^2}{\delta^2}\Big)\cdot|x|\Big|_{|x|=\delta}. \tag{11}$$

Поэтому введем новую компенсирующую функцию $g^2_{2m,n}(x,y)$, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\Delta^m_x g^2_{2m,n}(x,y)=0,$$

$$g^2_{2m,n}(x,y)\Big|_{|x|=\delta}=0,\ g^2_{2m,n}(x,y)=g^2_{2m,n}(y,x),$$

$$\frac{\partial g^2_{2m,n}}{\partial \overset{\rho}{n}_x}\Big|_{|x|=\delta}=\frac{\partial \varepsilon^1_{2m,n}}{\partial \overset{\rho}{n}_x}\Big|_{|x|=\delta}=\Big[\frac{\partial}{\partial \overset{\rho}{n}_x}\varepsilon_{2m,n}(x,y)-\frac{\partial}{\partial \overset{\rho}{n}_x}g^1_{2m,n}(x,y)\Big]\Big|_{|x|=\delta}.$$

Отсюда, а также из соотношения (11) единственным образом определяется функция $g^2_{2m,n}(x,y)$:

$$g^2_{2m,n}(x,y)=\frac{(2m-n)c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot g^1_{2m-2,n}(x,y)\cdot\Big(1-\Big|\frac{y}{\delta}\Big|^2\Big)\Big(1-\Big|\frac{x}{\delta}\Big|^2\Big)\cdot\frac{\delta^2}{(-2)^1 1!}=$$

$$=(2m-n)\cdot c_{2m,n}\cdot\Big|\frac{y}{\delta}\Big|^{2m-2-n}\Big|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\Big|^{2m-2-n}\log|x-y|\Big(1-\Big|\frac{y}{\delta}\Big|^2\Big)\Big(1-\Big|\frac{x}{\delta}\Big|^2\Big)\cdot\frac{\delta^2}{(-2)^1 1!}. \tag{12}$$

Таким образом, второе приближение функции Грина имеет вид

$$\varepsilon^2_{2m,n}(x,y)=\varepsilon_{2m,n}(x,y)-g^1_{2m,n}(x,y)-g^2_{2m,n}(x,y)=\varepsilon_{2m,n}(x,y)-\sum_{k=1}^{2}g^k_{2m,n}(x,y)=$$

$$=c_{2m,n}|x-y|^{2m-n}\log|x-y|-c_{2m,n}\Big|\frac{y}{\delta}\Big|^{2m-n}\Big|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\Big|^{2m-n}\log|x-y|-$$

$$-(2m-n)\cdot c_{2m,n}\cdot\Big|\frac{y}{\delta}\Big|^{2m-2-n}\Big|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\Big|^{2m-2-n}\log|x-y|\Big(1-\Big|\frac{y}{\delta}\Big|^2\Big)\Big(1-\Big|\frac{x}{\delta}\Big|^2\Big)\cdot\frac{\delta^2}{(-2)^1 1!} \tag{13}$$

и удовлетворяет условиям:

$$\Delta^m_x\varepsilon^2_{2m,n}(x,y)=\delta(x-y),$$

$$\varepsilon^2_{2m,n}(x,y)\Big|_{|x|=\delta}=0,\ \frac{\partial}{\partial \overset{\rho}{n}_x}\varepsilon^2_{2m,n}(x,y)\Big|_{|x|=\delta}=0.$$

В третьем шаге вычислим вторые производные от второго приближения функции Грина, рассмотрим их следы, построим третью компенсирующую функцию и напишем третье приближение функции Грина. Продемонстрируем сказанное.

Берем вторые производные по нормали к $\partial\Omega_\delta$ в точке x от функции $\varepsilon_{2m,n}(x,y)$, $g^1_{2m,n}(x,y)$, $g^2_{2m,n}(x,y)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial \vec{h}_x^2}\varepsilon_{2m,n}(x,y)=\frac{(2m-n)(2m-2-n)c_{2m,n}}{c_{2m-4,n}}\cdot\varepsilon_{2m-4,n}(x,y)(|x|-\frac{(x,y)}{|x|})^2+$$

$$+(2m-n)c_{2m,n}\cdot|x-y|^{2m-4-n}(|x|-\frac{(x,y)}{|x|})^2+c_{2m,n}\cdot|x-y|^{2m-4-n}(|x|-\frac{(x,y)}{|x|})\;+$$

$$+\frac{(2m-n)c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot\varepsilon_{2m-2,n}(x,y)+c_{2m,n}\cdot|x-y|^{2m-2-n}; \tag{14}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \vec{h}_x^2}g^1_{2m,n}(x,y)=\frac{\partial}{\partial \vec{h}_x}[(2m-n)c_{2m,n}\cdot\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-2-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-2-n}\log|x-y|(|x|\frac{|y|^2}{\delta^2}-\frac{(x,y)}{|x|})+$$

$$+c_{2m,n}\cdot\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-n}\frac{1}{|x-y|^2}(|x|-\frac{(x,y)}{|x|})]=$$

$$=\frac{(2m-n)(2m-2-n)c_{2m,n}}{c_{2m-4,n}}\cdot g^1_{2m-4,n}(x,y)(|x|\frac{|y|^2}{\delta^2}-\frac{(x,y)}{|x|})^2+$$

$$+(2m-n)c_{2m,n}\cdot\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-2-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-2-n}\frac{1}{|x-y|^2}(|x|-\frac{(x,y)}{|x|})(|x|\frac{|y|^2}{\delta^2}-\frac{(x,y)}{|x|})+$$

$$+c_{2m,n}\cdot g^1_{2m-2,n}(x,y)\left|\frac{y}{\delta}\right|^2+c_{2m,n}\cdot\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-2-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-2-n}(|x|\frac{|y|^2}{\delta^2}-\frac{(x,y)}{|x|})\frac{1}{|x-y|^2}(|x|-\frac{(x,y)}{|x|})+$$

$$+c_{2m,n}\cdot\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-n}\frac{(-2)}{|x-y|^4}(|x|-\frac{(x,y)}{|x|})^2+c_{2m,n}\cdot\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-n}\frac{1}{|x-y|^2}; \tag{15}$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{h}_x}g^2_{2m,n}(x,y)=\frac{\partial}{\partial \vec{h}_x}[\frac{(2m-n)c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot g^1_{2m-2,n}(x,y)(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2)(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2)(-\frac{\delta^2}{2})]=$$

$$=\frac{(2m-n)(2m-2-n)c_{2m,n}}{c_{2m-4,n}}\cdot g^1_{2m-4,n}(x,y)(|x|\frac{|y|^2}{\delta^2}-\frac{(x,y)}{|x|})(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2)(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2)(-\frac{\delta^2}{2})+$$

$$+c_{2m,n}\cdot\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-2-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-2-n}\frac{1}{|x-y|^2}(|x|-\frac{(x,y)}{|x|})(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2)(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2)(-\frac{\delta^2}{2})+$$

$$+\frac{(2m-n)c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot g^1_{2m-2,n}(x,y)(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2)\frac{(-2|x|)}{(-2)};$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \vec{n}_x^2} g^2_{2m,n}(x,y) = \frac{(2m-n)(2m-2-n)(2m-4-n)c_{2m,n}}{c_{2m-6,n}} \cdot$$

$$\cdot\, g^1_{2m-6,n}(x,y)\Big(|x|\left|\frac{y}{\delta}\right|^2 - \frac{(x,y)}{|x|}\Big)^2 \Big(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\Big)\Big(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2\Big)\Big(-\frac{\delta^2}{2}\Big) +$$

$$+\, c_{2m,n}\cdot\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-2-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-2-n}\frac{1}{|x-y|^2}\Big(|x|-\frac{(x,y)}{|x|}\Big)\Big(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\Big)\Big(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2\Big)\Big(-\frac{\delta^2}{2}\Big) +$$

$$+\, \frac{(2m-n)(2m-2-n)}{c_{2m-4,n}}c_{2m,n}\cdot g^1_{2m-4,n}(x,y)\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\Big(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\Big)\Big(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2\Big)\Big(-\frac{\delta^2}{2}\Big) +$$

$$+\, \frac{(2m-n)(2m-2-n)}{c_{2m-4,n}}c_{2m,n}\cdot g^1_{2m-4,n}(x,y)\Big(|x|\left|\frac{y}{\delta}\right|^2 - \frac{(x,y)}{|x|}\Big)|x| +$$

$$+\, (2m-2-n)c_{2m,n}\cdot\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-4-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-4-n}\frac{1}{|x-y|^2}\Big(|x|-\frac{(x,y)}{|x|}\Big)^2\Big(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\Big)\Big(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2\Big)\left(\frac{\delta^2}{-2}\right) +$$

$$+\, \frac{(2m-n)c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot g^1_{2m-2,n}(x,y)\Big(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\Big); \qquad (16)$$

Рассмотрим разность выражений (14), (15), (16) и их следы на границе $S_\delta = \partial\Omega_\delta$:

$$\frac{\partial^2}{\partial \vec{n}_x^2}\varepsilon^2_{2m,n}(x,y)\Big|_{|x|=\delta} = \Big[\frac{\partial^2}{\partial \vec{n}_x^2}\varepsilon_{2m,n}(x,y) - \frac{\partial^2}{\partial \vec{n}_x^2}g^1_{2m,n}(x,y) - \frac{\partial^2}{\partial \vec{n}_x^2}g^2_{2m,n}(x,y)\Big]\Big|_{|x|=\delta} =$$

$$= \frac{(2m-n)(2m-4-n)c_{2m,n}}{c_{2m-4,n}}\cdot g^1_{2m-4,n}(x,y)\Big[\Big(1-\frac{|y|^2}{\delta^2}\Big)^2\cdot|x|^2 + \frac{1}{2}\Big(1-\frac{|y|^2}{\delta^2}\Big)\cdot|y|^2\Big(1-\frac{|x|^2}{\delta^2}\Big)\Big]\Big|_{|x|=\delta} =$$

$$= \frac{(2m-n)(2m-4-n)c_{2m,n}}{c_{2m-4,n}}\cdot g^1_{2m-4,n}(x,y)\Big(1-\frac{|y|^2}{\delta^2}\Big)^2\cdot|x|^2\Big|_{|x|=\delta}. \qquad (17)$$

Новая компенсирующая функция $g^3_{2m,n}(x,y)$ удовлетворяет следующим свойствам:

$$\Delta_x^m g^3_{2m,n}(x,y) = 0,$$

$$g^3_{2m,n}(x,y)\Big|_{|x|=\delta} = 0,\quad g^3_{2m,n}(x,y) = g^3_{2m,n}(y,x),$$

$$\frac{\partial g^3_{2m,n}(x,y)}{\partial \vec{n}_x}\Big|_{|x|=\delta} = 0,\quad \frac{\partial^2 g^3_{2m,n}(x,y)}{\partial \vec{n}_x^2}\Big|_{|x|=\delta} = \frac{\partial^2\varepsilon^2_{2m,n}(x,y)}{\partial \vec{n}_x^2}\Big|_{|x|=\delta}.$$

Отсюда единственным образом определяется функция $g^3_{2m,n}(x,y)$:

$$g^3_{2m,n}(x,y)=\frac{(2m-n)(2m-2-n)c_{2m,n}}{c_{2m-4,n}}\cdot g^1_{2m-4,n}(x,y)\cdot(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2)^2(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2)^2\cdot\frac{\delta^4}{(-2)^2 2!}=$$

$$=(2m-n)(2m-2-n)c_{2m,n}\cdot\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-4-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-4-n}\log|x-y|\cdot(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2)^2(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2)^2\cdot\frac{\delta^4}{(-2)^2 2!}. \quad (18)$$

Таким образом, третье приближение функции Грина имеет вид

$$\varepsilon^3_{2m,n}(x,y)=\varepsilon_{2m,n}(x,y)-\sum_{k=1}^{3}g^k_{2m,n}(x,y), \quad (19)$$

где каждые слагаемые определяются по формулам (6), (10), (12), (18) и $\varepsilon^3_{2m,n}(x,y)$ удовлетворяет условиям:

$$\Delta^m_x\varepsilon^3_{2m,n}(x,y)=\delta(x-y),$$

$$\varepsilon^3_{2m,n}(x,y)\Big|_{|x|=\delta}=0,\ \frac{\partial}{\partial\vec{n}_x}\varepsilon^3_{2m,n}(x,y)\Big|_{|x|=\delta}=0,\ \frac{\partial^2}{\partial\vec{n}^2_x}\varepsilon^3_{2m,n}(x,y)\Big|_{|x|=\delta}=0.$$

Аналогичным образом получаем компенсирующую функцию для любого $k<m$ $(2m\ge n)$:

$$g^k_{2m,n}(x,y)=\frac{(2m-n)(2m-2-n)...(2m-2k+4-n)c_{2m,n}}{c_{2m-2k+2,n}}\cdot g^1_{2m-2k+2,n}(x,y)\cdot(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2)^{k-1}(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2)^{k-1}\times$$

$$\times\frac{\delta^{2(k-1)}}{(-2)^{k-1}(k-1)!}=(2m-n)(2m-2-n)...(2m-2k+4-n)c_{2m,n}\times$$

$$\times\left[\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|\right]^{2m-2k+2-n}\log|x-y|\cdot\left(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\right)^{k-1}(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2)^{k-1}\cdot\frac{\delta^{2(k-1)}}{(-2)^{k-1}(k-1)!}, \quad (20)$$

которая обладает следующими свойствами:

$$\Delta^m_x g^k_{2m,n}(x,y)=0,$$

$$g^k_{2m,n}(x,y)=g^k_{2m,n}(y,x),\ \frac{\partial^i g^k_{2m,n}(x,y)}{\partial\vec{n}^i_x}\Bigg|_{|x|=\delta}=0,\quad i=\overline{0,k-2},$$

$$\frac{\partial^{k-1}g^k_{2m,n}(x,y)}{\partial\vec{n}^{k-1}_x}\Bigg|_{|x|=\delta}=\frac{\partial^{k-1}\varepsilon^{k-1}_{2m,n}(x,y)}{\partial\vec{n}^{k-1}_x}\Bigg|_{|x|=\delta}.$$

k-е приближение функции Грина имеет следующий вид:

$$\varepsilon^k_{2m,n}(x,y)=\varepsilon_{2m,n}(x,y)-\sum_{j=1}^{k}g^j_{2m,n}(x,y), \quad (21)$$

которое удовлетворяет следующим условиям:

$$\Delta_x^m \varepsilon_{2m,n}^k(x,y) = \delta(x-y),\ \frac{\partial^i}{\partial n_x^i}\varepsilon_{2m,n}^k(x,y)\Big|_{|x|=\delta} = 0, \quad i = \overline{0,k-1}.$$

Таким образом, после m-го шага получим m приближение функции Грина задачи Дирихле (1), (2) $(2m \geq n)$, которое будет совпадать с искомой функцией $G_{2m,n}(x,y)$:

$$G_{2m,n}(x,y) = \varepsilon_{2m,n}(x,y) - g_{2m,n}^1(x,y) - \sum_{k=2}^{m} g_{2m,n}^k(x,y) =$$

$$= c_{2m,n}|x-y|^{2m-n}\log|x-y| - c_{2m,n}\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-n}\log|x-y| -$$

$$-\sum_{k=2}^{m}(2m-n)(2m-2-n)\ldots(2m-2k+4-n)c_{2m,n}\times$$

$$\times\left[\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|\right]^{2m-2k+2-n}\log|x-y|\cdot(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2)^{k-1}(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2)^{k-1}\cdot\frac{\delta^{2(k-1)}}{(-2)^{k-1}(k-1)!}. \quad (22)$$

3. Замечания. Методика настоящей работы позволяет строить функцию Грина для полигармонических уравнений не только для шара, но для полуплоскости и других канонических областях [3]. Отметим, что отдельные результаты работы могут быть обобщены на эллиптические уравнения с постоянными коэффициентами. Явное представление функции Грина задачи Неймана для неоднородного полигармонического уравнения в комплексной плоскости имеется в работе [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частыми производными. М.: Мир, 1966.

2. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1985.

3. *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.

4. *Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д., Искакова У.А.* Структура спектра краевых задач для дифференциальных уравнений. Алматы: Препринт, 2005. 54 с.

5. *Begehr H., Vanegas C.J.* Iterated Neumann problem for the higher order Poisson equation // Math. Nachr. 279 (2006). P. 38-57.

6. *Koshanov B.D.* Structure of the spectrum of regular boundary problems for differential equations // Abstracts of the third international conference “Inverse Problems: Modeling and Simulation”, Fethiye, Turkey, May29 – June 03. P. 113-115.

7. *Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D.* Representation Green function of the Dirichlet problems for the bi-harmonic equation // International Congress of Mathematicians, August 22-30, 2006, Madrid.

8. *Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д.* О представлении функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения // ДАН НАН РК. 2006. Т. 5. С. 9-12.

Центр физико-математических исследований МОН РК, г.Алматы

Поступила 3.05.07г.