

УДК 532.517.4

Б. П. УСТИМЕНКО

ПРОЦЕССЫ ПЕРЕНОСА В ПЛОСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУЕ В СПУТНОМ ПОТОКЕ В УСЛОВИЯХ ПЕРЕМЕЖАЕМОСТИ

Выполнены расчеты условных и полных средних статистических характеристик динамического и температурного поля плоской турбулентной струи в спутном потоке в условиях перемежаемости. Результаты расчетов сопоставлены с опытными данными.

Аналитический расчет турбулентных струй, развивающихся в спутном потоке, связан со значительными трудностями. Так, в работе [1] при анализе распространения турбулентной осесимметричной струи в спутном потоке показано, что автомодельное решение задачи может быть получено только в двух предельных случаях, когда избыточная над спутным потоком скорость струи намного больше или же, наоборот, меньше скорости спутного потока. В работах [2, 3] построена математическая модель турбулентной осесимметричной струи в спутном потоке, выполнены расчеты условных и полных средних статистических характеристик динамического и температурного полей в условиях перемежаемости турбулентной и не турбулентной жидкости. В этих и других работах [4–7] была показана необходимость учета явления перемежаемости, т.е. нерегулярного чередования в пространстве и времени областей с турбулентной и не турбулентной жидкостью, являющегося основным свойством турбулентных течений. Модели нового поколения, учитывающие перемежаемость, более детально и точно описывают закономерности турбулентных течений по сравнению с традиционными моделями, основанными на безусловно осредненных уравнениях Рейнольдса, не учитывающих это явление.

В настоящей статье развитая модель турбулентности применяется к расчетам полных и условных (по каждой из перемежающихся сред) средних характеристик динамического и температурного поля турбулентной плоской струи в спутном потоке. В связи с отсутствием в литературе экспериментальных данных об условных средних динамических и температурных полях турбулентной плоской струи в спутном потоке в статье сделано их предвычисление на основе ана-

лиза их распределения в центральной (турбулентной) и периферийной (перемежающейся) области течения.

Постановка задачи. Рассмотрим турбулентную плоскую струю в спутном потоке той же жидкости. Уравнения движения и теплопереноса для такой струи в приближении пограничного слоя имеют вид:

$$\langle u \rangle_r \frac{\partial \langle u \rangle_r}{\partial x} + \langle v \rangle_r \frac{\partial \langle u \rangle_r}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} (\langle u'v' \rangle_r), \quad (1)$$

$$\langle u \rangle_r \frac{\partial \langle t \rangle_r}{\partial x} + \langle v \rangle_r \frac{\partial \langle t \rangle_r}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} (\langle v't' \rangle_r), \quad (2)$$

$$\frac{\partial \langle u \rangle_r}{\partial x} + \frac{\partial \langle v \rangle_r}{\partial y} = 0. \quad (3)$$

Уравнения баланса пульсационной энергии $E = 0,5\overline{u'^2 + v'^2 + w'^2}$ в этом же приближении запишется как

$$\langle u \rangle_r \frac{\partial \langle E \rangle_r}{\partial x} + \langle v \rangle_r \frac{\partial \langle E \rangle_r}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \left[v \frac{\partial \langle E \rangle_r}{\partial y} - \langle (Ev' + \frac{1}{\rho} p'v') \rangle_r \right] + \langle u'v' \rangle_r \frac{\partial \langle u \rangle_r}{\partial y} + \langle \varepsilon \rangle_r = 0. \quad (4)$$

Интенсивности пульсаций скорости будем находить из уравнений для реинольдсовых напряжений [9], пренебрегая в них и в уравнении (4), как это обычно делается при расчетах струйных течений, членами, связанными с влиянием вязкости, конвекции и турбулентной диффузии:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^3 \langle u'_k u'_j \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} + \\ & \sum_{k=1}^3 \langle u'_k u'_i \rangle \frac{\partial \langle u_j \rangle}{\partial x_k} - \langle \frac{p'}{\rho} (\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}) \rangle + \\ & + 2\nu \sum_{k=1}^3 \langle \frac{\partial u'_i}{\partial x_k} \frac{\partial u'_j}{\partial x_k} \rangle = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

(i, j = 1, 2, 3)

Индекс $r = t$ в этих уравнениях соответствует турбулентной, а $r = 0$ – не турбулентной жидкости, $\langle u \rangle_r, \langle v \rangle_r, \langle t \rangle_r, \langle u'v' \rangle_r, \langle v't' \rangle_r$ – условные средние значения скорости, температуры, касательного напряжения трения и теплового потока. Для замыкания этих уравнений воспользуемся известными гипотезами [5, 10]:

$$\begin{aligned} -\langle u'v' \rangle &= \nu_t \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y}, \quad -\langle v't' \rangle = \nu_t \frac{\partial \langle t \rangle}{\partial y}, \\ \langle (E + \frac{p'}{\rho})v' \rangle &= -\nu_t \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial y}, \quad \langle \varepsilon \rangle = c \frac{\nu_t \langle E \rangle}{l^2}, \end{aligned}$$

а также формулами Колмогорова в виде:

$$\nu_t = l \sqrt{\langle E \rangle}, \quad \sum_{k=1}^3 \langle (\frac{\partial u'_i}{\partial x_k})^2 \rangle = \frac{c \langle E \rangle^{3/2}}{3 l}. \quad \text{Обмен}$$

энергией между различными компонентами пульсаций будем рассчитывать по формулам Рота [10]:

$$\langle \frac{p'}{\rho} (\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x_i}) \rangle = -k \frac{\sqrt{\langle E \rangle}}{l} (\langle u'_i u'_j \rangle - \frac{2}{3} \delta_{ij} \langle E \rangle).$$

Здесь k и c – опытные постоянные. Для нахождения автомодельного решения системы уравнений (1)–(3) введем новую функцию $\langle u_1 \rangle = \langle u \rangle - u_\infty$, где u_∞ – скорость спутного потока. Как показано в работе [1], автомодельное решение уравнения (1) возможно лишь в двух предельных случаях, когда $\langle u_1 \rangle / u_\infty \gg 1$ (по терминологии, принятой в работе [8], это соответствует «сильной» струе) или же $\langle u_1 \rangle / u_\infty \ll 1$ («слабая» струя). Подставляя в уравнения (1)–(5) значение $\langle u \rangle = \langle u_1 \rangle + u_\infty$ и пренебрегая в них малыми членами, преобразуем их к виду:

а) для «сильной» струи эти уравнения сохраняют свой вид при замене в них значений $\langle u \rangle$ на $\langle u_1 \rangle$;

б) для «слабой» струи уравнения будут:

$$u_\infty \frac{\partial \langle u_1 \rangle_r}{\partial x} = -\nu_t \frac{\partial^2 \langle u_1 \rangle_r}{\partial y^2}, \quad (1')$$

$$u_\infty \frac{\partial \langle t \rangle_r}{\partial x} = -\nu_t \frac{\partial^2 \langle t \rangle_r}{\partial y^2}, \quad (2')$$

$$\begin{aligned} u_\infty \frac{\partial \langle E \rangle_r}{\partial x} - \nu_t \frac{\partial^2 \langle E \rangle_r}{\partial y^2} - \nu_t (\frac{\partial \langle u_1 \rangle_r}{\partial y})^2 + \\ + c \frac{\nu_t \langle E \rangle_r}{l^2} = 0. \end{aligned} \quad (4')$$

Расчет условных и полных средних значений скорости и температуры. Для нахождения решений уравнений (1)–(3) и (1')–(2') перейдем в них к автомодельным переменным:

$$\begin{aligned} \frac{\langle u_1 \rangle_r}{u_{1m}} = F'(\varphi), \quad \frac{\langle t \rangle_r - t_\infty}{\langle t \rangle_m - t_\infty} = \theta(\varphi), \quad \varphi = Bux^\beta, \\ u_{1m} = Ax^\alpha, \quad \langle t \rangle_m - t_\infty = Gx^\gamma. \end{aligned} \quad (6)$$

Коэффициент турбулентной вязкости определим по второй формуле Прандтля

$$\nu_t = l^2 \frac{\partial \langle u \rangle}{\partial y} = \chi^2 b u_{1m},$$

где l – характерный масштаб; равный χb , b – условная ширина струи; χ – эмпирическая постоянная. Величины α, β, γ определяются путем подстановки формул (6) в уравнения (1)–(1') и (2)–(2') и использования интегральных уравнений сохранения импульса и тепла: $\alpha = \neq -\frac{1}{2}$,

$\beta = -1$ для «сильной» струи и $\alpha = \beta = \gamma = -\frac{1}{2}$ для «слабой» струи. Постоянные A и G находятся из начальных условий задачи. После перехода в уравнениях (1), (2) и (1'), (2') к автомодельным переменным (6) они преобразуются к виду:

а) для «сильной» струи:

$$F''' + 2(FF')' = 0, \quad (7)$$

$$\theta'' + 2(F\theta)' = 0; \quad (8)$$

б) для «слабой» струи:

$$F''' + 2(\varphi F')' = 0, \quad (9)$$

$$\theta'' + 2(\varphi\theta)' = 0. \quad (10)$$

Граничные условия для уравнений (7) и (9) запишутся:

$$F'(\varphi) = F'(\varphi_t) = 1, F(\varphi) = F(\varphi_t) = F''(\varphi) = F''(\varphi_t) = 0 \text{ при } \varphi = \varphi_t = 0; F'(\varphi) = 0 \text{ при } \varphi \rightarrow \infty, F'(\varphi_t) = c_1 \text{ при } \varphi_t = d_1, F'(\varphi_0) = c_2 \text{ при } \varphi_0 = d_2, F'(\varphi_0) = 0 \text{ при } \varphi_0 \rightarrow \infty. \quad (11)$$

Здесь d_1 – глубина проникновения турбулентной жидкости в область потенциального течения, а d_2 – глубина проникновения не турбулентной жидкости в пограничный слой струи [11]. Для уравнений (8) и (10) граничные условия имеют соответственно вид:

$$\theta(\varphi) = \theta(\varphi_t) = 1 \text{ при } \varphi = \varphi_t = 0, \theta(\varphi) = 0 \text{ при } \varphi \rightarrow \infty, \theta(\varphi_t) = \theta_1 \text{ при } \varphi_t = d_1. \quad (12)$$

При расчете профилей скорости граничное условие при $\varphi_0 = d_2$ заменялось приближенно условием $F'(\varphi_0) = 1$ при $\varphi_0 = 0$, а профилей температуры при $\varphi_t = d_1$ – условием $\theta(\varphi_t) = 0$ при $\varphi_t \rightarrow \infty$. Полученные при этом значения скорости в области $\varphi_0 < d_2$ и температуры в области $\varphi_t > d_1$ не имеют физического смысла. Сравнивая между собой уравнения (7) и (8), а также (9) и (10) и соответствующие им граничные условия, видим, что они совпадают, а следовательно, совпадают и их решения. Решение уравнения (7) приведено, в частности, в работе [12] и имеет вид

$$F'(\varphi) = \theta(\varphi) = 1 - th^2\varphi, \quad (13)$$

а уравнения (9) – в статье [13]:

$$F'(\varphi) = \theta(\varphi) = e^{-\varphi^2}. \quad (14)$$

Расчет касательного напряжения производился путем подстановки в уравнения движения (1) и (1') найденных значений скорости и последующего их интегрирования. В результате получим для «сильной» струи:

$$\frac{\langle u'v' \rangle}{u_{1m}^2} = ath\varphi(1 - th^2\varphi); \quad (15)$$

для «слабой» струи

$$\frac{\langle u'v' \rangle}{u_{1m}^2} = b\gamma e^{-\varphi^2}. \quad (16)$$

Постоянные a и b для условий опытов [8] соответственно равны $a = 0,0527, b = 0,0703$.

Полные (безусловные) значения средней скорости и температуры определяются из соотношений теории вероятностей, связывающих их с условными средними величинами и коэффициентом перемежаемости γ :

$$\begin{aligned} \langle u \rangle &= \gamma \langle u \rangle_t + (1 - \gamma) \langle u \rangle_0, \langle v \rangle \\ &= \gamma \langle v \rangle_t + (1 - \gamma) \langle v \rangle_0, \langle \theta \rangle = \gamma \langle \theta \rangle_t, \\ \langle u'v' \rangle &= \gamma \langle u'v' \rangle_t + (1 - \gamma) \langle u'v' \rangle_0 + \\ &+ \gamma(1 - \gamma)(\langle u \rangle_t - \langle u \rangle_0)(\langle v \rangle_t - \langle v \rangle_0). \end{aligned} \quad (17)$$

В уравнение для $\langle \theta \rangle$ отсутствует слагаемое $(1 - \gamma) \langle \theta \rangle_0$, поскольку величина $\langle \theta \rangle_0$, как показано в работе [14], равна нулю.

Методика определения коэффициента перемежаемости γ изложена в работе [13]:

$$\gamma = \frac{Ai(\chi)}{Ai(\chi)_{\max}} = \frac{Ai(\chi)}{0,536}, \quad (18)$$

где $Ai(\chi) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \cos\left(\frac{t^3}{3} + t\chi\right) dt, \chi = b_1^{1/3} \left(z - \frac{a_1}{b_1}\right),$

$a_1 b_1^{2/3} = -2,338, b_1^{1/3} \langle z \rangle = 1,338, \langle z \rangle$ – среднее значение концентрации пассивной примеси или температуры. Рассчитанный по формуле (18) профиль γ представленный на рис. 1 (кривая 1), сопоставлен с опытной кривой [8] и получено их хорошее соответствие.

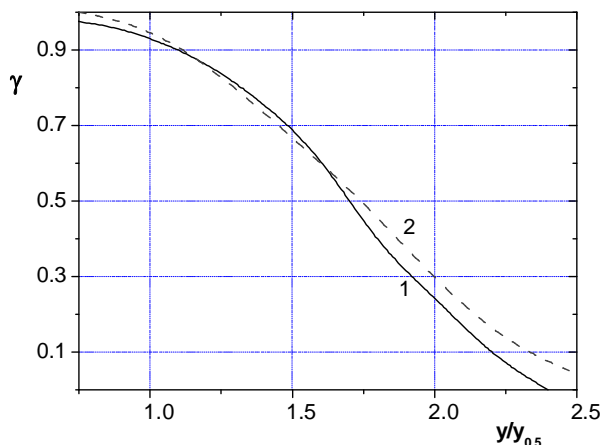


Рис. 1. Профиль коэффициента перемежаемости γ в турбулентной спутной плоской струе. Сплошная кривая 1 – расчетная, штрихованная 2 – опытные данные [8]

В литературе отсутствуют экспериментальные данные по распределению условных средних значений скорости и температуры в плоской турбулентной струе в спутном потоке. Как показано в работе [11], возможно выполнить расчет полных средних скорости и температуры и в отсутствии опытных данных для их условных средних. В центральной области струи величина $\gamma \rightarrow 1$ и поэтому, как это следует из формул (17), $\langle u \rangle \approx \langle u \rangle_t, \langle \theta \rangle \approx \langle \theta \rangle_t$. Это позволяет определить эмпирический параметр $\varphi_{1/2}$, входящий в выражение $\varphi = \varphi_{1/2} \frac{y}{y_{1/2}}$, необходимый для расчета $\langle u \rangle_t$ и $\langle \theta \rangle_t$. Как оказалось, он

равен $\varphi_{1/2} = 0,9$ и $0,67$. Здесь $y_{1/2}$ соответствует расстоянию от точки максимального значения скорости до точки, где скорость равна половине ее максимального значения. На внешней границе струи $\gamma \rightarrow 0$ и $\langle u \rangle \approx \langle u \rangle_0$, что позволяет определить параметр $\varphi_{1/2} = 1,3$, необходимый для расчета $\langle u \rangle_0$. Затем, зная условные средние значения скорости и температуры, можно вычислить их безусловные средние по формулам (17). На рис. 2–4 результаты расчетов скорости, температуры и касательного напряжения трения сопоставлены с экспериментальными данными, приведенными в работах [8, 12], и получено их хорошее согласие.

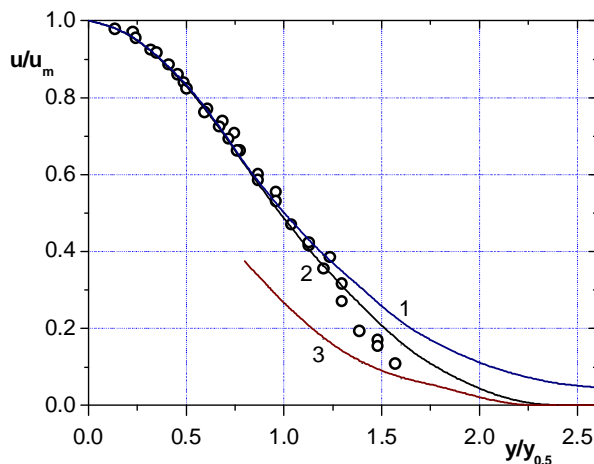


Рис. 2. Профили полной (кривая 2) и условных по турбулентной (1) и не турбулентной (3) среде средних значений скорости в « сильной » плоской турбулентной струе. Значки – опытные данные [12]

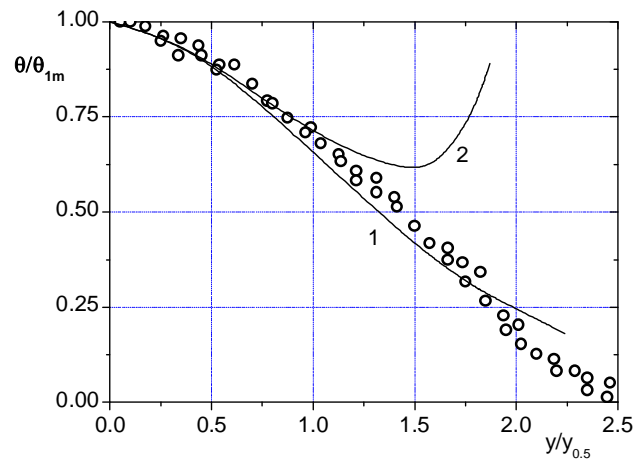


Рис. 3. Профили полной (1) и условной по турбулентной жидкости (2) средней температуры в « сильной » плоской турбулентной струе. Сплошные линии – расчетные, значки – опытные данные [12]

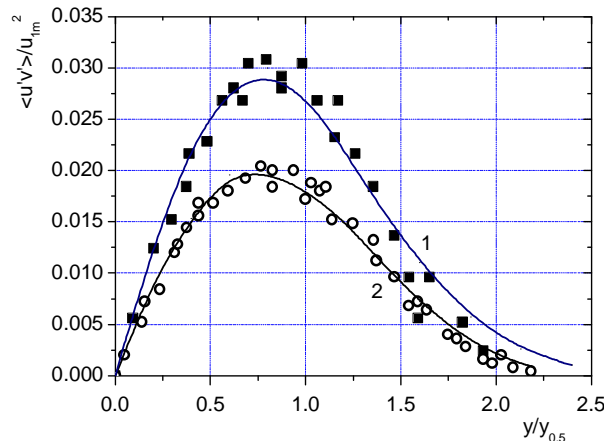


Рис. 4. Профили касательного напряжения трения $\langle u'v' \rangle / u_{1m}^2$ в турбулентной плоской « слабой » (кривая 1) и « сильной » (кривая 2) струях. Значки – опытные данные [8]

Расчет пульсационных характеристик.

Решение уравнения баланса кинетической энергии пульсационного движения (4) будем искать для автомодельной области. С этой целью введем новую переменную $\langle E \rangle / E_m = f(\varphi)$, где $f(\varphi)$ – универсальная функция распределения энергии в поперечном сечении струи, $E_m = E(\varphi = 0) = E_0 x^\delta$ – значение энергии турбулентности на плоскости симметрии струи. Переходя в уравнении (4) к новой переменной и используя гипотезы замыкания и найденные выражения для функции $F(\varphi)$, преобразуем его к виду

$$f'' + 2th\varphi f' + 4(1 - th^2\varphi - c)f + \lambda 4th^2\varphi(1 - th^2\varphi)^2 = 0. \quad (19)$$

Здесь $\lambda = A^2 / E_0$ находится из начальных условий задачи [8]. Как оказалось, она равна $\lambda = 15,625$. Величина $\delta = -1$ найдена из условия автомодельности уравнения (4). Граничные условия для уравнения (19) запишутся

$$\begin{aligned} f(\varphi) = f(\varphi_t) = 1, f'(\varphi) = f'(\varphi_t) = 0 & \quad \text{при} \\ \varphi = \varphi_t = 0; \quad f(\varphi) = f(\varphi_0) = 0 & \quad \text{при} \\ \varphi = \varphi_0 \rightarrow \infty; \quad f(\varphi_t) = c_3 & \quad \text{при} \\ \varphi_t = d_1; f(\varphi_0) = c_4 \text{ при } \varphi_0 = d_2. & \end{aligned}$$

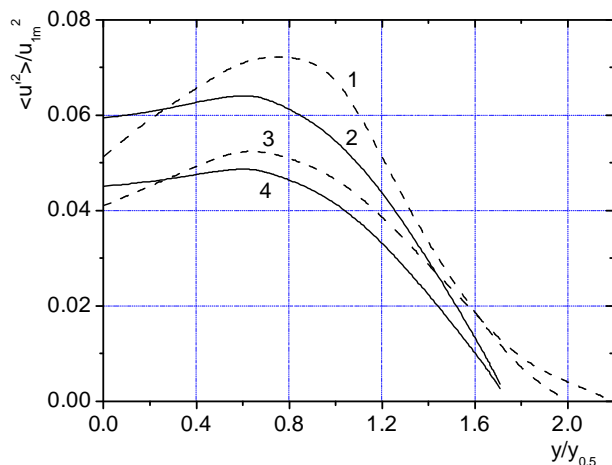


Рис. 5. Профиль кинетической энергии пульсаций в турбулентной плоской струе в спутном потоке. Кривая 1 – расчетная, кривая 2 – опытные данные [8]

Как и ранее, здесь d_1 – глубина проникновения турбулентной жидкости в область потенциального течения жидкости, а d_2 – глубина проникновения не турбулентной жидкости в пограничный слой струи. При численном решении уравнения (19) использовались более простые приближенные граничные условия для турбулентной и не турбулентной жидкости, имеющие вид: $f = 1, f' = 0$ при $\varphi = 0; f \rightarrow 0$ при $\varphi \rightarrow \infty$, при этом условие $\varphi \rightarrow \infty$ заменялось на $\varphi = 4$. В этом случае решение для не турбулентной жидкости теряет физический смысл в области $\varphi_0 < d_2$, а для турбулентной – при $\varphi_t > d_1$. Результаты расчета безусловных средних значений пульсационной энергии в поперечных сечениях турбулентной плоской струи в спутном потоке были сопоставлены (рис. 1) с экспериментальными данными работы [8].

Для вычисления интенсивностей пульсаций скорости уравнений (5) для рейнولدсовых напряжений с учетом приведенных гипотез замыкания преобразуются, как это сделано в работе [15], в систему алгебраических уравнений. В результате их решения были получены соотношения:

$$\frac{\langle u_i'^2 \rangle}{u_{1m}^2} = a_i \frac{\langle q^2 \rangle}{u_{1m}^2}, (i = 1, 2, 3), \quad (20)$$

где $i = 1$ соответствует интенсивности пульсаций продольной скорости, $i = 2, 3$ – поперечной

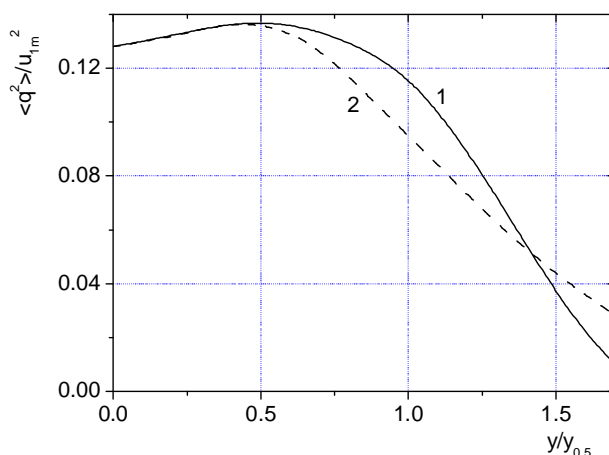


Рис. 6. Профили интенсивности продольной

пульсации скорости $\langle u'^2 \rangle / u_{1m}^2$.

«Слабая» струя: кривая 1 – опытные данные [8],
2 – расчетная. «Сильная» струя: кривая 3 –
опытные данные [8], 4 – расчетная

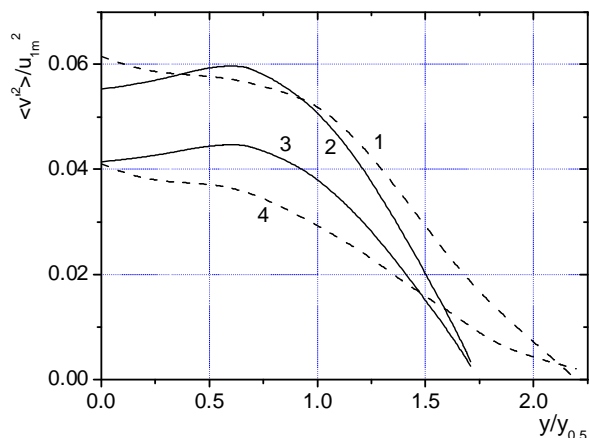


Рис. 7. Профили интенсивности поперечной пульсации

$$\text{скорости } \langle v^2 \rangle / u_{1m}^2$$

«Слабая» струя: кривая 1 – опытные данные [8],
2 – расчетная. «Сильная» струя: кривая 3 – расчетная,
4 – опытные данные [8]

скорости; $a_1 = 0,3523$, $a_2 = 0,3238$, $a_3 = 0,1922$ – для «сильной» струи; $a_1 = 0,4641$, $a_2 = 0,4324$, $a_3 = 0,3523$ – для «слабой» струи. Рассчитанные по формулам (20) профили интенсивности пульсаций всех трех компонент вектора скорости для «сильной» и «слабой» струй представлены сплошными линиями на рис. 5–8. Там же нанесены опытные данные, полученные в работе [8].

Как видно, расчет хорошо совпадает с опытными данными.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хинце И.О. Турбулентность, ее механизм и теория. М., 1963. С. 680.
2. Устименко Б.П. Модель турбулентной осесимметричной струи в спутном потоке в условиях перемежаемости // Горение и плазмохимия. 2003. Т. 1. №3. С. 207-212.
3. Устименко Б.П. Условные и полные средние характеристик температурного поля турбулентной осесимметричной струи в спутном потоке // Горение и плазмохимия. 2004. Т. 1, № 4. С. 315-323.
4. Nuzhnov Yu.V. Conditional Averaging of the Navier-Stokes Equations and a New Approach to Modelling Intermittent Turbulent Flows // J. Fluid Dynamics. 1997. V. 32, N 4. P. 489-494.
5. Нужнов Ю.В., Устименко Б.П. Диффузионное горение турбулентных потоков. Алма-Ата, 1993. С. 300.
6. Нужнов Ю.В., Устименко Б.П. Модель турбулентного пристенного пограничного слоя в условиях перемежаемости // Доклады НАН РК. 2001. N 2. С. 18-24.
7. Нужнов Ю.В., Устименко Б.П. Модель турбулентного пристенного пограничного слоя в условиях перемежаемости // Доклады НАН РК. 2002. № 2. С. 17-25.
8. Everitt K.E., Robins A.G. The development and structure

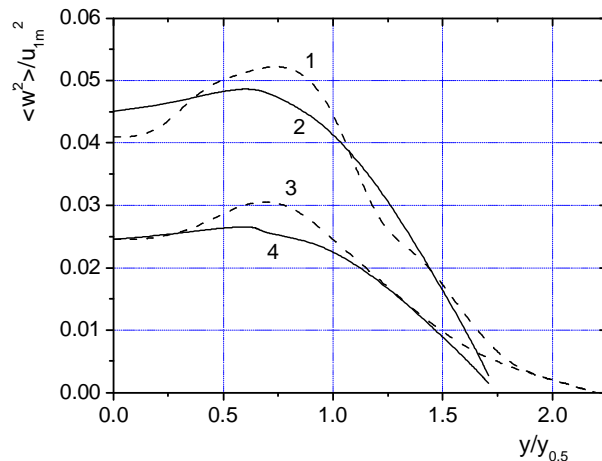


Рис. 8. Профили интенсивности поперечной пульсации

$$\text{скорости } \langle w^2 \rangle / u_{1m}^2$$

«Слабая» струя: кривая 1 – опытные данные [8],
2 расчетная. «Сильная» струя: кривая 3 –
опытные данные [8], 4 – расчетная

of turbulent plane jets // J. Fluid Mech. 1978. V. 88, part 3. P. 563-583.

9. Монин А.С., Яглом А.М. Статистическая гидромеханика. М.: Наука, 1965. Ч. 1. С. 639.

10. Rotta I.S. Statistische theorie inhomogener turbulenz // Z. fur Physic. 1951. Bd. 129, № 5. S. 547-572.

11. Устименко Б.П. Условные и полные средние характеристик динамических полей свободной осесимметричной турбулентной струи // Доклады НАН РК. 2002. № 6. С. 62-68.

12. Абрамович Г.Н. Теория турбулентных струй. М., 1960. С. 715.

13. Устименко Б.П. Процессы переноса в плоской турбулентной полуограниченной струе в условиях перемежаемости // Доклады НАН РК. 2005. № 1. С. 61-70.

14. Устименко Б.П. Условные и полные средние характеристик температурного поля турбулентной осесимметричной струи // Доклады НАН РК. 2003. № 5. С. 18-24.

15. Устименко Б.П. Пульсационные характеристики турбулентной осесимметричной струи // Доклады НАН РК. 2003. № 1. С. 122-128.

Резюме

Алма-кезек араласу шартындағы жазық турбулентті жартылай шектелген ағындағы бағытталған ағысының динамикалық және температуралық өрістерінің шартты және толық орташа статистикалық сипаттамаларының есептеулері жүргізілді. Есептеу нәтижелері тәжірибе көрсеткіштерімен салыстырылды.

Summary

Conditional and complete averages of statistical characteristics of dynamic and temperature field of turbulent plane jet in cocurrent flow with account of the effect of intermittency between turbulent and non turbulent fluid are considered. The calculations results are compared to experimental data.

Поступила 15.12.06г.