Б. Т. ЖУМАГУЛОВ, Ш. Н. КУТТЫКОЖАЕВА

СХОДИМОСТЬ ИТЕРАЦИОННОГО МЕТОДА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ МОДЕЛИ ОКЕАНА

Исследована сходимость одного класса итерационного метода для модели океана. Доказано, что решение итерационного метода сходится со скоростью геометрической прогрессии.

Рассмотрим систему уравнений

$$\mathrm{B}v_{\bar t}^{n+1} = \mu_0 v_{x_3\bar x_3}^{n+1} + \mu\Delta_h v^{n+1} - \hat{\nabla}_h \xi^{n+1} + f_h - \left(\alpha l \times v^{n+1} + \beta l \times v^n\right),\ \alpha + \beta = 1,\ \alpha > 0,\ \beta > 0_h, \quad (1)$$

$$\aleph\,\tau\xi_{\bar t}^{n+1} + \sum_{k=1}^{N-1} d\hat{i}v_h v^{n+1} h = 0,\ (\xi, 1)_{\Omega_h} = 0. \quad (2)$$

Здесь $\aleph$, τ – итерационные параметры, B – некоторый положительный оператор v.

$$v^0 = v_0, \quad \xi^0 = \xi_0, \quad x \in \overline{\Omega}_h, \quad v^n\Big|_{S_h} = 0. \quad (3)$$

В некотором смысле (по аналогам устойчивости двухслойных разностных схем для эллиптического уравнения) этот итерационный метод найлучший. Действительно, если положим $\aleph = 0$, $\mathrm{B} = 0$, то метод сойдется за одну итерацию (хотя в этом случае метод будет неконструктивным). Непосредственно применение теории двухслойных итерационных методов [4] для модели океана затруднительно, потому что запись итерационного метода (5.1), (5.2) отличается от формы классических двухслойных итерационных методов

$$\mathrm{B}yt + \mathrm{A}y = \varphi .$$

Исследуем сходимость итерационных методов (1)–(3). Переходя к погрешности $\omega^{n+1} = v^{n+1} - v$, $\pi^{n+1} = \xi^{n+1} - \xi$, из (1)–(3) получим сеточную краевую задачу для ω^{n+1}, π^{n+1}:

$$B\omega_{\bar t}^{n+1} = \mu_0 v_{x_3\bar x_3}^{n+1} + \mu\Delta_h\omega^{n+1} - \hat\nabla_h\pi^{n+1} - \left(\alpha l\times\omega^{n+1} + \beta l\times\omega^{n}\right), \tag{4}$$

$$\aleph\,\tau\pi_{\bar t}^{n+1} + \sum_{k=1}^{N-1} d\hat{i}v_h v^{n+1}h = 0,\ (\pi^{n+1},1)_{\Omega_h} = 0, \tag{5}$$

$$\omega^0 = v_0 - v,\quad \omega^n\Big|_{S_h} = 0,\quad \pi^0 = \xi_0 - \xi,\quad (\pi^0 1)_{\Omega_4^2} = 0\,. \tag{6}$$

Если D – симметричный сеточный неотрицательный оператор, определенный в $L_2(\Omega_h)$, то через $\|u\|_D$ будем обозначать полунорму $(Du,u) = \|u\|_D$. Пусть $B = B^* > 0$, через $\|u\|_2$ обозначим

$$\|u\|_2^2 = (Bu,u) + \frac{\tau\alpha_0}{\alpha_1}\|u\|_1^2, \tag{7}$$

где $\alpha_0 > 0,\quad \alpha_1 > 1$ – положительные постоянные.

Теорема 1. *Если* $B = B^* \geq \aleph_0\|v\|^2 \geq \|v\|^2$, *то итерационный процесс сходится со скоростью геометрической прогрессии при* $\tau \leq \tau_0(\beta)$ *и имеет место оценка*

$$\|\omega^{n+1}\|_2^2 + \aleph\,\tau\|\pi^{n+1}\|^2 \leq q(\|\omega^{n+1}\|_2^2 + \aleph\,\tau\|\pi^n\|^2),\quad q < 1.$$

Доказательство. Умножим (1) на $2\tau v^{n+1}h^3,\quad 2\tau h^2\xi^{n+1}$, суммируем по сеткам области и складываем. В результате имеем равенство

$$\begin{gathered}\|\omega^{n+1}\|_B^2 - \|\omega^n\|_B^2 + \|\omega^{n+1} - \omega^n\|_B^2 + \tau 2\|\omega^{n+1}\|_1^2 + \\ + \aleph\,\tau\left(\|\pi^{n+1}\|^2 - \|\pi^n\|^2\right) + \tau\aleph\|\pi^{n+1} - \pi^n\|^2 + 2\tau\beta(l\times\omega^n,\omega^{n+1}) = 0.\end{gathered} \tag{8}$$

Предположим

$$\|v\|_B = (Bv,v) \leq \aleph_1\|v\|_1,\quad \aleph_0\|v\|_B^2 \geq \|v\|^2. \tag{9}$$

Теперь оцениваем последние слагаемые (8):

$$\begin{gathered}\tau\beta\left|\left(l\times\omega^n,\omega^{n+1}\right)\right| \leq \left|\tau\beta\left(l\times\omega^n,\omega^{n+1} - \omega^n\right)\right| = \tau\beta\left|\left(l\times\omega^n,\omega^{n+1} - \omega^n\right)\right| = \\ = \tau\beta\left|\left(l\times(\omega^n - \omega^{n+1}),(\omega^{n+1} - \omega^n)\right)\right| + \tau\beta\left|\left(l\times\omega^{n+1},\omega^{n+1} - \omega^n\right)\right| \leq \\ \leq \tau\beta\left(\|\omega^{n+1}\|\|\omega^{n+1} - \omega^n\|\right) \leq \tau\beta\sqrt{\aleph_0}\,\|\omega^{n+1} - \omega^n\|_B\|\omega^{n+1}\| \leq \frac{1}{4}\|\omega^{n+1} - \omega^n\|_B^2 + \frac{\tau^2\beta\aleph_0 C_\Omega}{2}\|\omega^{n+1}\|_1^2.\end{gathered} \tag{9}$$

Здесь использовали неравенство Фридрихса

$$\|\omega^{n+1}\|^2 \leq C_\Omega\|\omega^{n+1}\|_1\,.$$

Отсюда имеем

$$\|\omega^{n+1}\|_B^2 - \|\omega^n\|_B^2 + \frac{1}{2}\|\omega_{\bar t}^{n+1}\|_B^2 + 2\tau\left(2 - C_\Omega\tau\aleph_0\beta\right)\|\omega^{n+1}\|_1^2 + \aleph\,\tau\left(\|\pi^{n+1}\|^2 - \|\pi^n\|^2\right) + \tau^3\aleph\|\pi_{\bar t}^{n+1}\|^2 \leq 0. \tag{10}$$

Оцениваем их (4) слагаемые $\hat\nabla_h\pi^{n+1}$ в негативной норме, в результате получаем

$$\|\pi^{n+1}\| \leq N_0\left(\|\omega_{\bar t}^{n+1}\|_B\sqrt{\aleph_0} + \|\omega^{n+1}\|_1 + \alpha\|\omega^{n+1}\| + \beta\|\omega^n\|\right).$$

Следовательно,

$$
\begin{aligned}
&\left\|\pi^{n+1}\right\|^2 \le 4N_0^2\left(\aleph_0\left\|\omega_{\bar t}^{n+1}\right\|_B^2+\left\|\omega^{n+1}\right\|_1^2+\alpha^2\left\|\omega^{n+1}\right\|^2+\beta^2\left\|\omega^n\right\|^2\right)\le\\
&\le 4N_0^2\left(\aleph_0\left\|\omega_{\bar t}^{n+1}\right\|_B^2+\left\|\omega^{n+1}\right\|_1^2+(\alpha^2+2\beta^2)\left\|\omega^{n+1}\right\|^2+2\beta^2\left\|\omega^{n+1}-\omega^n\right\|^2\right)\le \qquad (11)\\
&\le 4N_0^2\left(\aleph_0\left\|\omega_{\bar t}^{n+1}\right\|_B^2+\left\|\omega^{n+1}\right\|_1^2+(\alpha^2+2\beta^2)C_\Omega\left\|\omega^{n+1}\right\|_1^2+2\beta^2\aleph_0\left\|\omega_{\bar t}^{n+1}\right\|_B^2\tau^2\right)
\end{aligned}
$$

Умножим (11) на $\lambda_0\tau^2\aleph$ и, сложив с (10), где λ_0 – некоторая положительная постоянная, получим

$$
\left\|\omega^{n+1}\right\|_B^2-\left\|\omega^n\right\|_B^2+\tau^2\left(\frac{1}{2}-8\beta^2N_0^2\aleph_0\tau^2\aleph\lambda_0-4N_0^2\aleph_0\aleph\lambda_0\right)\left\|\omega_{\bar t}^{n+1}\right\|_B+ \qquad (12)
$$

$$
+\tau\left(2-C_\Omega\tau\aleph_0\beta-4N_0^2\lambda_0\tau\aleph(1+(\alpha^2+2\beta^2))C_\Omega\right)\cdot\left\|\omega^{n+1}\right\|_1^2+\aleph\,\tau(1+\lambda_0\tau)\left\|\pi^{n+1}\right\|^2\le\left\|\omega^{n+1}\right\|_B^2+\tau\aleph\left\|\pi^n\right\|^2.
$$

Поскольку $\lambda_0>0$ – произвольное число, то выберем $\lambda_0, u\tau$ так, чтобы выполнялось неравенство

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}-8N_0^2\lambda_0\tau^2\aleph_0\beta^2\aleph-4N_0^2\aleph_0\aleph\lambda_0\ge 0,\\
&2-C_\Omega\tau\beta-4N_0^2\lambda_0\tau\aleph(1+(\alpha^2+2\beta^2)C_\Omega)\ge 2\alpha_0>0, \qquad (13)
\end{aligned}
$$

в результате получим

$$
\left\|\omega^{n+1}\right\|_B^2-\left\|\omega^n\right\|_B^2+2\tau\alpha_0\left\|\omega^{n+1}\right\|_1^2+\aleph\,\tau(1+\lambda_0\tau)\left\|\pi^{n+1}\right\|^2\le\left\|\omega^n\right\|_B^2+\aleph\,\tau\left\|\pi^n\right\|^2.
$$

Из последнего неравенства следует

$$
(1+\frac{\tau\alpha_0}{\aleph_1})\left\|\omega^{n+1}\right\|_B^2+\tau\alpha_0\left\|\omega^{n+1}\right\|_1^2+\aleph\,\tau(1+\lambda_0\tau)\left\|\pi^{n+1}\right\|^2\le\left\|\omega^n\right\|^2+\aleph\,\tau\left\|\pi^n\right\|^2. \qquad (14)
$$

Левую часть (14) оцениваем снизу

$$
\alpha_1\left(\left\|\omega^{n+1}\right\|_B^2+\aleph\,\tau\left\|\pi^{n+1}\right\|^2\right)+\tau\alpha_0\left\|\omega^{n+1}\right\|_1^2\le\left\|\omega^n\right\|_B^2+\aleph\,\tau\left\|\pi^n\right\|^2, \qquad (15)
$$

где $\alpha_1=\min\left\{1+\frac{\tau\alpha_0}{\aleph_1},\quad 1+\lambda_0\tau\right\}>1$.

Разделим (15) на α_1, оценим правую часть сверху

$$
\left\|\omega^{n+1}\right\|_B^2+\aleph\,\tau\left\|\pi^{n+1}\right\|^2+\frac{\tau\alpha_0}{\alpha_1}\left\|\omega^{n+1}\right\|_1^2+\frac{\tau\alpha_0}{\alpha_1}\left\|\omega^{n+1}\right\|^2\le\frac{1}{\alpha_1}\left(\left\|\omega^n\right\|_B^2+\frac{\tau\alpha_0}{\alpha_1}\left\|\omega^n\right\|_1^2+\aleph\,\tau\left\|\pi^n\right\|^2\right).
$$

Отсюда получим

$$
\left\|\omega^{n+1}\right\|_B^2+\aleph\,\tau\left\|\pi^n\right\|^2+\frac{\tau\alpha_0}{\alpha_1}\left\|\omega^{n+1}\right\|_1^2\le q^n\left(\left\|\omega^0\right\|_B^2+\frac{\tau\alpha_0}{\alpha_1}\left\|\omega^0\right\|_1^2+\aleph\,\tau\left\|\pi^0\right\|^2\right), \qquad (16)
$$

где $q=\frac{1}{\alpha_1}$.

Таким образом, мы доказали сходимость итерационного метода (1)–(3). Однако остались неясными следующие вопросы: во-первых, как реализовать методом (1)–(3), во-вторых, что будет если B зависит от τ. В этом случае, вообще говоря, $\aleph_1$ зависит от τ. Находим из (2) ξ^{n+1}, подставим в (1)

$$
Bv_{\bar t}^{n+1}=\mu_0 v_{x_3\bar x_3}^{n+1}+\mu\Delta_h v^{n+1}+\frac{1}{\aleph}\hat\nabla_h\sum_{k=1}^{N-1}d\hat i v_h v_h^{n+1}h-\left(\alpha l\times v^{n+1}+\beta l\times v^n\right)+f_h-\frac{1}{\aleph}\hat\nabla_h\xi^n. \qquad (17)
$$

Подставляя в (17) $v^{n+1}=v^n+\tau v_{\bar t}^{n+1}$, получаем

$$\left(\mathrm{B} - \tau\mu_0\Lambda_{33} - \mu\tau\Delta_h - \frac{\tau}{\aleph}\hat{\nabla}_h h\sum_{k=1}^{N-1} d\hat{i}v_h + \tau\alpha l\times\right)v_{\bar{t}}^{n+1} =$$

$$= \mu_0 v^n_{x_3\bar{x}_3} + \mu\Delta_h v^n + \frac{1}{\aleph}\hat{\nabla}_h\sum_{k=1}^{N-1} d\hat{i}v_h v_h^n h - l\times v^n + f_h - \hat{\nabla}_h\xi^n, \tag{18}$$

$$\Lambda_{33}v = v_{\bar{x}_3 x_3}.$$

Обозначим $\mathrm{A} \quad \left(\mathrm{B} - \tau\Lambda_{33} - \mu\tau\Delta_h - \frac{\tau}{\aleph}h\hat{\nabla}_h\sum_{k=1}^{N-1} d\hat{i}v_h + \tau\alpha l\times\right)$,

и расчетные формулы преобразуют вид

$$\mathrm{A}\frac{v^{n+1} - v^n}{\tau} \quad \mu_0 v^n_{x_3\bar{x}_3} + \mu\Delta_h v^n + \frac{1}{\aleph}\hat{\nabla}_h\sum_{k=1}^{N-1} d\hat{i}v_h v^n h - l\times v^n + f_h - \hat{\nabla}_h\xi^n,$$

$$\xi^{n+1} = \xi^n - \frac{1}{\aleph}\sum_{k=1}^{N-1} d\hat{i}v v^{n+1} h. \tag{19}$$

При этом оператор A связан с B соотношением

$$\mathrm{B} \quad \mathrm{A} + \tau\mu_0\Lambda_{33} + \nu\tau\Delta_h + \frac{\tau}{\aleph}h\hat{\nabla}_h\sum_{k=1}^{N-1} d\hat{i}v_h + \tau\alpha l\times. \tag{20}$$

Таким образом, для перехода от известных значений $\{v^n, q^n\}$ к $\{v^{n+1}, q^{n+1}\}$ необходимо решать первое уравнение (19), при этом находится v^{n+1}, затем q^{n+1} находится из второго уравнения (19) по явным формулам. Отсюда следует, что оператор A должен быть в некотором смысле «легко обратимым», т.е. уравнение $\mathrm{A}\varphi = \psi$ должно легко решаться на ЭВМ. Поскольку метод (1)–(3) сходится при $\mathrm{B} = \mathrm{B}^* \geq \aleph_0\mathrm{E}$, то в силу $\mu_0\Lambda_{33} + \mu\Delta_h < 0,\ h\sum_{k=1}^{N-1}\hat{\nabla}d\hat{i}v_h < 0$ из (20) следует, что оператор A должен быть симметричным и положительно определенным.

Теорема 2. *Пусть* $\mathrm{A} = \mathrm{A}^* > \mathrm{E}\rho_0$. *Тогда для любого* $\aleph > 0$ *существует* $\bar{\tau} = \bar{\tau}(\aleph)$ *такое, что при любом* $\tau \leq \bar{\tau}$ *оператор* $\mathrm{B} = \mathrm{A} + \tau(\mu_0\Lambda_{33} + \mu\Delta_h + \hat{\nabla}_h h\sum_{k=1}^{N-1} d\hat{i}v_h)$ *будет положительно определенным и метод (1)–(3) сходится со скоростью геометрической прогрессии при любом начальном приближении.*

Доказательство. Действительно, так как $\mathrm{A} = \mathrm{A}^* > 0$ определен в конечномерном пространстве, то существуют постоянные γ_1, γ_2 такие, что

$$-\gamma_1(\mu_0\Lambda_{33} + \mu\Delta_h) \leq \mathrm{A} \leq -\gamma_2(\mu_0\Lambda_{33} + \mu\Delta_h), \tag{26}$$

γ_1, γ_2, вообще говоря, могут зависеть от шага сетки

$$\mathrm{B} \quad \mathrm{A} + \tau(\mu\Delta_h + \mu_0\Lambda_{33}) + \frac{\tau}{\aleph}h\hat{\nabla}_h\sum_{k=1}^{N-1} d\hat{i}v_h \geq (-\gamma_1 + \tau)(\mu_0\Lambda_{33} + \mu\Delta_h) +$$

$$+\frac{\tau}{\mu_1\aleph}(\mu\Delta_h + \mu_0\Lambda_{33}) \geq (-\gamma_1 + \tau + \frac{\tau}{\mu_1\aleph})(\mu\Delta_h + \mu_0\Lambda_{33}) = -(\gamma_1 - \tau - \frac{\tau}{\mu_1\aleph})(\mu\Delta_h + \mu_0\Lambda_{33}),$$

где $\mu_1 = \min\{\mu_0, \mu\}$. Поскольку $(\mu\Delta_h + \mu_0\Lambda_{33}) < 0$, A не зависит от $\tau, \aleph$, то выберем $\bar{\tau}$ так, что корень уравнения

$$\bar{\tau}(1 + \frac{1}{\mu_1\aleph}) = \gamma_1. \quad (27)$$

Тогда при любом $\tau < \bar{\tau}(\aleph)$ имеем $B > 0$ и по теореме 1 метод (1)–(3) сходится со скоростью геометрической прогрессии. Сходимость схемы второго порядка аппроксимации в сдвинутых сетках сходимости итерационного метода исследуется аналогично.

В условиях теоремы видно, что τ зависит от $\aleph_1$, следовательно, от γ_2. Если γ_1, γ_2, не зависят от *h*, то итерационный метод сходится при $\tau < \bar{\tau}$ независящемся от *h*. Пока нам не удалось построить для оператора A экономичной реализации на ЭВМ, в котором γ_1, γ_2 не зависят от *h* одновременно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кочергин В.П.* Теория и метод расчета океанических течений. Новосибирск, 1978. 124 с.
2. *Вабищевич П.Н.* Метод фиктивных областей для задачи математической физики. М., 1991. 156 с.
3. *Смагулов Ш.* Метод фиктивных областей для краевой задачи уравнений Навье–Стокса. Препринт ВЦ СО АН. Новосибирск, 1976.
4. *Конавалов А.Н.* // Численные методы механики сплошной среды. 1972. Т. 3. № 5.
5. *Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск, 1983. 305 с.

Резюме

Океан моделінің итерациалық әдісінің бір класының жинақталуы зерттелінген. Итерациалық әдістің шешімінің геометриялық прогрессия жылдамдығымен жинақталатындығы дәлелденген.

Summary

In this work convergence of one class of an iterative method for model of ocean is investigated. It is proved that the decision of an iterative method converges with speed of a geometrical progression.

Поступила 3.06.07г.