УДК. 517.95

Б. Д. КОШАНОВ

ФУНКЦИЯ ГРИНА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В ЧЕТНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

(Представлена академиком НАН РК Т. Ш. Кальменовым)

Построен явный вид функции Грина задачи Дирихле в шаре для полигармонических уравнений в четной размерности.

Задача продолжения заданной функции с сохранением класса хорошо изучена. При исследовании спектральных свойств дифференциальных операторов возникает несколько иная задача – задача изменения значений заданной функции на некоторой фиксированной части области определения, сохраняя ее граничные значения и гладкость во всей области определения. Сформулируем строгую постановку задачи. Фиксируем натуральное число n. Пусть в области D из R^n задана достаточно гладкая функция $u(x)$, граничные значения которой удовлетворяют некоторому набору условий: $\Gamma_1 u\big|_{x\in\partial D} = 0,\ \Gamma_2 u\big|_{x\in\partial D} = 0\ ,\dots,\ \Gamma_m u\big|_{x\in\partial D} = 0$. Требуется найти такую функцию $w(x)$, которая вне некоторой внутренней части D совпадает с заданной функцией и имеет в области D ту же гладкость, что исходная функция. Таким образом, построенная функция $w(x)$ удовлетворяет тем же граничным условиям, что исходная функция $u(x)$. Иногда для функции $w(x)$ должны выполняться оценки, справедливые для $u(x)$. При построении функции $w(x)$ по заданной функции $u(x)$ обычно используется краевая задача для полигармонического уравнения. Чтобы доказывать справедливость требуемых оценок для $w(x)$, необходимо иметь явные формулы решений краевых задач для полигармонического уравнения.

В данной статье в явном виде построена функция Грина задачи Дирихле в шаре для полигармонического уравнения в пространстве четной размерности. Отметим, что полученные формулы функции Грина имеют самостоятельное значение. В частности, в теории упругости важное место занимает явное представление решения задачи Дирихле для бигармонического уравнения.

1. Вспомогательные утверждения. Основной результат. Постановка задачи. Требуется найти решение следующей задачи Дирихле в области $\Omega_\delta = \{x : \|x\| < \delta\} \subset R^n$ (n – четное натуральное число, δ – положительное число) с границей $S_\delta = \partial\Omega_\delta = \{x : \|x\| = \delta\}$:

$$\Delta_x^m u(x) = f(x), \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial^i}{\partial \vec{n}_x^i} u\right|_{|x|=\delta} = 0, \quad i = 0,1,2,\dots,m-1, \tag{2}$$

где $\vec{n}_x = \dfrac{x}{|x|}$ – производная по нормали к $\partial\Omega_\delta$ в точке x.

Имеет место следующие леммы:

Лемма 1. Когда n четное и 2m ≥ n, то фундаментальное решение уравнения (1) задается формулой [1]:

$$\varepsilon_{2m,n}(x) = c_{2m,n}|x|^{2m-n}\log|x|, \tag{3}$$

где

$$c_{2m,n} = \frac{(-1)^{n/2-1}}{\Gamma(m)\Gamma(m-n/2+1)2^{2m-1}\pi^{n/2}}.$$

Лемма 2. При любых $x, y \in \Omega_\delta$ выполняется тождество [2]

$$\left.\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x - \frac{y}{|y|^2}\delta^2\right| \log|x-y|\right|_{\forall x,y\in\Omega_\delta} = \left.\left|\frac{x}{\delta}\right|\left|y - \frac{x}{|x|^2}\delta^2\right| \log|x-y|\right|_{\forall x,y\in\Omega_\delta}. \tag{4}$$

Лемма 3. При $x \in S_\delta$ и для любого $y \in \Omega_\delta$ выполняется тождество [2]

$$\left.\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x - \frac{y}{|y|^2}\delta^2\right| \log|x-y|\right|_{|x|=\delta,\forall y\in\Omega_\delta} = |y-x|\ \log|x-y|\Big|_{|x|=\delta,\forall y\in\Omega_\delta}. \tag{5}$$

Справедлива следующая

Теорема 1. ***В случае n четное и 2m ≥ n функция Грина задачи Дирихле (1), (2) представима в виде***

$$G_{2m,n}(x,y)=\varepsilon_{2m,n}(x,y)-g^1_{2m,n}(x,y)-\sum_{k=2}^{m}g^k_{2m,n}(x,y),$$

где $\varepsilon_{2m,n}(x,y)=c_{2m,n}|x-y|^{2m-n}\ln|x-y|,$ (6)

$$g^1_{2m,n}(x,y)=c_{2m,n}\left[\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|\right]^{2m-n}\ln|x-y|, \quad (7)$$

$$g^k_{2m,n}(x,y)=(2m-n)(2m-2-n)...(2m-2k+4-n)c_{2m,n}\cdot\left[\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|\right]^{2m-2k+2-n}\ln|x-y|\cdot$$

$$\left(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\right)^{k-1}\left(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2\right)^{k-1}\cdot\frac{\delta^{2(k-1)}}{(-2)^{k-1}(k-1)!},\ k=2,3,...,m, \quad (8)$$

$$c_{2m,n}=\frac{(-1)^{n/2-1}}{\Gamma(m)\Gamma(m-n/2+1)2^{2m-1}\pi^{n/2}}. \quad (9)$$

В случае нечетного n и при четных n, когда 2m < n, явный вид функции Грина задачи Дирихле (1), (2) представлен в работе [4].

2. Краткое доказательство теоремы. Требуемая функция Грина строится за m шагов, где m – степень оператора Лапласа в уравнении (1). На первом шаге построим первое приближение $\varepsilon^1_{2m,n}(x,y)$ функции Грина, которое является фундаментальным решением уравнения (1) и удовлетворяет условиям:

i) симметрично относительно перестановки (x,y) на (y,x),

ii) $\varepsilon^1_{2m,n}(x,y)\big|_{|x|=\delta}=0$.

В силу леммы 3 выполняется следующее тождество:

$$\varepsilon_{2m,n}(x,y)\big|_{|x|=\delta}=c_{2m,n}|x-y|^{2m-n}\log|x-y|\Big|_{|x|=\delta}=c_{2m,n}\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-n}\log|x-y|\Bigg|_{|x|=\delta},$$

поэтому введем так называемую компенсирующую функцию $g^1_{2m,n}(x,y)$

$$g^1_{2m,n}(x,y)=c_{2m,n}\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-n}\log|x-y|, \quad (10)$$

которая удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\Delta^m_x g^1_{2m,n}(x,y)=0,$$

$$g^1_{2m,n}(x,y)\big|_{|x|=\delta}=\varepsilon_{2m,n}(x,y)\big|_{|x|=\delta}.$$

Разность функции

$$\varepsilon^1_{2m,n}(x,y) = \varepsilon_{2m,n}(x,y) - g^1_{2m,n}(x,y)$$

называем первым приближением функции Грина $G_{2m,n}(x,y)$, которая удовлетворяет следующим условиям:

$$\Delta^m_x \varepsilon^1_{2m,n}(x,y) = \delta(x-y),$$

$$\varepsilon^1_{2m,n}(x,y)\Big|_{|x|=\delta} = 0\,.$$

Во втором шаге вычислим производные по нормали $\vec{n}_x = \frac{x}{|x|}$ от функции $\varepsilon_{2m,n}(x,y),\ g^1_{2m,n}(x,y)$:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}_x}\varepsilon_{2m,n}(x,y) =$$

$$= (2m-n)c_{2m,n}\cdot |x-y|^{2m-n-1}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{\delta}\frac{x_j-y_j}{|x-y|}\log|x-y| + c_{2m,n}\cdot|x-y|^{2m-n-2}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{x_j^2-(x_j,y_j)}{|x|}\right] =$$

$$= \frac{(2m-n)c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot \varepsilon_{2m-2,n}(x,y)(|x| - \frac{(x,y)}{|x|}) + c_{2m,n}|x-y|^{2m-2-n}(|x| - \frac{(x,y)}{|x|})\,;$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}_x} g^1_{2m,n}(x,y) = (2m-n)c_{2m,n}\cdot\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-1-n}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{\delta}\frac{x_j-\frac{y_j}{|y|^2}\delta^2}{\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|}\log|x-y| +$$

$$+ c_{2m,n}\cdot\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-n}\frac{1}{|x-y|^2}\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{|x|}(x_j-y_j) =$$

$$= \frac{(2m-n)c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot g^1_{2m-2,n}(x,y)(|x|\frac{|y|^2}{\delta^2} - \frac{(x,y)}{|x|}) + c_{2m,n}\cdot\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-n}\frac{1}{|x-y|^2}(|x| - \frac{(x,y)}{|x|})\,.$$

На границе $S_\delta = \partial\Omega_\delta$ последнее выражение имеет следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}_x} g^1_{2m,n}(x,y)\ \Big|_{|x|=\delta} = \frac{(2m-n)c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot g^1_{2m-2,n}(x,y)(|x|\frac{|y|^2}{\delta^2} - \frac{(x,y)}{|x|})\ \Big|_{|x|=\delta} +$$

$$+ c_{2m,n}\cdot\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-n}\frac{1}{\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^2}(|x| - \frac{(x,y)}{|x|})\ \Big|_{|x|=\delta} =$$

$$= \frac{(2m-n)c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot g^1_{2m-2,n}(x,y)(|x|\frac{|y|^2}{\delta^2} - \frac{(x,y)}{|x|})\ \Big|_{|x|=\delta} + c_{2m,n}\cdot\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-2-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-2-n}(|x| - \frac{(x,y)}{|x|})\ \Big|_{|x|=\delta}.$$

Отсюда получим:

$$\frac{\partial}{\partial \vec{n}_x}\varepsilon^1_{2m,n}(x,y)\Big|_{|x|=\delta}=[\frac{\partial}{\partial \vec{n}_x}\varepsilon_{2m,n}(x,y)-\frac{\partial}{\partial \vec{n}_x}g^1_{2m,n}(x,y)]\Big|_{|x|=\delta}=\frac{(2m-n)c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot g^1_{2m-2,n}(x,y)(1-\frac{|y|^2}{\delta^2})\cdot|x|\Big|_{|x|=\delta}. \tag{11}$$

Поэтому введем новую компенсирующую функцию $g^2_{2m,n}(x,y)$, чтобы выполнялись следующие условия:

$$\Delta^m_x g^2_{2m,n}(x,y)=0,$$

$$g^2_{2m,n}(x,y)\Big|_{|x|=\delta}=0,\ g^2_{2m,n}(x,y)=g^2_{2m,n}(y,x),$$

$$\frac{\partial g^2_{2m,n}}{\partial \vec{n}_x}\Big|_{|x|=\delta}=\frac{\partial \varepsilon^1_{2m,n}}{\partial \vec{n}_x}\Big|_{|x|=\delta}=[\frac{\partial}{\partial \vec{n}_x}\varepsilon_{2m,n}(x,y)-\frac{\partial}{\partial \vec{n}_x}g^1_{2m,n}(x,y)]\Big|_{|x|=\delta}.$$

Отсюда, а также из соотношения (11) единственным образом определяется функция $g^2_{2m,n}(x,y)$:

$$g^2_{2m,n}(x,y)=\frac{(2m-n)c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot g^1_{2m-2,n}(x,y)\cdot(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2)(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2)\cdot\frac{\delta^2}{(-2)^1 1!}=$$

$$=(2m-n)\cdot c_{2m,n}\cdot\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-2-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-2-n}\log|x-y|(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2)(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2)\cdot\frac{\delta^2}{(-2)^1 1!}. \tag{12}$$

Таким образом, второе приближение функции Грина имеет вид

$$\varepsilon^2_{2m,n}(x,y)=\varepsilon_{2m,n}(x,y)-g^1_{2m,n}(x,y)-g^2_{2m,n}(x,y)=\varepsilon_{2m,n}(x,y)-\sum_{k=1}^{2}g^k_{2m,n}(x,y)=$$

$$=c_{2m,n}|x-y|^{2m-n}\log|x-y|-c_{2m,n}\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-n}\log|x-y|-$$

$$-(2m-n)\cdot c_{2m,n}\cdot\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-2-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-2-n}\log|x-y|(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2)(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2)\cdot\frac{\delta^2}{(-2)^1 1!} \tag{13}$$

и удовлетворяет условиям:

$$\Delta^m_x\varepsilon^2_{2m,n}(x,y)=\delta(x-y),$$

$$\varepsilon^2_{2m,n}(x,y)\Big|_{|x|=\delta}=0,\ \frac{\partial}{\partial \vec{n}_x}\varepsilon^2_{2m,n}(x,y)\Big|_{|x|=\delta}=0.$$

В третьем шаге вычислим вторые производные от второго приближения функции Грина, рассмотрим их следы, построим третью компенсирующую функцию и напишем третье приближение функции Грина. Продемонстрируем сказанное.

Берем вторые производные по нормали к $\partial\Omega_\delta$ в точке x от функции $\varepsilon_{2m,n}(x,y)$, $g^1_{2m,n}(x,y)$, $g^2_{2m,n}(x,y)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial \vec{h}_x^2}\varepsilon_{2m,n}(x,y)=\frac{(2m-n)(2m-2-n)c_{2m,n}}{c_{2m-4,n}}\cdot\varepsilon_{2m-4,n}(x,y)\Big(|x|-\frac{(x,y)}{|x|}\Big)^2+$$

$$+(2m-n)c_{2m,n}\cdot|x-y|^{2m-4-n}\Big(|x|-\frac{(x,y)}{|x|}\Big)^2+c_{2m,n}\cdot|x-y|^{2m-4-n}\Big(|x|-\frac{(x,y)}{|x|}\Big)\ +$$

$$+\frac{(2m-n)c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot\varepsilon_{2m-2,n}(x,y)+c_{2m,n}\cdot|x-y|^{2m-2-n}\ ; \qquad (14)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \vec{h}_x^2}g^1_{2m,n}(x,y)=\frac{\partial}{\partial \vec{h}_x}\Big[(2m-n)c_{2m,n}\cdot\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-2-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-2-n}\log|x-y|\Big(|x|\frac{|y|^2}{\delta^2}-\frac{(x,y)}{|x|}\Big)+$$

$$+c_{2m,n}\cdot\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-n}\frac{1}{|x-y|^2}\Big(|x|-\frac{(x,y)}{|x|}\Big)\Big]=$$

$$=\frac{(2m-n)(2m-2-n)c_{2m,n}}{c_{2m-4,n}}\cdot g^1_{2m-4,n}(x,y)\Big(|x|\frac{|y|^2}{\delta^2}-\frac{(x,y)}{|x|}\Big)^2+$$

$$+(2m-n)c_{2m,n}\cdot\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-2-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-2-n}\frac{1}{|x-y|^2}\Big(|x|-\frac{(x,y)}{|x|}\Big)\Big(|x|\frac{|y|^2}{\delta^2}-\frac{(x,y)}{|x|}\Big)+$$

$$+c_{2m,n}\cdot g^1_{2m-2,n}(x,y)\left|\frac{y}{\delta}\right|^2+c_{2m,n}\cdot\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-2-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-2-n}\Big(|x|\frac{|y|^2}{\delta^2}-\frac{(x,y)}{|x|}\Big)\frac{1}{|x-y|^2}\Big(|x|-\frac{(x,y)}{|x|}\Big)+$$

$$+c_{2m,n}\cdot\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-n}\frac{(-2)}{|x-y|^4}\Big(|x|-\frac{(x,y)}{|x|}\Big)^2+c_{2m,n}\cdot\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-n}\frac{1}{|x-y|^2}\ ; \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial \vec{h}_x}g^2_{2m,n}(x,y)=\frac{\partial}{\partial \vec{h}_x}\Big[\frac{(2m-n)c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot g^1_{2m-2,n}(x,y)\Big(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\Big)\Big(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2\Big)\Big(-\frac{\delta^2}{2}\Big)\Big]=$$

$$=\frac{(2m-n)(2m-2-n)c_{2m,n}}{c_{2m-4,n}}\cdot g^1_{2m-4,n}(x,y)\Big(|x|\frac{|y|^2}{\delta^2}-\frac{(x,y)}{|x|}\Big)\Big(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\Big)\Big(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2\Big)\Big(-\frac{\delta^2}{2}\Big)+$$

$$+c_{2m,n}\cdot\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-2-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-2-n}\frac{1}{|x-y|^2}\Big(|x|-\frac{(x,y)}{|x|}\Big)\Big(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\Big)\Big(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2\Big)\Big(-\frac{\delta^2}{2}\Big)+$$

$$+\frac{(2m-n)c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot g^1_{2m-2,n}(x,y)\Big(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\Big)\frac{(-2|x|)}{(-2)}\ ;$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \vec{h}_x^2} g^2_{2m,n}(x,y) = \frac{(2m-n)(2m-2-n)(2m-4-n)c_{2m,n}}{c_{2m-6,n}} \cdot$$

$$\cdot\, g^1_{2m-6,n}(x,y)\Big(|x|\left|\frac{y}{\delta}\right|^2 - \frac{(x,y)}{|x|}\Big)^2\Big(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\Big)\Big(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2\Big)\Big(-\frac{\delta^2}{2}\Big) +$$

$$+\, c_{2m,n}\cdot\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-2-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-2-n}\frac{1}{|x-y|^2}\Big(|x|-\frac{(x,y)}{|x|}\Big)\Big(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\Big)\Big(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2\Big)\Big(-\frac{\delta^2}{2}\Big) +$$

$$+\frac{(2m-n)(2m-2-n)}{c_{2m-4,n}}c_{2m,n}\cdot g^1_{2m-4,n}(x,y)\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\Big(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\Big)\Big(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2\Big)\Big(-\frac{\delta^2}{2}\Big) +$$

$$+\frac{(2m-n)(2m-2-n)}{c_{2m-4,n}}c_{2m,n}\cdot g^1_{2m-4,n}(x,y)\Big(|x|\left|\frac{y}{\delta}\right|^2 - \frac{(x,y)}{|x|}\Big)|x| +$$

$$+(2m-2-n)c_{2m,n}\cdot\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-4-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-4-n}\frac{1}{|x-y|^2}\Big(|x|-\frac{(x,y)}{|x|}\Big)^2\Big(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\Big)\Big(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2\Big)\left(\frac{\delta^2}{-2}\right)+$$

$$+\frac{(2m-n)c_{2m,n}}{c_{2m-2,n}}\cdot g^1_{2m-2,n}(x,y)\Big(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2\Big); \tag{16}$$

Рассмотрим разность выражений (14), (15), (16) и их следы на границе $S_\delta = \partial\Omega_\delta$:

$$\frac{\partial^2}{\partial \vec{h}_x^2}\varepsilon^2_{2m,n}(x,y)\Big|_{|x|=\delta} = \Big[\frac{\partial^2}{\partial \vec{h}_x^2}\varepsilon_{2m,n}(x,y) - \frac{\partial^2}{\partial \vec{h}_x^2}g^1_{2m,n}(x,y) - \frac{\partial^2}{\partial \vec{h}_x^2}g^2_{2m,n}(x,y)\Big]\Big|_{|x|=\delta} =$$

$$= \frac{(2m-n)(2m-4-n)c_{2m,n}}{c_{2m-4,n}}\cdot g^1_{2m-4,n}(x,y)\Big[\Big(1-\frac{|y|^2}{\delta^2}\Big)^2\cdot|x|^2 + \frac{1}{2}\Big(1-\frac{|y|^2}{\delta^2}\Big)\cdot|y|^2\Big(1-\frac{|x|^2}{\delta^2}\Big)\Big]\Big|_{|x|=\delta} =$$

$$= \frac{(2m-n)(2m-4-n)c_{2m,n}}{c_{2m-4,n}}\cdot g^1_{2m-4,n}(x,y)\Big(1-\frac{|y|^2}{\delta^2}\Big)^2\cdot|x|^2\Big|_{|x|=\delta}. \tag{17}$$

Новая компенсирующая функция $g^3_{2m,n}(x,y)$ удовлетворяет следующим свойствам:

$$\Delta_x^m g^3_{2m,n}(x,y) = 0,$$

$$g^3_{2m,n}(x,y)\Big|_{|x|=\delta} = 0,\quad g^3_{2m,n}(x,y) = g^3_{2m,n}(y,x),$$

$$\frac{\partial g^3_{2m,n}(x,y)}{\partial \vec{h}_x}\Big|_{|x|=\delta} = 0,\quad \frac{\partial^2 g^3_{2m,n}(x,y)}{\partial \vec{h}_x^2}\Big|_{|x|=\delta} = \frac{\partial^2\varepsilon^2_{2m,n}(x,y)}{\partial \vec{h}_x^2}\Big|_{|x|=\delta}.$$

Отсюда единственным образом определяется функция $g_{2m,n}^{3}(x,y)$:

$$g_{2m,n}^{3}(x,y)=\frac{(2m-n)(2m-2-n)c_{2m,n}}{c_{2m-4,n}}\cdot g_{2m-4,n}^{1}(x,y)\cdot(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2})^{2}(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^{2})^{2}\cdot\frac{\delta^{4}}{(-2)^{2}2!}=$$

$$=(2m-n)(2m-2-n)c_{2m,n}\cdot\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-4-n}\left|x-\frac{y}{|y|^{2}}\delta^{2}\right|^{2m-4-n}\log|x-y|\cdot(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2})^{2}(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^{2})^{2}\cdot\frac{\delta^{4}}{(-2)^{2}2!}. \quad (18)$$

Таким образом, третье приближение функции Грина имеет вид

$$\varepsilon_{2m,n}^{3}(x,y)=\varepsilon_{2m,n}(x,y)-\sum_{k=1}^{3}g_{2m,n}^{k}(x,y), \quad (19)$$

где каждые слагаемые определяются по формулам (6), (10), (12), (18) и $\varepsilon_{2m,n}^{3}(x,y)$ удовлетворяет условиям:

$$\Delta_{x}^{m}\varepsilon_{2m,n}^{3}(x,y)=\delta(x-y),$$

$$\varepsilon_{2m,n}^{3}(x,y)\Big|_{|x|=\delta}=0,\quad \frac{\partial}{\partial\vec{n}_{x}}\varepsilon_{2m,n}^{3}(x,y)\Big|_{|x|=\delta}=0,\quad \frac{\partial^{2}}{\partial\vec{n}_{x}^{2}}\varepsilon_{2m,n}^{3}(x,y)\Big|_{|x|=\delta}=0.$$

Аналогичным образом получаем компенсирующую функцию для любого $k<m$ $(2m\geq n)$:

$$g_{2m,n}^{k}(x,y)=\frac{(2m-n)(2m-2-n)\ldots(2m-2k+4-n)c_{2m,n}}{c_{2m-2k+2,n}}\cdot g_{2m-2k+2,n}^{1}(x,y)\cdot(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2})^{k-1}(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^{2})^{k-1}\times$$

$$\times\frac{\delta^{2(k-1)}}{(-2)^{k-1}(k-1)!}=(2m-n)(2m-2-n)\ldots(2m-2k+4-n)c_{2m,n}\times$$

$$\times\left[\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x-\frac{y}{|y|^{2}}\delta^{2}\right|\right]^{2m-2k+2-n}\log|x-y|\cdot\left(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2}\right)^{k-1}(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^{2})^{k-1}\cdot\frac{\delta^{2(k-1)}}{(-2)^{k-1}(k-1)!}, \quad (20)$$

которая обладает следующими свойствами:

$$\Delta_{x}^{m}g_{2m,n}^{k}(x,y)=0,$$

$$g_{2m,n}^{k}(x,y)=g_{2m,n}^{k}(y,x),\quad \frac{\partial^{i}g_{2m,n}^{k}(x,y)}{\partial\vec{n}_{x}^{i}}\Bigg|_{|x|=\delta}=0,\qquad i=\overline{0,k-2},$$

$$\frac{\partial^{k-1}g_{2m,n}^{k}(x,y)}{\partial\vec{n}_{x}^{k-1}}\Bigg|_{|x|=\delta}=\frac{\partial^{k-1}\varepsilon_{2m,n}^{k-1}(x,y)}{\partial\vec{n}_{x}^{k-1}}\Bigg|_{|x|=\delta}.$$

k-е приближение функции Грина имеет следующий вид:

$$\varepsilon_{2m,n}^{k}(x,y)=\varepsilon_{2m,n}(x,y)-\sum_{j=1}^{k}g_{2m,n}^{j}(x,y), \quad (21)$$

которое удовлетворяет следующим условиям:

$$\Delta_x^m \varepsilon_{2m,n}^k(x,y) = \delta(x-y)\,,\ \frac{\partial^i}{\partial n_x^i}\varepsilon_{2m,n}^k(x,y)\Big|_{|x|=\delta} = 0\,, \quad i=\overline{0,k-1}\,.$$

Таким образом, после m-го шага получим m приближение функции Грина задачи Дирихле (1), (2) $(2m \ge n)$, которое будет совпадать с искомой функцией $G_{2m,n}(x,y)$:

$$G_{2m,n}(x,y) = \varepsilon_{2m,n}(x,y) - g_{2m,n}^1(x,y) - \sum_{k=2}^{m} g_{2m,n}^k(x,y) =$$

$$= c_{2m,n}|x-y|^{2m-n}\log|x-y| - c_{2m,n}\left|\frac{y}{\delta}\right|^{2m-n}\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|^{2m-n}\log|x-y| -$$

$$-\sum_{k=2}^{m}(2m-n)(2m-2-n)\ldots(2m-2k+4-n)c_{2m,n}\times$$

$$\times\left[\left|\frac{y}{\delta}\right|\left|x-\frac{y}{|y|^2}\delta^2\right|\right]^{2m-2k+2-n}\log|x-y|\cdot(1-\left|\frac{y}{\delta}\right|^2)^{k-1}(1-\left|\frac{x}{\delta}\right|^2)^{k-1}\cdot\frac{\delta^{2(k-1)}}{(-2)^{k-1}(k-1)!}\,. \quad (22)$$

3. Замечания. Методика настоящей работы позволяет строить функцию Грина для полигармонических уравнений не только для шара, но для полуплоскости и других канонических областях [3]. Отметим, что отдельные результаты работы могут быть обобщены на эллиптические уравнения с постоянными коэффициентами. Явное представление функции Грина задачи Неймана для неоднородного полигармонического уравнения в комплексной плоскости имеется в работе [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Берс Л., Джон Ф., Шехтер М.* Уравнения с частыми производными. М.: Мир, 1966.

2. *Бицадзе А.В.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1985.

3. *Соболев С.Л.* Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.

4. *Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д., Искакова У.А.* Структура спектра краевых задач для дифференциальных уравнений. Алматы: Препринт, 2005. 54 с.

5. *Begehr H., Vanegas C.J.* Iterated Neumann problem for the higher order Poisson equation // Math. Nachr. 279 (2006). P. 38-57.

6. *Koshanov B.D.* Structure of the spectrum of regular boundary problems for differential equations // Abstracts of the third international conference "Inverse Problems: Modeling and Simulation", Fethiye, Turkey, May29 – June 03. P. 113-115.

7. *Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D.* Representation Green function of the Dirichlet problems for the bi-harmonic equation // International Congress of Mathematicians, August 22-30, 2006, Madrid.

8. *Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д.* О представлении функции Грина задачи Дирихле для полигармонического уравнения // ДАН НАН РК. 2006. Т. 5. С. 9-12.

Центр физико-математических исследований МОН РК, г.Алматы

Поступила 3.05.07г.