

М. О. САТКАЛИЕВА

## ЗАДАЧА КИНЕМАТИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ПРОСТРАНСТВЕННОГО НАПРАВЛЯЮЩЕГО МЕХАНИЗМА V КЛАССА В ВИДЕ СИСТЕМЫ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

При исследовании и проектировании пространственных шарнирно-рычажных механизмов высоких классов широко используется многочлены. Рассмотрим задачу синтеза пространственного направляющего механизма V класса общего вида в соответствии с рисунком по четырем заданным положениям входного звена 1 и выходной точки  $T$  звена 3

$$\begin{aligned} \varphi_{1i} &= \varphi_1(t_i) \text{ и} \\ X_{Ti} &= X_T(t_i), \quad Y_{Ti} = Y_T(t_i), \quad Z_{Ti} = Z_T(t_i), \\ i &= \overline{1,4}. \end{aligned} \quad (1)$$

Для решения задачи синтеза кинематической цепи  $ABCD$  механизма по заданным положениям выходной точки звена 3 ( $BC$ ), в котором приближающая окружность точки  $C$  радиусом  $l_{CD} = l_{4\phi}$  с центром в точке  $D$  звена 4 ( $CD$ ) определяется как линия пересечения сферы с координатами  $X_{D1}, Y_{D1}, Z_{D1}$  и плоскости, удобно использовать выражения взвешенных разностей [1]:

$$\Delta q = l_4^2 - l_{4\phi}^2, \quad (2)$$

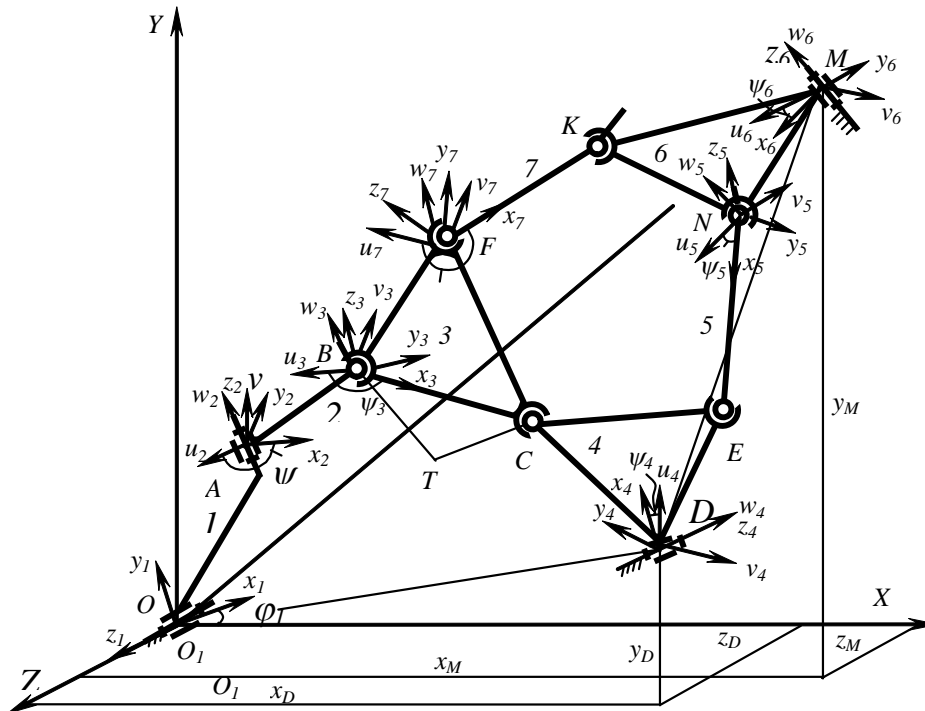
$$\Delta q_i = ax_{3Ci} + by_{3Ci} + cz_{3Ci} - 1 = 0, \quad (3)$$

где  $l_{4\phi}$  – расстояние между точками  $C$  звена 3 и  $D_1$

$$l_{4\phi}^2 = (X_{D1} - X_{Ci})^2 + (Y_{D1} - Y_{Ci})^2 + (Z_{D1} - Z_{Ci})^2, \quad (4)$$

$a, b, c$  – коэффициенты уравнения приближающей плоскости;  $X_{D1}, Y_{D1}, Z_{D1}, X_{Ci}, Y_{Ci}, Z_{Ci}$  – соответствующие координаты точек  $D_1$  (центра сферы) и  $C$  в абсолютной системе координат  $OXYZ$  [2]. По условию синтеза координаты точки  $C$  звена 3, которому принадлежат локальные координаты выходной точки  $T$ , в абсолютной системе координат  $OXYZ$  определяются с использованием обобщенного метода символических обозначений преобразования координат в виде:

$$\begin{aligned} X_C &= x_{3C} \cos(\varphi_1 + (\psi_2 + \psi_3)) + \\ &+ z_{3C} \sin(\varphi_1 + (\psi_2 + \psi_3)) + X'_C, \\ Y_C &= x_{3C} \sin(\varphi_1 + (\psi_2 + \psi_3)) - \\ &- z_{3C} \cos(\varphi_1 + (\psi_2 + \psi_3)) + Y'_C, \\ Z_C &= y_{3C} \cos \beta_3 + Z'_C, \end{aligned} \quad (5)$$



где

$$\begin{aligned} X'_C &= a_{2,1} \cos \varphi_1 + a_{3,2} \cos(\varphi_1 + \psi_2), \\ Y'_C &= a_{2,1} \sin \varphi_1 + a_{3,2} \sin(\varphi_1 + \psi_2), \\ Z'_C &= c_{21} + b_{21} + b_{32} \cos \alpha_{21}. \end{aligned}$$

Для решения задачи синтеза представим выражения (2), (3) в виде системы алгебраических уравнений (САУ)

$$\left\{ \begin{aligned} l_1 x_1 + l_2 x_2 + l_4 x_4 + l_5 x_5 + l_7 x_7 &= a, \\ l_1 x_8 + l_2 x_9 + l_4 x_{11} + l_5 x_{12} + l_7 x_{14} &= b, \\ l_1 x_1 + l_2 (x_2 c_2 - x_9 c_9) + l_3 x_3 + \\ + l_5 (x_5 c_5 + x_{12} c_{12}) + l_7 (x_7 c_7 + x_{14} c_{14}) &= a, \\ l_1 x_8 + l_2 (x_9 c_2 + x_2 c_9) + l_3 x_8 + \\ + l_5 (x_{12} c_5 + x_5 c_{12}) + l_7 (x_{14} c_7 - x_7 c_{14}) &= b, \\ x_1^2 + x_8^2 = 1, \quad x_2^2 + x_9^2 = 1, \\ x_3^2 + x_{10}^2 = 1, \quad x_4^2 + x_{11}^2 = 1, \\ x_5^2 + x_{12}^2 = 1, \quad x_6^2 + x_{13}^2 = 1, \\ x_7^2 + x_{14}^2 = 1. \end{aligned} \right. \quad (6)$$

В качестве свободной неизвестной выступает  $x_1$ , а все остальные неизвестные  $x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}, x_{12}, x_{13}, x_{14}$  – в качестве главных неизвестных. Определение главных неизвестных по свободной неизвестной соответствует задаче кинематического синтеза механизма V класса по заданным условиям синтеза (1). Отметим, что синтез геометрических параметров пространственного направляющего механизма V класса определяется через решения (6)

$$\left\{ \begin{aligned} x_{15} x_1 + x_{16} x_2 + x_{17} x_3 + x_{18} x_4 + x_{19} x_5 + x_{20} x_7 &= a, \\ x_{15} x_8 + x_{16} x_9 + x_{17} x_{10} + x_{18} x_{11} + x_{19} x_{12} + x_{20} x_{14} &= b, \\ x_{21} x_1 + x_{22} (x_2 x_{23} + x_9 x_{24}) + x_{25} (x_3 x_{26} - x_{10} x_{27}) + \\ + x_{28} (x_5 x_{29} - x_{12} x_{30}) + x_{31} x_6 + x_{32} (x_7 x_{33} + x_{14} x_{34}) &= a, \\ x_{21} x_8 + x_{22} (x_9 x_{23} + x_2 x_{24}) + x_{25} (x_{10} x_{26} - x_3 x_{27}) + \\ + x_{28} (x_{12} x_{29} - x_5 x_{30}) + x_{31} x_{13} + x_{32} (x_{14} x_{33} + x_7 x_{34}) &= b, \\ x_1^2 + x_8^2 = 1, \quad x_2^2 + x_9^2 = 1, \\ x_3^2 + x_{10}^2 = 1, \quad x_4^2 + x_{11}^2 = 1, \\ x_5^2 + x_{12}^2 = 1, \quad x_6^2 + x_{13}^2 = 1, \\ x_7^2 + x_{14}^2 = 1, \quad x_{23}^2 + x_{24}^2 = 1, \\ x_{26}^2 + x_{27}^2 = 1, \quad x_{30}^2 + x_{31}^2 = 1, \\ x_{33}^2 + x_{34}^2 = 1. \end{aligned} \right. \quad (7)$$

Система алгебраических уравнений (7) получена из САУ (6), если положить в качестве неизвестных  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{34}$  геометрические параметры механизма V класса. К системе (7) следует добавить еще одно условие с учетом условия синтеза параметров механизма

$$P_n(x_1, x_2, \dots, x_{34}) = 0. \quad (8)$$

Отметим, что  $P_n(x_1, \dots, x_n)$  обычно является многочленом. Таким образом, система (7), (8) представляет собой также САУ.

Основная задача: следует выяснить, совместна ли система (6) или САУ (7), (8) в случае проектирования пространственного направляющего механизма V класса.

Отметим, что подобные задачи о совместности САУ возникают также при синтезе пространственных шарнирно-рычажных механизмов высоких классов [2]. Таким образом, в теории механизмов высоких классов актуальной является проблема выяснения совместности САУ, в которой заданы свободные и главные неизвестные.

Рассмотрим совместна ли следующая САУ:

$$\left\{ \begin{aligned} P_1(x_1, \dots, x_n) &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ P_m(x_1, \dots, x_n) &= 0, \end{aligned} \right. \quad (9)$$

где  $P_i(x_1, \dots, x_n)$ ,  $i = \overline{1, m}$  – многочлены от  $n$  переменных.

С системой (9) свяжем идеал  $I$ , порождаемый многочленами, отвечающими уравнениям системы

$$I = (P_1(x_1, \dots, x_n), P_2(x_1, \dots, x_n), \dots, P_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Из теоремы Гильберта о нулях [3] следует, что для системы (9) многочлен  $F(x_1, \dots, x_n)$  обращается в нуль на решениях данной системы тогда и только тогда, когда найдутся многочлены  $r_1(x_1, \dots, x_n), \dots, r_m(x_1, \dots, x_n)$  и натуральное  $S$ , для которого  $F^S = r_1 P_1 + r_2 P_2 + \dots + r_m P_m$ , т.е. добавление уравнений вида  $F = 0$ , полученных указанным способом, не изменяет множества решений данной САУ. Вторым фактом [3], который нам необходим для дальнейших целей: система (9) несовместна тогда и только тогда, когда  $1$  принадлежит идеалу  $I$ , порожденному системой (9) и всеми уравнениями вида  $F = 0$ , где  $F^S = r_1 P_1 + r_2 P_2 + \dots + r_m P_m$ .

Таким образом, надо выяснить: можно ли **1** представить в виде  $1 = r_1 P_1 + r_2 P_2 + \dots + r_m P_m$ ?

Это лучше всего сделать с помощью базиса Гребнера [3]. В каждом идеале существует базис Гребнера и его можно построить согласно алгоритму Бухбергера:

*1 шаг.* Рассмотрим старшие члены многочленов  $P_1, P_2, \dots, P_m$  из САУ (9). Обозначим их через  $P_{1c}, P_{2c}, \dots, P_{mc}$ .

*2 шаг.* Найдем два многочлена  $P_i$  и  $P_j$ , которые имеют зацепления, т.е. у которых старшие члены имеют общие делители  $P_{ic} = wq_1$  и  $P_{jc} = wq_2$ , где  $w$  – их общий делитель в виде одночлена.

*3 шаг.* Составим новый многочлен  $S(P_i, P_j) = P_i q_2 - P_j q_1$ .

*4 шаг.* Редуцируем многочлен  $S(P_i, P_j)$  с помощью имеющегося базиса  $P_1, P_2, \dots, P_m$ . Если результат редуцирования не является нулем, то его добавляем к имеющемуся базису, т.е. к системе (9) добавляем еще одно уравнение.

*5 шаг.* Продолжаем процесс с 1 шага до тех пор, пока не исчерпаем все зацепления расширенной системы (9). Таким образом, за конечное число шагов строится базис Гребнера. Затем его минимизировать и редуцировать. Известно [3, 4], что минимальный редуцированный базис Гребнера идеала определен однозначно. Если построенный минимальный редуцированный базис Гребнера идеала содержит ненулевую константу, то система (9) несовместна. Также по построенному базису Гребнера можно вычислить количество решений САУ (9). В качестве примера рассмотрим применение базисов Гребнера для синтеза параметров пространственного направляющего механизма V класса.

В работе [2] решение задачи интерполяционного кинематического синтеза параметров пространственного рычажного механизма высокого класса общего вида по четырем заданным входного **1** и выходного **4** звеньев получено в виде САУ

$$a_i x_1 + b_i x_2 + c_i x_3 + d_i x_4 + e_i x_1 x_3 + f_i x_2 x_3 - g_i = 0, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (10)$$

где  $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i, g_i$  – некоторые числовые характеристики;  $x_1, x_2, x_3, x_4$  – неизвестные геометрические параметры механизма.

Выберем упорядочение  $x_4 > x_3 > x_2 > x_1$ . Занумеруем уравнения (10) через  $P_1, P_2, P_3, P_4$ . Зацепление  $P_1$  и  $P_2$  имеет вид

$$P_1 d_2 - P_2 d_1 = (a_1 d_2 - a_2 d_1) x_1 + (b_1 d_2 - b_2 d_1) x_2 + (c_1 d_2 - c_2 d_1) x_3 + (e_1 d_2 - e_2 d_1) x_1 x_3 + (f_1 d_2 - f_2 d_1) x_2 x_3 + (g_1 d_2 - g_2 d_1) = P_5. \quad (11)$$

Аналогично запишем зацепление  $(P_1$  и  $P_3)$ ,  $(P_1$  и  $P_4)$ .

$$P_1 d_3 - P_3 d_1 = P_6, \quad P_1 d_4 - P_4 d_1 = P_7. \quad (12)$$

Далее устраняем зацепление  $(P_5$  и  $P_6)$ ,  $(P_5$  и  $P_7)$ . В результате имеем  $P_8$  и  $P_9$ , в котором отсутствуют неизвестные  $x_4, x_5$ . После этого из зацепления  $P_8$  и  $P_9$  исключается  $x_2$ . В результате кубический многочлен  $P_{10}$  зависит только от  $x_1$ . Все указанные зацепления устранены. Таким образом, система (10) имеет конечное число решений, так как справедлива теорема [3]: число решений системы алгебраических уравнений конечно тогда и только тогда, когда базис Гребнера идеала  $I$  содержит элементы  $P_1, \dots, P_{10}$ , старшие члены которых являются степенями переменных  $x_1, \dots, x_n$  соответственно. В данном случае старшие члены базиса Гребнера имеют  $d_1 x_4, a x_3^2, b x_2^3, c x_1^4$ , поэтому выполняются условия указанной теоремы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Артоболевский И.И., Левитский Н.И., Черкудинов С.А. Синтез плоских механизмов. М.: ГИФЛ, 1959. 1084 с.
2. Канлыбаев О. Интерполяционный синтез пространственного рычажного механизма IV класса по четырем положениям // Вестник МОН НАН РК. Алматы, 2003. Вып. № 2. С. 28-36.
3. Аржанцев И.В. Базисы Гребнера и системы алгебраических уравнений. МЦНМО, 2003. 68 с.
4. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. М.: Наука, 1986. 544 с.

#### Резюме

В класты кеңістікті бағыттаушы механизмнің кинематикалық синтез есебіне көп мүшелі алгебралық тендеулерді пайдалану арқылы, Гребнер базисын қолданылуы көрсетілген.

#### Summary

The synthesis of a spatial guide link mechanism of V class upon preset positions of output point of connecting rod

Институт механики и машиноведения  
им. У. А. Джолдасбекова  
МОН РК

Поступила 20.01.07г.