УДК 62-251: 531.768.5

*Ж. ИСКАКОВ*

# УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ ДВУХОПОРНОГО КОНСОЛЬНОГО РОТОРА С ПЕРЕКОСОМ И ДИСБАЛАНСОМ ДИСКА

*(Представлена академиком НАН РК Г. У. Уалиевым)*

**Введение.** Рассматриваются установившиеся колебания двухопорного консольного ротора с неуравновешенностью массы, перекосом диска и с демпфирующим стержнем, прилагаемым к валу возле верхней опоры. Геометрическая схема (рис. 1) типична для многих высокоскоростных турбомашин: паровых и газовых турбин, турбогенераторов, турбонасосных агрегатов, длинных цилиндрических веретен ткацких станков и других роторных машин; поэтому неудивительно, что она изучается уже давно. Построены [1] дифференциальные уравнения вынужденных колебаний двух опорного консольного ротора с дисбалансом массы и перекосом диска, аналитически найдены выражения амплитуды и фазы колебаний, путем решения характеристического уравнения исследованы влияния на устойчивость движения внутреннего и внешнего трений. В работе [2] подробно изучалось совместное влияние двух дисбалансов связанных с перекосом диска и с эксцентриситетом массы на амплитуды и фазы колебаний; причем внешнее демпфирование введено в уравнения движения только для прогиба. Методика исследования действия двух обобщенных дисбалансов работы [2] использовалась в статье [3] для изучения тангажных колебаний вертикального гироскопического ротора с неуравновешенностью массы и перекосом диска. В настоящей работе для полного описания динамики двух опорного консольного ротора с двумя обобщенным дисбалансом внешнее демпфирование учитывалось во всех четырех уравнениях движения, благодаря чему имели возможность правильно построить амплитудно- и фазово-частотные характеристики ротора, исследовать влияния на них дисбаланса массы и перекоса диска, консольности вала и внешнего демпфирования, сопоставить амплитуды колебаний на критических скоростях.

**Постановка задачи.** На рис. 1 показана геометрия ротора. На конце консольной части вала длиной a с изгибной жесткостью EI закреплен диск, имеющий массу m, полярный момент инерции $I_p$ и экваториальный момент инерции $I_T$. Ротор вращается с угловой скоростью ω, центр его масс смещен на небольшое расстояние e относительно точки S крепления диска к валу, а сам диск наклонен на небольшой угол τ относительно плоскости, перпендикулярной оси вала. Линия максимального перекоса диска опережает вектор эксцентриситета массы на угол β. Расстояние между опорами l, в опоре возле консольного выступа, возникает внешнее сопротивление. Вал с подобным добавочным сопротивлением можно изобразить присутствием добавочного стержня, фиктивный коэффициент жесткости которого воспроизводит вязкое сопротивление $\chi$ опоры повороту [1]. Используются две декартовые системы координат. Система Oxyz неподвижна в пространстве, причем оси x, y фиксируют положение точки S, а ось вращения z проходит через ось недеформированного вала. Углы отклонения вала в плоскостях x, z и y, z обозначим соответственно через $\theta_x$ и $\theta_y$. Все перемещения в направлениях x и y полагаются малыми, а в направлении z пренебрегаем. Вторая система координат SXYZ связана с диском, причем Z есть полярная ось, а ось X проведена через вектор эксцентриситета массы.

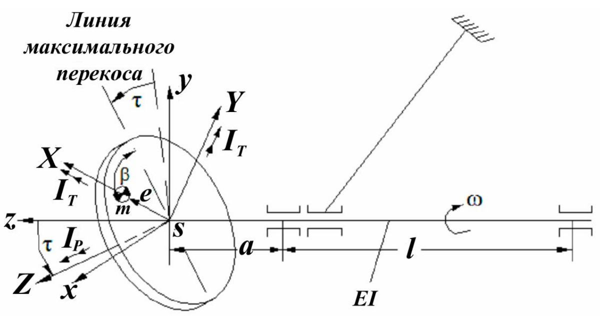



**Рис. 1.** Геометрия ротора

Уравнения движения ротора выводятся при помощи метода Лагранжа. Введя безразмерные величины в соответствии с формулами

$$\begin{aligned} &\varepsilon = e/a, \\ &U = (x+iy)/a, \\ &\bar{t} = t(2EI/ma^3)^{1/2}, \\ &\Omega = \omega(ma^3/2EI)^{1/2}, \\ &\overline{I_p} = I_p/ma^2, \\ &\overline{I_T} = I_T/ma^2, \\ &\bar{\chi} = \chi(2EI/ma^3)^{1/2}, \end{aligned} \tag{1}$$

уравнения движения можно записать в безразмерном виде (переменные $\theta = \theta_x + i\theta_y$ и τ уже являются безразмерными):

$$U'' + \bar{\chi}(6c_1U' - 3c_2\theta') + 6c_1U - 3c_2\theta = \\ = \varepsilon\Omega^2 e^{i\Omega\bar{t}}, \tag{2}$$

$$\bar{I}_T\theta'' - i\Omega\bar{I}_p\theta' + \bar{\chi}(-3c_2U' + 2c_3\theta') - 3c_2U + \\ + 2c_3\theta = (\bar{I}_p - \bar{I}_T)\tau\Omega^2 e^{i(\Omega\bar{t}+\beta)}. \tag{3}$$

Здесь введены обозначения: $c_1 = \dfrac{1+3a/l}{4+3a/l}$, $c_2 = \dfrac{2+3a/l}{4+3a/l}$, $c_3 = \dfrac{3+3a/l}{4+3a/l}$ - безразмерные постоянные, где a/l - относительный размер консольной части вала или “степень консольности”. Штрихами обозначаются производные по безразмерному времени $\bar{t}$.

**Установившиеся колебания.** При установившейся круговой синхронной прецессии движение ротора происходит по закону

$$U = |A|e^{(i\Omega\bar{t}-\gamma)}, \quad \theta = |B|e^{i(\Omega\bar{t}-\delta)}, \tag{4}$$

где $|A|$ - амплитуда поперечного перемещения диска; γ - угол отставания по фазе этого перемещения от вектора эксцентриситета массы; $|B|$ и δ - аналогичные характеристики угла поворота (тангажа) диска.

Подставив (4) в (2) и (3) и введя действительные параметры:

$$H = \bar{I}_P - \bar{I}_T,$$

$$a_1 = (H\Omega^4 + 2c_3\Omega^2)\varepsilon - (3\bar{\chi}c_2H\Omega^3\sin\beta)\tau + \\ + (3c_2H\Omega^2\cos\beta)\tau,$$

$$a_2 = (2\bar{\chi}c_3\Omega^3)\varepsilon + (3\bar{\chi}c_2H\Omega^3 cos\beta)\tau +$$
$$+ (3c_2H\Omega^2 \sin\beta)\tau,$$
$$b_1 = (3c_2\Omega^2)\varepsilon + (-\Omega^2 + 6c_1)(H\Omega^2 \cos\beta)\tau -$$
$$- (6\bar{\chi}c_1H\Omega^3 \sin\beta)\tau,$$
$$b_2 = (3\bar{\chi}c_2\Omega^3)\varepsilon + (-\Omega^2 + 6c_1)(H\Omega^2 \sin\beta)\tau +$$
$$+ (6\bar{\chi}c_1H\Omega^3 \cos\beta)\tau, \qquad (5)$$
$$\Delta_1 = -H\Omega^4 + (6c_1H - 2c_3)\Omega^2 + 12c_1c_3 - 9c_2^2,$$
$$\Delta_2 = \bar{\chi}(6c_1H - 2c_3)\Omega^3 + 2\bar{\chi}(12c_1c_3 - 9c_2^2)\Omega,$$

получим

$$|A| = \left[\frac{a_1^2 + a_2^2}{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}\right]^{1/2},$$
$$\gamma = arctg\left[\frac{a_1\Delta_2 - a_2\Delta_1}{a_1\Delta_1 + a_2\Delta_2}\right], \qquad (6)$$
$$|B| = \left[\frac{b_1^2 + b_2^2}{\Delta_1^2 + \Delta_2^2}\right]^{1/2},$$
$$\delta = arctg\left[\frac{b_1\Delta_2 - b_2\Delta_1}{b_1\Delta_1 + b_2\Delta_2}\right]. \qquad (7)$$

Собственные частоты недемпфированной системы получаем из уравнения

$$\Delta_1 = -H\Omega^4 + (6c_1H - 2c_3)\Omega^2 + 12c_1c_3 - 9c_2^2 = 0, \qquad (8)$$

разрешив его, найдем критическую скорость для тонкого диска при $H > 0$

$$\Omega_{k1} = \left\{\left(3c_1 - \frac{c_3}{H}\right) + \left[\left(3c_1 - \frac{c_3}{H}\right)^2 + \left(\frac{12c_1c_3 - 9c_2^2}{H}\right)\right]^{1/2}\right\}^{1/2} \qquad (9)$$

и критические скорости для толстого диска при (H<0)

$$\Omega_{k1,k2} = \left\{\left(3c_1 - \frac{c_3}{H}\right) \mp \left[\left(3c_1 - \frac{c_3}{H}\right)^2 + \left(\frac{12c_1c_3 - 9c_2^2}{H}\right)\right]^{1/2}\right\}^{1/2}. \qquad (10)$$

При равенстве $c_1 = c_2 = c_3 = 1$ формулы (9) и (10) принимают форму выражений критических скоростей одноопорного консольного ротора [2]. В качестве примера рассмотрим тонкий диск.

Графики зависимости $\Omega_{k1}$ от H имеет вид, представленный в работе [2] и показывает возрастание критической скорости по мере роста значений H. График приведенный на рис. 2 также показывает увеличение критической скорости с ростом длины консольного участка вала ротора.

При численных расчетах для некоторых типичных вариантов геометрии ротора использованы следующие безразмерные параметры: эксцентриситет массы и угол перекоса диска приняты равными ε=0,01 и τ=0,02, коэффициент внешнего демпфирования и степень консольности заданы равными $\bar{\chi}$ =0,01 и a/l=0,5. На рис. 3 и 4 приведены графики амплитуды и фазы поперечного перемещения и угла поворота тонкого диска с H=+0,2.

Анализ графиков на рис. 3 и 4 показывает, что влияние перекоса может приводить либо к увеличению, либо к уменьшению амплитуды колебаний линейных и угловых перемещений. При β=0$^0$ линия максимального перекоса и линия вектора эксцентриситета массы совпадают, и активный гироскопический момент приводит к усилению эффекта изгиба ротора под действием поперечной центробежной силы. Амплитуды колебаний в этом случае будут наибольшими. При β=180$^0$ гироскопический момент изгибает ротор в направлении противоположной центробежной силе; амплитуды колебаний оказываются наименьшими. При β=±90$^0$ возмущающие воздействия перпендикулярны друг другу, и получаем промежуточные значения амплитуд линейных и угловых перемещений. В области больших значений Ω кривые амплитуд колебаний начатые с

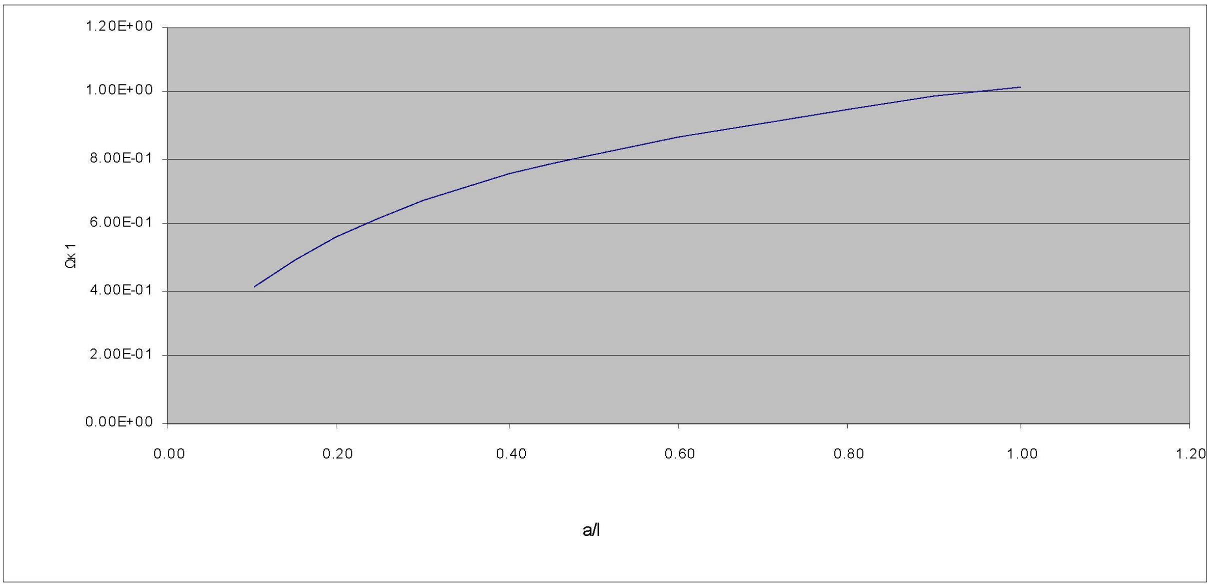
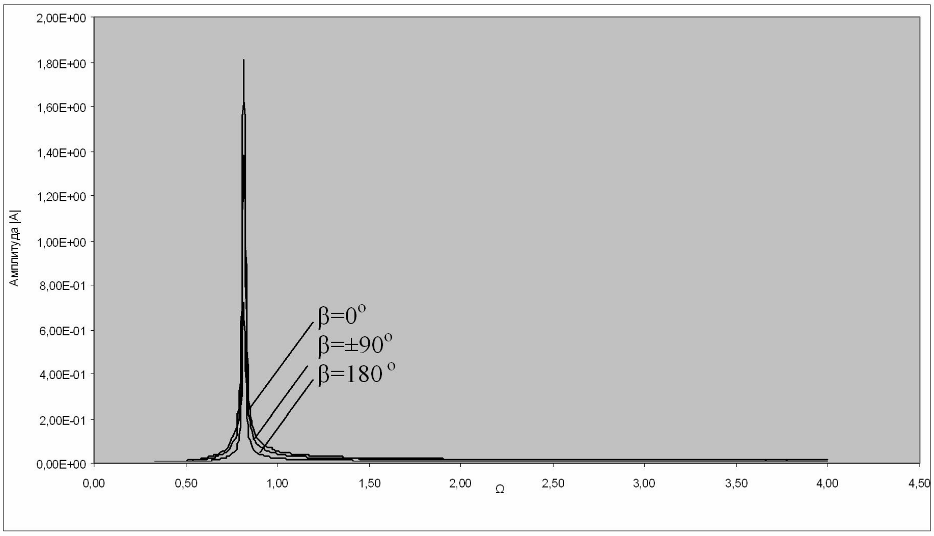



**Рис. 2.** Тонкий диск : H=+0.2. Зависимость критической скорости от степени консольности



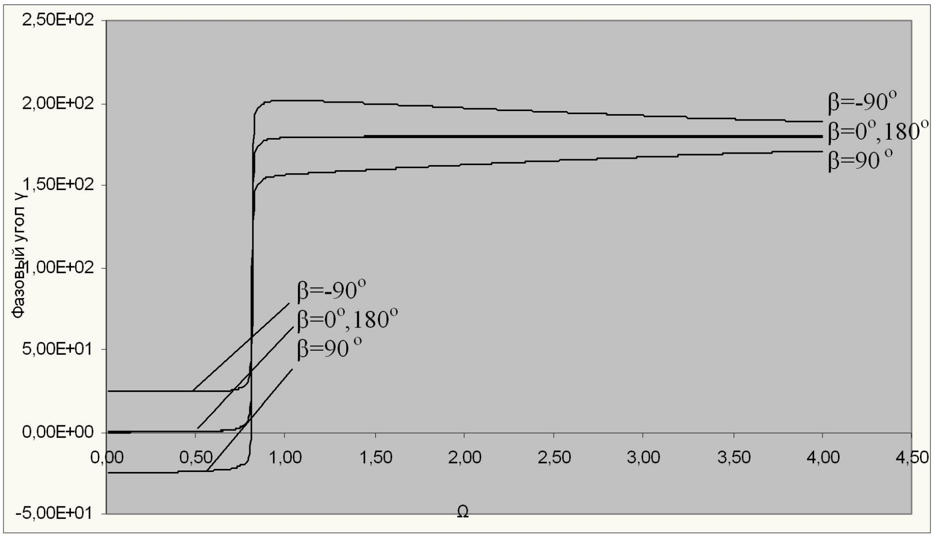




**Рис. 3.** Тонкий диск: H = +0.2; a/l = 0.5; $\varepsilon = 0.01$; $\tau = 0.02$; $\chi = 0.01$. Амплитуды и фазы линейного перемещения

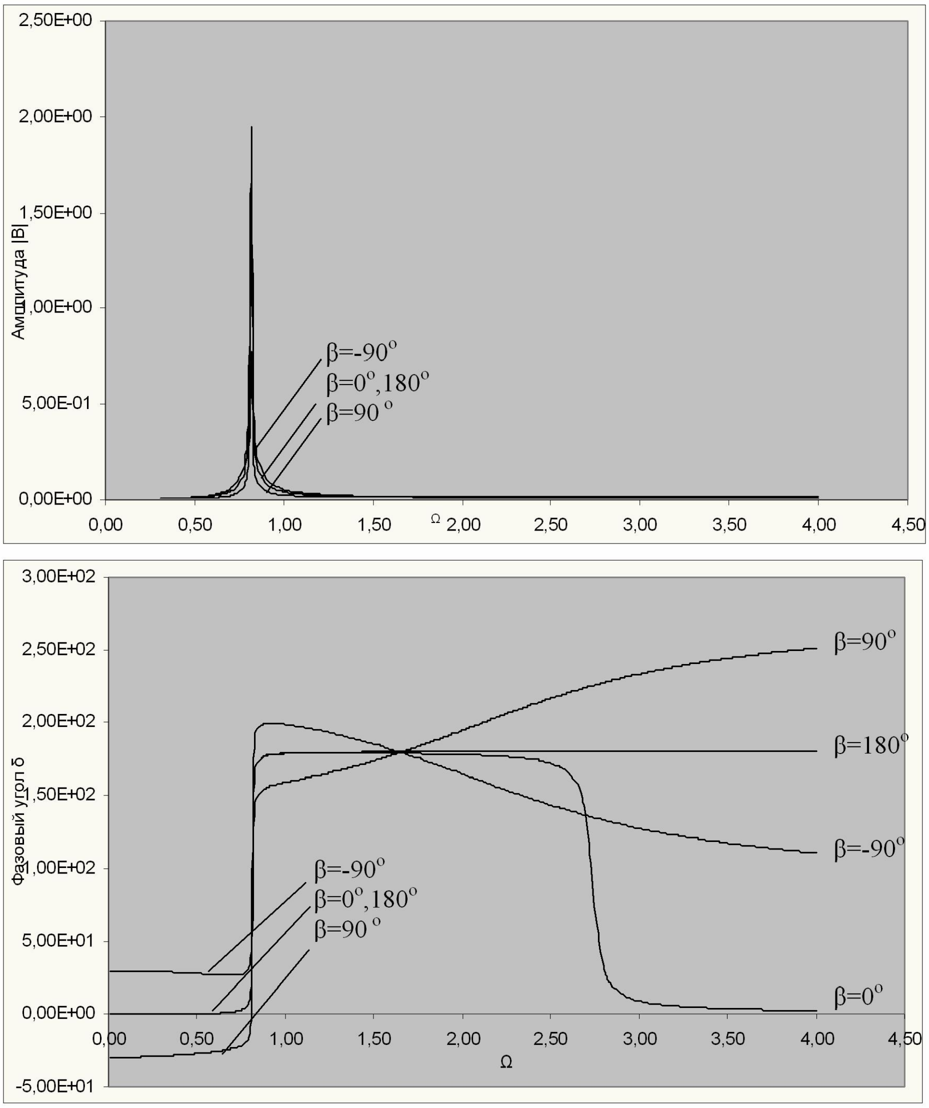



**Рис. 4.** Тонкий диск: H = +0.2; a/l = 0.5; $\varepsilon$ = 0.01; $\tau$ = 0.02; $\chi$ = 0.01. Амплитуды и фазы углового перемещения

нулевого значения выходят на асимптотические уровни.

Более важные эффекты наблюдаются на кривых углов фазового сдвига $\gamma$ и $\delta$. При малых частотах вращения прецессирующий ротор необязательно находится в одной фазе с линией эксцентриситета массы. При условии взаимной ортогональности двух дисбалансов, связанных с неуравновешенностью массы и с перекосом, т.е. при $\beta=\pm 90^0$, получим остаточные фазовые углы. Для условий совпадения линий двух дисбалансов, т.е. при $\beta=0^0$ и $\beta=180^0$ никакого остаточного фазового сдвига обнаружено не было. На высоких частотах вращения все кривые фазы поперечного перемещения тонкого диска асимптотически стремятся к обычному предельному значению, равному $180^0$, а для угла поворота асимптотами угла фазового сдвига оказываются такими, что $\delta \to -\beta$. Полученные результаты оказываются чрезвычайно важными для практики. Например, при балансировке ротора для выявления линии эксцентриситета массы часто используют результаты измерений угла фазового сдвига $\gamma$ на малых частотах вращения. Проектировщики должны сопоставлять результаты измерений фаз на низких и высоких скоростях вращения, для того чтобы по степени отличия разности фаз от значения $180^0$ судить о степени влияния перекоса диска.

Из графиков зависимостей амплитуды поперечного перемещения ротора от степени консольности и внешнего демпфирования (рис. 5, 6) видно уменьшение амплитуды колебаний с ростом длины консольного участка вала и коэффициента

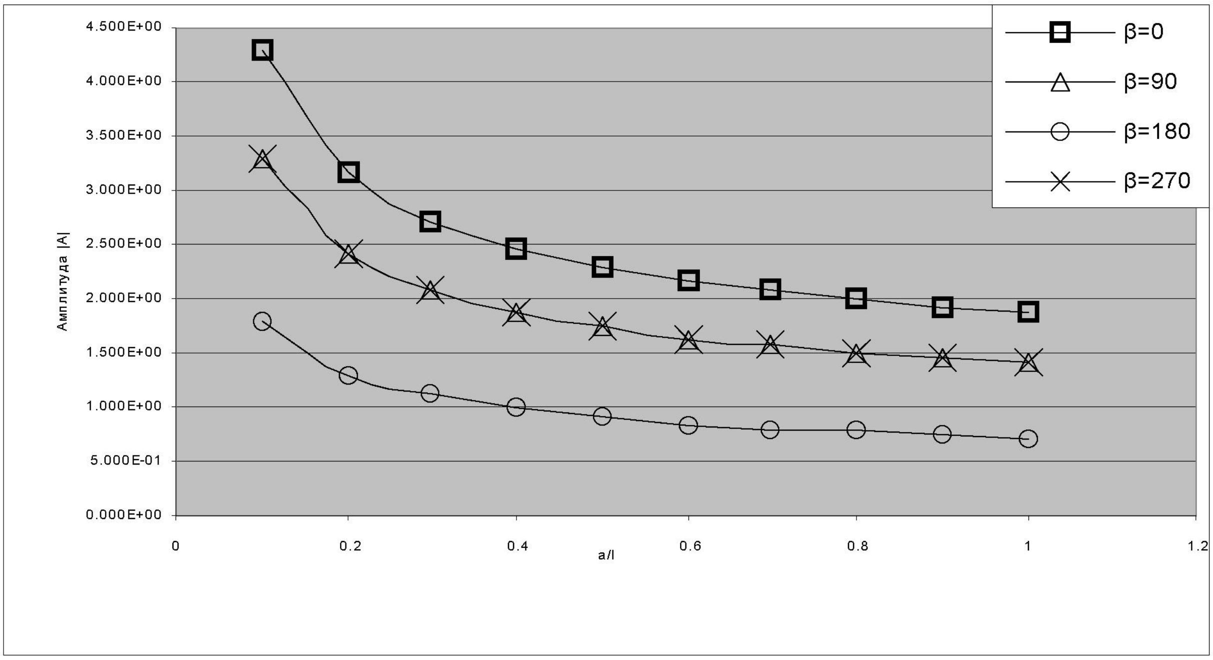



**Рис. 5.** Тонкий диск: H = +0.2; ε = 0.01; τ = 0.02; χ = 0.01. Зависимости амплитуды линейного перемещения около критической скорости от степени консольности

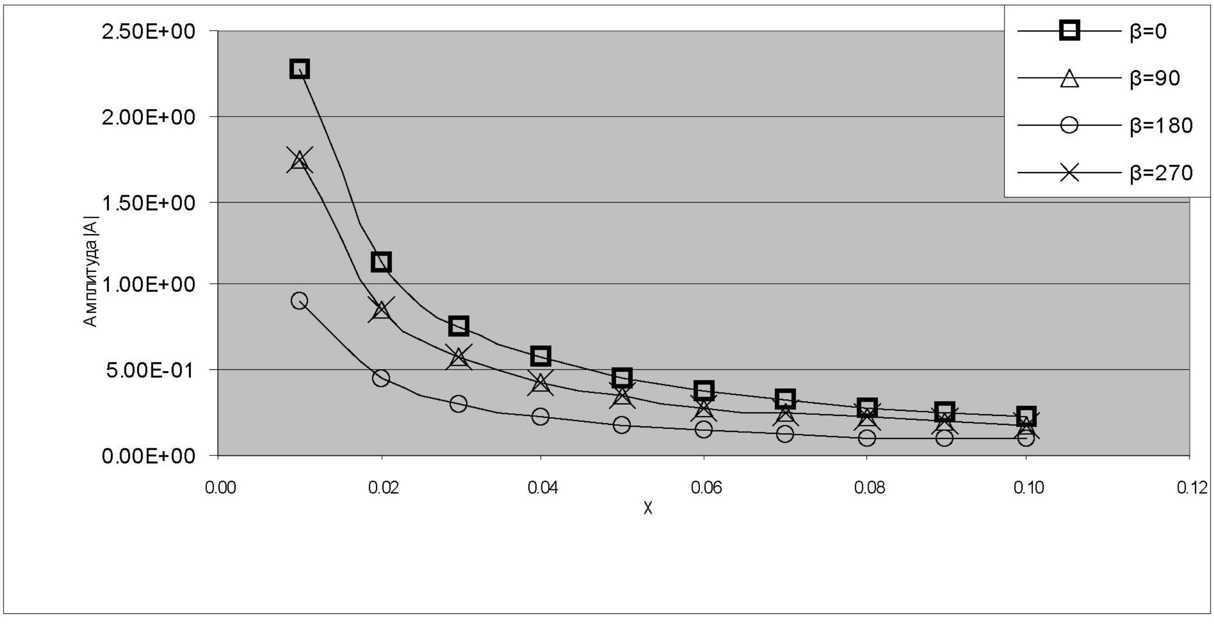



**Рис. 6.** Тонкий диск: H = +0.2; ε = 0.01; τ = 0.02; a/l = 0.5. Зависимости амплитуды прогиба около критической скорости от коэффициента внешнего демпфирования

демпфирования. Амплитуда угла поворота также имеет сходные зависимости около критической скорости.

**Заключение.** Исследованы установившиеся колебания двух опорного консольного ротора с дисбалансом массы и перекосом диска. Составлены дифференциальные уравнения движения с учетом внешнего демпфирования, которые позволили правильно описать амплитудно- и фазово-частотные характеристики ротора, оценить влияние на них совместных обобщенных дисбалансов, относительного размера консольного участка вала и коэффициента внешнего демпфирования. Определены критические скорости для роторов с тонким и толстым дисками и амплитуды на них, которые затем сравниваются. Данная модель ротора является более обобщенной по сравнению с ранее рассмотренными и ее легко распространить на другие виды роторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Диментберг Ф.М.* Изгибные колебания вращающихся валов. М.: Изд. АН СССР, 1959. 248 с.

2. *Бенсон.* Установившиеся колебания консольного ротора с перекосом и дисбалансом диска // Конструирование и технология машиностроения. 1983. Т . 105, №4. С. 35-40.

3. *Искаков Ж, Тулешов А.* Тангажные колебания вертикального гироскопического ротора с перекосом и дисбалансом диска // Состояние и перспективы развития механики и машиностроения в Казахстане. Материалы Международной научной конференции. Алматы, 2007. С. 141-147.

**Резюме**

Массасының дисбалансы дискісінің білікке қатысты еңкіштігі бар қос тіректі консолдық ротордың орнықты тербелісі зерттелген.

**Summary**

Heче are the researches of the vibration of the double-based rotor with mass disbalance and wrong disk.

*Кызылординский государственный университет им. Коркыт Ата, г. Кызылорда*

*Поступила 2.03.08г.*