Б. РЫСБАЙУЛЫ, Г. МАХАНБЕТОВА

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ДЛЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ КОНДУКТИВНОГО РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТЕПЛА В ОДНОРОДНОЙ СРЕДЕ

(Представлена академиком НАН РК М. О. Отельбаевым)

Рассматривается обратная задача кондуктивного распространение тепла в грунте. Предлагается разностный итерационный метод для определение коэффициента теплопроводности и доказывается его сходимость.

Экспериментальное изучение и определение коэффициентов теплопроводности, влагопроводности, термоградиентного коэффициента и т.д. в промерзающих почвах и тонкодисперсных горных породах – чрезвычайно сложная задача. Ее решение зависит от технических трудностей экспериментального изучения, и от методических, непосредственно обусловленных сложной физической природой рассматриваемого явления. Недостаток сведений о физических и физико-химических причинах, вызывающих миграцию влаги при промерзании, а также процессах, которые ее сопровождают, не позволяет пока получить надежные методы количественных оценок этого явления. В работах [1–5] были изучены численными методами эти явления. Там же были разработаны методика решения распространения тепла и влаги в многослойной области. В работе приводится приближенный метод, с помощью которого определяется коэффициент теплопроводности грунта.

1. Постановка задачи. В области $Q=(0,H)\times(0,T)$, $z\in(0,H)$, $t\in(0,T)$ изучается задача

$$\gamma_0 C\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\right), \tag{1}$$

$$\theta\big|_{z=0}=T_1,\ \lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\Big|_{z=H}+\alpha(\theta-T_{взд})\big|_{z=H}=0, \tag{2}$$

$$\theta\big|_{t=0}=\theta_0(z),\quad 0\le z\le H,$$

$$\theta\big|_{z=H}=\theta_1(t),\quad 0\le t\le T. \tag{3}$$

Требуется определить коэффициент теплопроводности λ.

Для задачи (1)–(3) предлагается приближенная задача

$$\gamma_0 CY^{j+1}_{i,\bar t}=\left(\lambda Y^{j+1}_{i,z}\right)_{\bar z}, \tag{4}$$

$$Y_0^{j+1}=T_1,\ \ \lambda Y^{j+1}_{N,\bar z}+\alpha\left(Y_N^{j+1}-T_{взд}\right)=0, \tag{5}$$

$$Y_i^0=\theta_0(z_i),\ z_i=i*h;\ i=0,1,\dots,N. \tag{6}$$

Где Y_i^{j+1} является разностный аналог температуры $\theta(z_i,t_{j+1}),z_i=i*h;t_{j+1}=(j+1)\Delta t$. Причем $h=\dfrac{H}{N},\Delta t=\dfrac{T}{M}$ соответственно шаги по пространственным координатам и по времени. В дальнейшем будем пользоваться обозначениями $Y_i^{j+1}=Y,Y_i^j=\overline{Y}$. Задача (4)–(6) изучается в сеточной области

$$Q_N^M=\{z_i=i*h;t_j=j*\Delta t;i=0,1,2,\dots,N;\ j=0,1,2,\dots,M\}.$$

В работе рассмотрим простейший случай, когда $\lambda=const$. То есть рассматривается замерзание однородного грунта. Сначала задается начальное приближение λ_0. Следующие приближение λ_{n+1} будем вычислять методом простых итераций:

$$\lambda_{n+1}=\lambda_n-\beta J'(\lambda_n),$$

здесь β - достаточно малое число. Цель нашей работы является нахождение градиента $J'(\lambda)$ - на разностном уровне. Ясно, что λ_n и λ_{n+1} удовлетворяют системе (4)–(6). Введем обозначения

$$Y(\lambda_{n+1})-Y(\lambda_{n+1})=\Delta Y,\ \lambda_{n+1}-\lambda_n=\Delta\lambda.$$

Тогда получается разностная задача

$$\gamma_0 C\Delta Y_{\bar{t}} = \left(\Delta\lambda Y(\lambda_{n+1})_z + \lambda_n \Delta Y_z\right)_{\bar{z}}, \quad (7)$$

$$\Delta Y_0^{j+1} = 0,$$

$$\Delta\lambda Y(\lambda_{n+1})_{N,\bar{z}} + \lambda_n \Delta Y_{N,\bar{z}} + \alpha\Delta Y_N = 0, \quad (8)$$

$$\Delta Y_i^0 = 0, \ \Delta Y_N = 0, \quad (9)$$

2. Сопряженная задача.

Умножим (7) на $2Uh\Delta t$ и суммируем по всем внутренним узлам сеточной области Q_N^M. После несложных преобразований получим сопряженную задачу:

$$\gamma_0 C U_{\bar{t}} + \left(\lambda_n \bar{U}_z\right)_{\bar{z}} = 0, \quad (10)$$

$$U_i^M = 0, \ U_0^j = 0,$$

$$\lambda_n U_{\bar{z}} = -2\left(Y_n(\lambda_n) - \theta_1(t)\right). \quad (11)$$

Следующее приближение λ_{n+1} определяется из минимума функционала

$$J(\lambda) = \sum_{j=1}^{M} \left(Y_N^j - \theta_1(t_j)\right)^2 \Delta t.$$

Используя сопряженную задачу, выводим, что

$$J(\lambda + \delta\lambda) - J(\lambda) =$$

$$= \sum_{i,j} \Delta\lambda Y_z U_z h\Delta t + \sum_{i,j} \Delta\lambda\Delta Y_z U_z h\Delta t + \sum_{i,j} (\Delta Y)^2 h\Delta t.$$

Две последние слагаемые в правой части последнего равенства имеют второй порядок малости. Тогда получаем следующий градиент функционала:

$$J'(\lambda) = \sum_{i,j} Y_z U_z h\Delta t.$$

3. Алгоритм решения задачи.

1) Пусть приближение $\lambda_n(z)$ известно

2) Решается прямая задача (7)–(9) и определяется $Y_{i,z}^j; i = 0,1,\dots,N-1$ и $Y_N^j, j = 1,2,\dots,M$.

3) Решается сопряженная задача (10), (11) и определяется $U_{i,z}^j; i = 0,1,\dots,N-1$ и $Y_N^j, j = 1,2,\dots,M$.

4) Вычисляется градиент функционала

$$J'(\lambda) = \sum_{i,j} Y_z U_z h\Delta t.$$

5) Следующее приближение коэффициента теплопроводности определяется по формуле:

$$\lambda_{n+1}(z) = \lambda_n(z) - \beta J'(\lambda_n), \ \beta > 0.$$

4. Априорные оценки и доказанные утверждения.

В работе доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Для решение задачи (4)–(6) и (10), (11) справедливы оценки

$$\max_j \|Y\|^2 + \sum_j \|Y_z\|^2 \Delta t + \sum_j \left|Y_N^j\right|^2 \Delta t \le$$

$$\le C_1 < \infty, \max_{i,j} \left|Y_i^j\right| \le M_1 < \infty,$$

$$\max_j \|U\|^2 + \sum_j \|U_z\|^2 \Delta t \le$$

$$\le C_2 < \infty, \max_{i,j} \left|U_i^j\right| \le M_2 < \infty,$$

$$\frac{1}{2}\gamma_0 C\|\theta^n\|^2 + \int_0^T \left\|\sqrt{\lambda_n}\frac{\partial\theta^n}{\partial z}\right\|^2 dt + \frac{\alpha}{2}\int_0^T \left(\theta^n(H,t)\right)^2 dt \le$$

$$\max_t \max_z |\theta(z,t)| = M < \infty$$

$$\le \frac{\alpha}{2}\int_0^T T_{взд}^2(t)\,dt + \frac{1}{2}\gamma_0 c\left\|\theta_0^n\right\|^2 = c_1.$$

Теорема 2. Разностные задачи (4)–(6) и (10), (11) являются устойчивыми по начальным данным.

Теорема 3. Решение разностной задачи (4)–(6) сходится к решению (1)–(3) при $h \to 0$, $\Delta t \to 0$ и справедливо оценка

$$\max_j \left\|Y_i^j - \theta(z_i,t_j)\right\|^2 + \sum_j \left\|Y_{i,z}^j - \frac{\partial\theta(z_i,t_j)}{\partial z}\right\|^2 \Delta t \le$$

$$\le C_3\left(h^2 + (\Delta t)^2\right).$$

На основе теоремы 1–3 доказываются:

Теорема 4. Последовательность $\{\lambda_n\}$ сходится к одному пределу и ограничено сверху и снизу положительной константой.

Теорема 5. Последовательность $\{J(\lambda_n)\}$ является монотонно убывающей и ограничено сверху положительной константой.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Адамов А.А.* Процессы протаивания грунта // Доклады НАН РК. 2007. №1. С. 16-19.

2. *Жумагулов Б.Т., Рысбайұлы Б., Адамов А.А.* Сходимость разностной схемы для обобщенной задачи Стефана конвективного распространения влаги // Вестник НАН РК. 2007. №5. С. 30-41.

3. *Рысбайұлы Б., Адамов А.А.* Исследование изменений теплоемкости фазовой зоны в многослойном грунте // Доклады НАН РК. 2007. №4. С. 14-17.

4. *Рысбайұлы Б., Адамов А.А.* Исследование теплопроводности фазовой зоны в многослойном грунте // Вестник НАН РК. 2007. №4. С. 30-33.

5. *Рысбайұлы Б., Адамов А.А.* Зависимость влаги от толщины слоя при промерзаний многослойного грунта // Известия НАН РК. Серия физика, математика. 2007. №5. С. 15-18.

6. *Мартынов Г.А.* Тепло- и влагоперенос в промерзающих и оттаивающих грунтах. Основы геокрилогии (мерзлотоведения). М., 1959. Под. ред. Н. А. Цытович. Гл. VI. С. 153-192.

7. *Чудновский А.Ф.* Теплобмен в дисперсных средах. М.: Гостехиздат, 1954. 444 с.

Резюме

Жылудың кондуктивті таралуының кері есебі қарастырылады. Топырақтың жылу өткізгіштік коэффициентін анықтайтын айырымдық итерациалық тәсіл ұсыналады және оның жинақтылығы дәлелденеді.

Summary

Reciprocal sum distribution of heat in a soil is studied. The approached iterative method is offered for calculation the thermal conduction factor and it's convergence is proved.

Поступила 2.02.08г.