УДК 517.956

Р. Б. СЕИЛХАНОВА

О ЗАДАЧАХ ДАРБУ С ОТХОДОМ ОТ ХАРАКТЕРИСТИКИ И СОПРЯЖЕННЫЕ ИМ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ МНОГОМЕРНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ОПЕРАТОРОМ ЧАПЛЫГИНА

(Представлена академиком НАН РК Н. К. Блиевым)

В работе для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений с оператором Чаплыгина исследованы задачи Дарбу с отходом от характеристики и сопряженные им задачи. Доказаны корректности рассмотренных задач.

В [1] для уравнения колебания струны изучались задачи Дарбу с отходом от характеристики, где обращалось внимание на изучение таких задач для гиперболических уравнений. Многомерные аналоги этих задач для волнового уравнения предложены в [2]. С использованием изложенного в [3] метода в данной работе для вырождающихся многомерных гиперболических уравнений с оператором Чаплыгина исследованы задачи Дарбу с отходом от характеристики и сопряженные им задачи.

п.1. Постановка задач и основные результаты. Пусть D_β — конечная область евклидова пространства E_{m+1} точек $(x_1,\dots,x_m,t)$, ограниченная коноидами $\beta|x| = \int\limits_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi$, $|x| = 1 - \int\limits_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi$ и плоскостью $t=0$, $0 \le t \le t_0$, $t_0 : \dfrac{\beta}{1+\beta} = \int\limits_0^t \sqrt{g(\xi)}d\xi$, где $|x|$ — длина вектора $x=(x_1,\dots,x_m)$, а $0<\beta = const < 1$. Части этих поверхностей, образующих границу ∂D_β области D_β, обозначим через S_β, S_1 и S соответственно.

В области D_β рассмотрим взаимно-сопряженные вырождающиеся многомерные гиперболические уравнения

$$Lu \equiv g(t)\Delta_x u - u_{tt} + \sum_{i=1}^m a_i(x,t)u_{x_i} + b(x,t)u_t + c(x,t)u = 0, \quad (1)$$

$$L^*\upsilon \equiv g(t)\Delta_x\upsilon - \upsilon_{tt} - \sum_{i=1}^m a_i\upsilon_{x_i} - b\upsilon_t + d\upsilon = 0, \quad (1^*)$$

где Δ_x - оператор Лапласа по переменным $x_1,\dots,x_m$, $m\ge 2$, $g(t)>0$ при $t>0$, $g(0)=0$, $g(t)\in C^2((0,t_0))\cap C([0,t_0])$, $d(x,t) = c - \sum_{i=1}^m a_{ix_i} - b_t$.

В качестве многомерных аналогов задач Дарбу с отходом от характеристики рассмотрим следующие:

Задача 1. Найти в области D_β решение уравнения (1) из класса $C^1(\overline{D}_\beta)\cap C^2(D_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$u|_S = \tau(x), \; u|_{S_\beta} = \sigma(x), \quad (2)$$

или

$$u_t|_S = \nu(x), \; u|_{S_\beta} = \sigma(x), \quad (3)$$

а также рассмотрим сопряженные ей задачи Дирихле и Пуанкаре.

Задача 2. Найти в области D_β решение уравнения (1^*) из класса $C^1(\overline{D}_\beta)\cap C^2(D_\beta)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\upsilon\big|_S=\tau(x),\ \upsilon\big|_{S_\beta}=\sigma(x),\ \upsilon\big|_{S_1}=\varphi(x), \quad (4)$$

или

$$\upsilon_t\big|_S=\nu(x),\ \upsilon\big|_{S_\beta}=\sigma(x),\ \upsilon\big|_{S_1}=\varphi(x). \quad (5)$$

В дальнейшем нам удобно перейти от декартовых координат $x_1,...,x_m,t$ к сферическим $r,\theta_1,...,\theta_{m-1},t$, $r\ge 0,\ 0\le\theta_1<2\pi,\quad 0\le\theta_i\le\pi$, $i=2,3,...,m-1$.

Пусть $\{Y_{n,m}^k(\theta)\}$ – система линейно независимых сферических функций порядка n, $1\le k\le k_n$, $(m-2)!n!k_n=(n+m-3)!(2n+m-2)$, $\theta=(\theta_1,...,\theta_{m-1})$, $W_2^l(S)$, $l=0,1,...$ - пространства Соболева, а $\widetilde{S}_\beta=\{\ (r,\theta)\in S,\ 0<r<\frac{1}{1+\beta}\ \}$.

Имеет место ([4])

Лемма. Пусть $f(r,\theta)\in W_2^l(S)$. Если $l\ge m-1$, то ряд

$$f(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}f_n^k(r)Y_{n,m}^k(\theta), \quad (6)$$

а также ряды, полученные из него дифференцированием порядка $p\le l-m+1$, сходятся абсолютно и равномерно.

Введем множество функций

$$B^l(S)=\Big\{f(r,\theta):f\in W_2^l(S),$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{k_n}\Big(\|f_n^k(r)\|^2_{C^2((0,1))}+\|f_n^k(r)\|^2_{C^1([0,1])}\Big)\times$$

$$\times\exp 2(n^2+n(m-2))<\infty,l>\mathrm{m}-1\Big\}.$$

Пусть $a_i(x,t)$, $b(x,t)$, $c(x,t)$ $\in W_2^l(D_\beta)\subset C(\overline{D}_\beta)$, $i=1,...,m,\ l\ge m+1$ и

$$\tau(r,\theta)=r^3\tau^*(r,\theta),\qquad \nu(r,\theta)=r^3\nu^*(r,\theta),$$

$$\sigma(r,\theta)=r^2\sigma^*(r,\theta),\quad \tau^*(r,\theta),\nu^*(r,\theta)\in B^l(S),$$

$$\sigma^*(r,\theta)\in B^l(\widetilde{S}_\beta),\ \varphi(r,\theta)\in B^l(S\setminus\widetilde{S}_\beta).$$

Тогда справедливы

Теорема 1. Задача 1 однозначно разрешима.

Теорема 2. Задача 2 имеет единственное решение.

При $\beta=1$ в [5] доказана

Теорема 3. Задача 1 имеет бесчисленное множество решений.

Пусть, теперь, 0< $\beta\le 1$. Тогда, из теорем 1 и 3 вытекает справедливость следующего критерия: задача 1 однозначно разрешима $\Leftrightarrow$ β <1.

Замечание. В теореме 1 принадлежность заданных функций множеству $B_1^l(S)$ существенна. Как показывают примеры, построенные в [3], при нарушении этого условия, решение задачи 1 даже для многомерного волнового уравнения может не существовать.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бицадзе А.В.* Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981. 448 с.
2. *Protter M.H.* // J. Rational Mech. and Analysis. 1954. V. 3, N 4. P. 435-446.
3. *Алдашев С.А.* Краевые задачи для многомерных гиперболических и смешанных уравнений. Алматы: Fылым, 1994. 170 с.
4. *Михлин С.Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962. 254 с.
5. *Алдашев С.А.* // Известия вузов. Математика. 2006. №9(532). С. 3-9.

Резюме

Чаплыгин операторы бар азғындалған көп өлшемді гиперболалық теңдеулерге сипаттамадан ауытқыған Дарбу есептері және олардың түйіндес есептері зерттелген. Қарастырылған есептердің шешімі бар және жалғыздығы дәлелденген.

Западно-Казахстанский аграрно-технический университет им. Жангир хана, Уральск, Казахстан

Поступила 5.01.08г.