УДК 624. 131+539.215

Ш. АЛТЫНБЕКОВ

ВИБРАЦИОННОЕ УПЛОТНЕНИЕ СЛОЯ НЕОДНОРОДНОГО ГРУНТА ПРИ НАПОРОЗАВИСЯЩЕМ КОЭФФИЦИЕНТЕ ФИЛЬТРАЦИИ

Предложена методика решения пространственный краевой задачи виброконсолидации неоднородных грунтов и получено решение при напорозависящем коэффициенте фильтрации.

Введение. В настоящее время в энергетике намечается строительство тепловых и атомных электростанций с турбоагрегатами средней мощности.

Фундаменты турбоагрегатов представляют собой сложную конструкцию, включающую нижнюю фундаментную плиту, систему колонн-стоек и систему верхних ригелей. Жесткие крепления валопровода системы «турбина-генератор» в подшипниках допускают весьма малое смещение опор подшипников и таким образом накладывают жесткие ограничения на прогибы нижних фундаментных плит. Современные технические условия ограничивают эти прогибы величинами 1/10000 длины фундаментной плиты для турбоагрегатов мощностью до 300 мВт. В случае строительства фундаментов на глинистых водонасыщенных основаниях в результате процессов консолидации и ползучести скелета грунта имеет место нарастание прогибов фундаментов во времени, которое необходимо прогнозировать для оценки надежности работы турбоагрегатов. При столь малых величинах допускаемых прогибов возникает необходимость в разработке совершенных методов расчета, в которых с наибольшей полнотой учитывались бы реальные свойства глинистых грунтов. До настоящего времени в подобных расчетах недостаточно изучены влияния параметров неоднородности, степени физической нелинейности, функций, характеризующие нелинейную зависимость коэффициента пористости от напряжения, краевых условий, переменности коэффициентов фильтрации, бокового давления, объемного сжатия и мгновенного уплотнения, на характер виброконсолидации грунтов. В этой связи разработка метода и решение краевой задачи виброконсолидации грунтов с учетом вышеуказанных факторов, является актуальной задачей.

Постановка задачи. Пространственные краевые задачи фильтрационной теории консолидации водонасыщенного неоднородного грунта с учетом виброползучести скелета, переменности коэффициентов фильтрации, бокового давления и мгновенного уплотнения могут быть сведены к решению краевой задачи вида

$$\frac{\partial H}{\partial t}=C_v(t)\frac{1+2\xi_0 e^{-\alpha_4 x_3}}{\alpha_1+\alpha_2 e^{-\alpha_3 x_3}}L(H)+C_1(x,t,H^n),\quad (1)$$

$$H(x,\tau_1)=H_0(x),\quad (2)$$

$$-\chi_1^{(1)}\frac{\partial H}{\partial x_1}+\chi_1^{(2)}H\Big|_{x_1=-l_1}=\psi_1(x_2,x_3,t),$$

$$\chi_1^{(3)}\frac{\partial H}{\partial x_1}+\chi_1^{(4)}H\Big|_{x_1=l_1}=\psi_2(x_2,x_3,t),\quad (3)$$

$$-\chi_2^{(1)}\frac{\partial H}{\partial x_2}+\chi_2^{(2)}H\Big|_{x_2=-l_2}=\psi_3(x_2,x_3,t),$$

$$\chi_2^{(3)}\frac{\partial H}{\partial x_2}+\chi_2^{(4)}H\Big|_{x_2=l_2}=\psi_4(x_2,x_3,t),\quad (4)$$

$$-\chi_3^{(1)}\frac{\partial H}{\partial x_3}+\chi_3^{(2)}H\Big|_{x_3=0}=\psi_5(x_1,x_2,t),$$

$$\chi_3^{(3)}\frac{\partial H}{\partial x_3}+\chi_3^{(4)}H\Big|_{x_3=l_1}=\psi_6(x_1,x_2,t),\quad (5)$$

где

$$C_v(t)=(1+\varepsilon_{cp})\big/3\gamma a_0(t),$$

$$L(H)=\sum_{S=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_s}\left(K_S(1+\beta_S H)\frac{\partial H}{\partial x_S}\right);$$

$$C_1(x,t,H^n)=(Am(m-1)\times$$

$$\times(Ba_1^k+1)/3\gamma a_0(t))\int_{\tau_1}^{t}f(\tau,H^n(\tau))(t-\tau)^{m-2}d\tau;$$

$$f(\tau,H^n(\tau))=3\gamma\alpha_1(\tau)(H_0-H)+\alpha_2(\tau)(3\gamma(H_0-H))^n;$$

$$\alpha_1(\tau)=\alpha_{10}+\frac{\alpha_{11}}{\tau^2+\alpha_{12}};$$

$$\alpha_2(\tau)=\alpha_{20}+\frac{\alpha_{21}}{\tau^2+\alpha_{22}}.$$

Опишем принятые здесь обозначения: $K_S(H)$ и $a_0(t)$ – заданные непрерывные функции, характеризующие соответственно изменения коэффициентов фильтрации и мгновенного уплотнения; $x=(x_1,x_2,x_3)$ – пространственные координаты; ε_{cp} – средний коэффициент пористости; $\chi_S^{(\alpha)},\chi_S^{(\alpha+1)}$ $(\alpha=1,2,3;\ s=1,2,3)$ – коэффициенты водоотдачи, удовлетворяют условиям $\chi_S^{(\alpha)},\chi_S^{(\alpha+1)}\ge 0$, $\left(\chi_S^{(\alpha)}\right)^2+\left(\chi_S^{(\alpha+1)}\right)^2\ne 0$; γ – удельный вес воды; a_1 – амплитуда колебаний; ξ_0 – начальный коэффициент бокового давления; *A*, *B*, *m*, *k*, *n*, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_{10},\alpha_{11},\alpha_{12},\alpha_{20},\alpha_{21},\alpha_{22}$ – постоянные величины, подбираемые из опытных данных; $\psi(x,t)$ – известная функция. Она характеризует напор некоторого водоносного слоя, примыкающий к рассматриваемому участку.

Здесь функция $\psi(x,t)$ представлена так [1]:

$$\psi(x,t)=\alpha_1^{(1)}(l_1-x_1)^{n_1}\psi_1(x_2,x_3,t)+$$

$$+\alpha_2^{(1)}(l_1+x_1)^{n_2}\psi_2(x_2,x_3,t)+$$

$$+\alpha_1^{(2)}(l_2-x_2)^{n_3}\psi_3(x_1,x_3,t)+$$

$$+\alpha_2^{(2)}(l_2+x_2)^{n_4}\psi_4(x_1,x_3,t)+$$

$$+\alpha_1^{(3)}(h-x_3)^{n_5}\psi_5(x_1,x_2,t)+$$

$$+\alpha_2^{(3)}x_3^{n_6}\psi_6(x_1,x_2,t),\quad (6)$$

$$n_i\ge 2,\ i=1,2,\ldots,6.$$

При выводе дифференциального уравнения (1) виброконсолидации грунтового основания, мера $C(t,\tau,a)$ представлена в виде произведения меры статической ползучести $C_c(t,\tau)$, характеризующей часть деформации, постепенно нарастающей во времени и функции амплитуды колебаний [2]: $C(t,\tau,a)=C_c(t,\tau)F(a)=C_c(t,\tau)(Ba^k+1)$, удовлетворяющая условию $F(a)=1$.

Функция $C_c(t,\tau)$ аппроксимирована выражением $C_c(t,\tau)=A(t-\tau)^m$, $0<m<1$, которая хорошо согласуется с экспериментом. Для функций коэффициентов бокового давления и мгновенного уплотнения использованы соотношения:

$$\xi(x_3)=\xi_0\exp(-\alpha_4 x_3),$$

$$a(x_3,t)=a_0(t)\cdot(\alpha_1+\alpha_2\exp(-\alpha_3 x_3)),$$

где x_3 – глубина рассматриваемой точки относительно поверхности уплотняемой среды.

Метод и решение задачи. Задача типа (1)–(5) может быть решена различными методами уравнений математической физики и численного анализа. Здесь предпочтение дается методу итерации [3], методу разложения по собственным функциям и методу аппроксимации [4].

Введем новую неизвестную функцию $W(x,t)$

$$H(x,t)=W(x,t)+\psi(x,t), \qquad (7)$$

представляющую собой отклонение от известной функции $\psi(x,t)$. Эта функция $W(x,t)$ будет определяться как решение уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial t}=C_v(t)\frac{1+2\xi_0 e^{-\alpha_4 x_3}}{\alpha_1+\alpha_2 e^{-\alpha_3 x_3}}L(W)+$$

$$+C_2(x,t,\frac{\partial W}{\partial t},L(\psi),(W+\psi)^n) \qquad (8)$$

с однородными граничными условиями

$$-\chi_1^{(1)}\frac{\partial W}{\partial x_1}+\chi_1^{(2)}W\Big|_{x_1=-l_1}=0,$$

$$\chi_1^{(3)}\frac{\partial W}{\partial x_1}+\chi_1^{(4)}W\Big|_{x_1=l_1}=0, \qquad (9)$$

$$-\chi_2^{(1)}\frac{\partial W}{\partial x_2}+\chi_2^{(2)}W\Big|_{x_2=-l_2}=0,$$

$$\chi_2^{(3)}\frac{\partial W}{\partial x_2}+\chi_2^{(4)}W\Big|_{x_2=l_2}=0, \qquad (10)$$

$$-\chi_3^{(1)}\frac{\partial W}{\partial x_3}+\chi_3^{(2)}W\Big|_{x_3=0}=0,$$

$$\chi_3^{(3)}\frac{\partial W}{\partial x_3}+\chi_3^{(4)}W\Big|_{x_3=h}=0. \qquad (11)$$

При этом начальное условие (2) будет выглядеть следующим образом:

$$W(x,\tau_1)=H_0(x)-\psi(x,\tau_1). \qquad (12)$$

Представив функцию $\psi(x,t)$ в виде (6), потребуем чтобы она удовлетворяла условиям видов (9)-(11), тогда коэффициенты $\alpha_1^{(1)},\alpha_2^{(1)}$, $\alpha_1^{(2)},\alpha_2^{(2)},\alpha_1^{(3)},\alpha_2^{(3)}$ в (6) определяются однозначно

$$\alpha_1^{(1)}=-1/(\chi_1^{(1)}n_1(2l_2)^{n_1-1}+\chi_1^{(2)}(2l_2)^{n_1}),$$

$$\alpha_1^{(2)}=-1/(\chi_2^{(1)}n_2(2l_2)^{n_3-1}+\chi_3^{(2)}(2l_2)^{n_3}),$$

$$\alpha_1^{(3)}=-1/(\chi_3^{(1)}n_5 h^{n_5-1}+\chi_3^{(2)}h^{n_5}),$$

$$\alpha_2^{(1)}=-1/(\chi_1^{(3)}n_2(2l_1)^{n_2-1}+\chi_1^{(4)}(2l_1)^{n_2}),$$

$$\alpha_2^{(2)}=-1/(\chi_2^{(3)}n_4(2l_2)^{n_4-1}+\chi_2^{(4)}(2l_2)^{n_4}),$$

$$\alpha_2^{(3)}=-1/(\chi_3^{(3)}n_6 h^{n_6-1}+\chi_3^{(4)}h^{n_6}),$$

В дальнейшем в качестве функций $\psi_1(x_2,x_3,t)$, $\psi_2(x_2,x_3,t)$, $\psi_3(x_1,x_3,t)$, $\psi_4(x_1,x_3,t)$, $\psi_5(x_1,x_2,t)$, $\psi_6(x_1,x_2,t)$ берем следующие зависимости [5]:

$$\psi_1(x_2,x_3,t)=$$

$$=\varphi_1(t)(\ell_2-x_2^2)^{m_1}f_1(x_2)x_3^{k_1}(h-x_3)^{x_1}f_1^*(x_3),$$

$$\psi_2(x_2,x_3,t)=$$

$$=\varphi_2(t)(\ell_2-x_2^2)^{m_2}f_2(x_2)x_3^{k_2}(h-x_3)^{x_2}f_2^*(x_3),$$

$$\psi_3(x_1,x_3,t)=$$

$$=\varphi_3(t)(\ell_1-x_1^2)^{m_3}f_3(x_1)x_3^{k_1}(h-x_3)^{x_3}f_3^*(x_3),$$

$$\psi_4(x_1,x_3,t)=$$

$$=\varphi_{41}(t)(\ell_1-x_1^2)^{m_4}f_4(x_1)x_3^{k_4}(h-x_3)^{x_4}f_4^*(x_3),$$

$$\psi_5(x_1,x_2,t)=$$

$$=\varphi_5(t)(\ell_1-x_1^2)^{m_5}f_5(x_1)(\ell_2-x_2^2)^{k_5}f_5^*(x_2),$$

$$\psi_6(x_1,x_2,t)=$$

$$=\varphi_6(t)(\ell_1-x_1^2)^{m_6}f_6(x_1)(\ell_2-x_2^2)^{k_6}f_6^*(x_2),$$

где $m_i \geq 2$, $k_i \geq 2$, $\chi_j \geq 2$, $\varphi_i(t)$, $f_i(x)$, $f_i^*(x)$, $i = 1,2,\ldots,6$; $j = 1,2,3,4$ – заданные параметры и функции.

Пользуясь выбранными методами, решение задачи (1)–(5) можно представить в виде

$$H_k(x,t) = \sum_{i_1=1}^{\infty} \sum_{i_2=1}^{\infty} \sum_{i_3=1}^{\infty} T_{ki_1i_2i_3}(t)$$

$$\left(\cos\frac{\mu_{1i_1}}{\sqrt{k_1}} x_1 + B_{1i_1} \sin\frac{\mu_{1i_1}}{\sqrt{k_1}} x_1 \right) \times$$

$$\times \left(\cos\frac{\mu_{2i_2}}{\sqrt{k_2}} x_2 + B_{2i_2} \sin\frac{\mu_{2i_3}}{\sqrt{k_2}} x_2 \right) \times$$

$$\times V_{\eta_{i_1,i_2}} \left(\frac{2\sqrt{A}h\lambda_{i_1i_2i_3}}{\alpha_5\sqrt{k_3}} e^{-\frac{\alpha_5}{2}x_3} \right), \; k = 1,2,3,\ldots, \quad (13)$$

$$A = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{1 + 2\xi_o}, \alpha_5 = \ln\frac{(1 + 2\xi_o e^{-\alpha_4 h})(\alpha_1 + \alpha_2)}{(1 + 2\xi_o)(\alpha_1 + \alpha_2 e^{-\alpha_3 h})},$$

$$T_{ki_1i_2i_3}(t) =$$

$$= \left\{ \int \Phi_{i_1i_2i_3}^{(k-1)}(t) \cdot e^{\lambda_{i_1i_2i_3} \int C_v(t)dt} dt + D_{i_1i_2i_3}^{(k-1)} \right\} \times$$

$$\times e^{-\lambda_{i_1i_2i_3}^2 \int C_v(t)dt}, \quad (14)$$

где $B_{1i_1}, B_{2i_2}, \eta, \Phi_{i_1i_2i_3}^{(k-1)}$ – известные коэффициенты и функции; $V_\eta(x_3)$ – функция из комбинации функций Бесселя первого и второго рода индекса η; $\lambda_{i_1i_2i_3}$ – положительные корни уравнения, составленного из комбинаций этих функций, удовлетворяющих условиям (11); μ_{1i_1} и μ_{2i_2} – положительные корни уравнения составленного из комбинаций тригонометрических функций, удовлетворяющих соответственно условиям (9) и (10).

Для решения задачи (8)-(11) был применен метод аппроксимации [4]. Согласно этому методу функция $q(x_3) = \dfrac{1 + 2\xi_0 e^{-\alpha_4 x_3}}{\alpha_1 + \alpha_2 e^{-\alpha_3 x_3}}$ приближенно заменена функцией $\tilde{q}(x_3)$:

$$\frac{1 + 2\xi_0 e^{-\alpha_4 x_3}}{\alpha_1 + \alpha_2 e^{-\alpha_3 x_3}} \approx \frac{1 + 2\xi_0}{\alpha_1 + \alpha_2} \times$$

$$\times \exp\left(\left(\ln\frac{\left(1 + 2\xi_0 e^{-\alpha_4 h}\right) \cdot (\alpha_1 + \alpha_2)}{(1 + 2\xi_0) \cdot \left(\alpha_1 + \alpha_2 e^{-\alpha_3 h}\right)} \right) \frac{x_3}{h} \right). \quad (15)$$

Нетрудно заметить, что при $x_3 = 0$ и $x_3 = h$ аппроксимация вида (15) абсолютно точная и при a_3, $a_4 \to 0$ погрешность аппроксимации стремится к нулю. Следовательно, она для малых значений a_3, a_4 вполне приемлема в практических расчетах.

Далее, имея в виду аппроксимацию вида (15), последовательным введением новых переменных

$$y = \frac{\alpha_5}{2h} x_3 + \frac{1}{2} \ln\frac{4h^2\lambda^2}{\alpha_5^2 K_3} \quad \text{и} \quad z = e^y$$

дифференциальное уравнение

$$K_3 Z''(x_3) + \left(\lambda^2 A e^{-\alpha_5 x_3} - (K_1\mu_1^2 + K_2\mu_2^2)\right) Z(x_3)$$

приведено к уравнению Бесселя, общее решение которого известно.

Ряд (13) быстро сходится, так как $\mu_{1i_1} < \mu_{1i_1+1}$ и $\mu_{2i_2} < \mu_{2i_2+1}$, $\lambda_{i_1i_2i_3} < \lambda_{i_1+1,i_2+1,i_3+1}$. Значение функции $T_{k\,i_1i_2i_3}(t)$ $(k = 1,2,3,\ldots)$, определяемое по формуле (14), резко уменьшается, как с увеличением μ_{1i_1}, μ_{2i_2} и $\lambda_{i_1i_2i_3}$, так и с течением времени. Следовательно, последовательность $\{H_k\}$ $(k = 1,2,3,\ldots)$ сходится к решению $H(x,t)$ задачи (1)–(5) при $k \to \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Алтынбеков Ш.* Об одной многопараметрической математической модели процесса консолидации грунтов // Тр. 1-го Центрально-Азиатского геотехнического симпозиума. Астана, 2000, 25-28 мая. С. 116-118.

2. *Гольдин А.И., Месчян С.Р., Пустамян Г.Ф.* Плоская задача виброконсолидации водонасыщенного глинистого грунта // ДАН Арм. ССР. 1985. Т. 8, №2. С. 78-86.

3. *Алтынбеков Ш., Ширинкулов Т.Ш.* Об одном итерационном методе нелинейных краевых задач консолидации грунтов // ДАН РУз, Математика. Технические науки. Естествознание. 1996. №1-2. С. 25-27.

4. *Алтынбеков Ш.* Об одном методе аппроксимации // Узб. журнал «Проблемы механики». 1995. №3-4. С. 5-7.

5. *Алтынбеков Ш.* Об одной задаче нелинейной теории консолидации неоднородных наследственно стареющих грунтов // Узб. журнал «Проблемы механики». 1999. №1. С. 3-9.

Резюме

Әртекті топырақтың вибрациялық консолидациясының кеңістікті шеттік есебін шешу әдісі ұсынылған және оның шешімі қысымға тәуелді сүзгілеу коэффициентінде алынған.

Summary

The methods of the space regional problem of non homogeneous soil vibro-consolidation and was got its decision in pressure depending coefficient of the filtration is considered in this article.

Шымкентский институт
Международного Казахско-Турецкого
университета им. Х. А. Ясави

Поступила 18.03.08г.