МАТЕМАТИКА

УДК 517.946

Б. Т. ЖУМАГУЛОВ, Ш. Н. КУТТЫКОЖАЕВА, Н. А. ИСАБЕКОВА

АППРОКСИМАЦИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ С КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ ПРОСКАЛЬЗЫВАНИЯ ДЛЯ МОДИФИЦИРОВАННЫХ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Рассматривается аппроксимация с малым параметром ε начально-краевой задачи с краевым условием проскальзывания для модифицированных уравнений Навье-Стокса. Доказываются теоремы существования и сходимости сильных решений вспомогательной задачи.

В работе [1] изучена разрешимость в ограниченной области $\Omega \subset R^3$ с гладкой границей $\partial\Omega$ начально-краевой задачи с краевым условием проскальзывания (условием свободной поверхности) для модифицированных уравнений Навье-Стокса.

$$\mathrm{v}_t - \left(v_0 + v_1 \|\mathrm{v}_x\|^2_{L_2(\Omega)}\right)\Delta \mathrm{v} + (\mathrm{v}\cdot\nabla)\mathrm{v} + \nabla p = f,$$

$$div\mathrm{v} = \nabla\cdot\mathrm{v} = 0, \quad v_0, v_1 > 0, \tag{1}$$

$$\mathrm{v}\cdot n\big|_S = 0, \ (\mathrm{rot v}\times n)\big|_S = 0, \quad t\in(0,\mathrm{T}),$$

$$\mathrm{v}\big|_{t=0} = \mathrm{v}_0(x). \tag{2}$$

Для любых $\mathrm{v}\in \mathrm{W}_2^s(\Omega), s = 2,3,...$, удовлетворяющих краевому условию (2) в случае $\Omega\subset R^3$, или его аналогу

$$\mathrm{v}\cdot n\big|_S = \mathrm{v}_n\big|_S = 0, \quad \mathrm{rotv}\big|_S = \left(\frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x_2}\right)\Bigg|_S = 0$$

в случае $\Omega\subset R^2$,

справедлива формула Грина:

$$(-\Delta\mathrm{v},\omega)_\Omega = -(graddiv\mathrm{v},\omega)_\Omega + (rotrot\mathrm{v},\omega)_\Omega =$$

$$= -\int_S div\mathrm{v}\cdot\omega_{\mathrm{n}}ds + (div\mathrm{v},\mathrm{div}\omega)_\Omega +$$

$$+\int_S \omega(rot\mathrm{v}\times n)ds + (rot\mathrm{v},\mathrm{rot}\omega)_\Omega =$$

$$= (div\mathrm{v},\mathrm{div}\omega)_\Omega + (rot\mathrm{v},\mathrm{rot}\omega)_\Omega, \tag{3}$$

$$(grad\, div\mathrm{v},\Delta\omega)_\Omega = (grad\, div\mathrm{v}, grad\, div\omega)_\Omega -$$

$$-\int_S grad\, div\mathrm{v}(\mathrm{rot}\omega\times n)ds -$$

$$-(rot\; grad\; div\mathrm{v},\mathrm{rot}\omega)_\Omega =$$

$$= (grad\; div\mathrm{v}, graddiv\omega)_\Omega, \tag{4}$$

если $\Omega\subset R^3$, и

$$(-\Delta\mathrm{v},\omega)_\Omega = (div\mathrm{v},div\omega)_\Omega + (rot(rot\mathrm{v}),\omega)_\Omega =$$

$$= (div\mathrm{v},div\omega)_\Omega +$$

$$+\int_S rot\mathrm{v}(\omega\times n)ds + (rot\mathrm{v},rot\omega)_\Omega,$$

$$(grad\; div\mathrm{v},\Delta\omega)_\Omega = (grad\; div\mathrm{v}, grad\; div\omega)_\Omega -$$

$$-\int_S rot\omega(grad\; div\mathrm{v}\times n)ds -$$

$$-(rot\; grad\; div\mathrm{v}, rot\omega)_\Omega =$$

$$= (grad\; div\mathrm{v}, grad\; div\omega)_\Omega, \tag{5}$$

если $\Omega\subset R^2$.

Далее рассмотрим ε-аппроксимацию уравнений (1)-(2):

$$\mathrm{v}^\varepsilon_t - (v_0 + \mathrm{v}_1\|\mathrm{v}^\varepsilon_x\|^2_2)\Delta\mathrm{v}^\varepsilon + (\mathrm{v}^\varepsilon\cdot\nabla)\mathrm{v}^\varepsilon -$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\nabla div\mathrm{v}^\varepsilon + \frac{1}{2}\mathrm{v}^\varepsilon div\mathrm{v}^\varepsilon = f, \tag{6}$$

$$\mathrm{v}^\varepsilon\big|_{t=0} = \mathrm{v}_0(x), \ \mathrm{v}^\varepsilon\cdot n\big|_S = 0, \ \left(rot\mathrm{v}^\varepsilon\times n\right)_S = 0. \tag{7}$$

Определение 1. Функция $\mathrm{v}^\varepsilon(x,t)$ называется сильным решением задачи (6)-(7), если она суммируема со всеми производными, входящими в уравнение (6) и удовлетворяет уравнению (6) и начально-краевым условиям (7) почти всюду в соответствующей мере.

Теорема 1. Пусть $\Omega\subset R^3$, $S\in C^2$, $\mathrm{v}_0(x)\in J^2_n(\Omega)$, f, $f_t\in L_2(0,T,L_2(\Omega))$. Тогда начально-краевая задача (6)-(7) имеет единственное сильное решение и для решения справедливы оценки

$$\left\|\mathrm{v}_x^{\varepsilon}\right\|_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))}+\frac{1}{\varepsilon}\left\|grad\,div\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^2_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))}+$$

$$+\int_0^T\left\|\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|_{W_2^2(\Omega)}dt\le C<\infty, \qquad (8)$$

$$\left\|\mathrm{v}_t^{\varepsilon}\right\|_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))}+\left\|\mathrm{v}_{tx}^{\varepsilon}\right\|_{L_2(0,T,L_2(\Omega))}<C<\infty.$$

Доказательство. Вывод априорных оценок. Умножим (6) на v^{ε} скалярно в $L_2(\Omega)$ используя формулу Грина, неравенства Гельдера и Юнга, мы получим равенство:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left\|\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^2+\left(\nu_0+\mathrm{v}_1\left\|\mathrm{v}_x^{\varepsilon}\right\|^2\right)\left(\left\|rot\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^2+\right.$$

$$\left.+\left\|div\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^2\right)+\frac{1}{\varepsilon}\left\|div\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^2=\left(f,\mathrm{v}^{\varepsilon}\right)\le$$

$$\le\|f\|\cdot\left\|\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|\le\delta\left\|\mathrm{v}_x^{\varepsilon}\right\|^2+C_\delta\|f\|^2.$$

Последнее неравенство интегрируем по t и при малом δ получим:

$$\left\|\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^2_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))}+$$

$$+\int_0^T\left(\nu_0+\mathrm{v}_1\left\|\mathrm{v}_x^{\varepsilon}\right\|^2\right)\left(\left\|rot\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^2+\left\|div\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^2\right)dt+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\left\|div\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}\le C<\infty. \qquad (9)$$

Далее умножим (6) на $\Delta\mathrm{v}^{\varepsilon}$ скалярно в $L_2(\Omega)$ используя формулу Грина, имеем:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left\|rot\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^2+\left(\nu_0+\mathrm{v}_1\left\|\mathrm{v}_x^{\varepsilon}\right\|^2\right)\left\|\Delta\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^2=\left(f,\Delta\mathrm{v}^{\varepsilon}\right)_\Omega+$$

$$+\int_\Omega\left((\mathrm{v}^{\varepsilon}\cdot\nabla)\mathrm{v}^{\varepsilon}+\frac{1}{2}\mathrm{v}^{\varepsilon}div\mathrm{v}^{\varepsilon}\right)\Delta\mathrm{v}^{\varepsilon}dx-$$

$$-\frac{1}{\varepsilon}\left\|grad\,div\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^2, \qquad (10)$$

Оцениваем правую часть (10) по неравенству вложения [2]:

$$\left(f,\Delta\mathrm{v}^{\varepsilon}\right)_\Omega\le\|f\|\cdot\left\|\Delta\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|\le\delta_1\left\|\Delta\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^2+C_\delta\|f\|^2,$$

$$\left|\int_\Omega(\mathrm{v}^{\varepsilon}\cdot\nabla)\mathrm{v}^{\varepsilon}\Delta\mathrm{v}^{\varepsilon}dx\right|\le\max_\Omega\left|\mathrm{v}^{\varepsilon}\right|\cdot\left\|\Delta\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|\cdot\left\|\mathrm{v}_x^{\varepsilon}\right\|\le$$

$$\le C\left\|\Delta\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^{1/2}\left\|\mathrm{v}_x^{\varepsilon}\right\|\cdot\left\|\Delta\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|\le$$

$$\le\delta_2\left\|\mathrm{v}_x^{\varepsilon}\right\|^2\left\|\Delta\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^4+C\left\|\Delta\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|\le$$

$$\le\delta_2\left\|\mathrm{v}_x^{\varepsilon}\right\|^2\left\|\Delta\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^2+\delta_3\left\|\Delta\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^2+C.$$

Теперь возьмем $\delta_2+\delta_4<\nu_1$, $\delta_1+\delta_3+\delta_5<\nu_0$ и интегрируя (10) по t, имеем:

$$\left\|\mathrm{v}_x^{\varepsilon}\right\|^2_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))}+\int_0^T\left(\nu_0+\mathrm{v}_1\left\|\mathrm{v}_x^{\varepsilon}\right\|^2\right)\left\|\Delta\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^2dt+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\left\|\nabla div\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}\le C\left(\left\|\mathrm{v}_{0x}^{\varepsilon}\right\|^2+\int_0^T\|f\|^2dt\right).$$

(11)

Далее дифференцируем (6) по t, умножим скалярно на $\mathrm{v}_t^{\varepsilon}$ и в результате получим:

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left\|\mathrm{v}_t^{\varepsilon}\right\|^2+\int_0^T\left(\nu_0+\mathrm{v}_1\left\|\mathrm{v}_x^{\varepsilon}\right\|^2\right)\left(\left\|rot\mathrm{v}_t^{\varepsilon}\right\|^2+\right.$$

$$\left.+\left\|div\mathrm{v}_t^{\varepsilon}\right\|^2\right)dt+\frac{\nu_1}{2}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dt}}\left\|\mathrm{v}_x^{\varepsilon}\right\|^2\right]=$$

$$=\left(f_t,\mathrm{v}_t^{\varepsilon}\right)_\Omega+\left((\mathrm{v}_t^{\varepsilon}\cdot\nabla)\mathrm{v}^{\varepsilon},\mathrm{v}_t^{\varepsilon}\right)_\Omega+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\mathrm{v}^{\varepsilon}div\mathrm{v}_t^{\varepsilon},\mathrm{v}_t^{\varepsilon}\right)_\Omega-\frac{1}{\varepsilon}\left\|div\mathrm{v}_t^{\varepsilon}\right\|^2,$$

Оцениваем один из слагаемых по неравенству Гельдера:

$$\left|\left((\mathrm{v}_t^{\varepsilon}\cdot\nabla)\mathrm{v}^{\varepsilon},\mathrm{v}_t^{\varepsilon}\right)_\Omega\right|\le\left\|\mathrm{v}_x^{\varepsilon}\right\|\cdot\left\|\mathrm{v}_t^{\varepsilon}\right\|^2_{L_4(\Omega)}\le$$

$$\le\left\|\mathrm{v}_{xt}^{\varepsilon}\right\|^{3/2}\left\|\mathrm{v}_t^{\varepsilon}\right\|^{1/2}\le\delta\left(\left\|rot\mathrm{v}_t^{\varepsilon}\right\|^2+\left\|div\mathrm{v}_t^{\varepsilon}\right\|^2\right)+$$

$$+C_\delta\left\|\mathrm{v}_t^{\varepsilon}\right\|^2.$$

Остальные слагаемые оцениваются аналогично. Отсюда следует, что

$$\left\|v_t^{\varepsilon}\right\|^2_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))}+\int_0^T\left\|v_{tx}^{\varepsilon}\right\|^2 dt\le$$

$$\le C\left(\left\|v_t^{\varepsilon}(x,0)\right\|^2+\int_0^T\left\|f_t\right\|^2 dt\right). \qquad (12)$$

Теперь можно перейти к непосредственному доказательству теоремы. Для этого воспользуемся методом Галеркина. Ищем приближенное решение задачи (6)-(7) в виде:

$$v_N^{\varepsilon}(t)=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j(t)\omega_j,$$

где ω_j - есть спектральная функция оператора

$$\Delta\omega_j=\lambda_j\omega_j,$$

$$\omega_j\cdot n\big|_S=\omega_{jn}\big|_S=0, \quad rot\omega_j\times n\big|_S=0. \qquad (13)$$

Числовые функций $\alpha_j(t)$ - находятся из следующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\left(v_{Nt}^{\varepsilon},\omega_j\right)_\Omega-\left(\left(\nu_0+\nu_1\left\|v_{Nx}^{\varepsilon}\right\|^2\right)\Delta v_N^{\varepsilon},\omega_j\right)_\Omega-$$

$$-\left(\frac{1}{\varepsilon}\nabla div v_N^{\varepsilon},\omega_j\right)_\Omega+$$

$$+\left((v_N^{\varepsilon}\cdot\nabla)v_N^{\varepsilon}+\frac{1}{2}v_N^{\varepsilon}div v_N^{\varepsilon},\omega_j\right)_\Omega=\left(f,\omega_j\right)_\Omega,$$

$$j=1,2,\ldots N. \qquad (14)$$

$$v_N^{\varepsilon}\big|_{t=0}=\sum_{j=1}^{N}\left(v_0^{\varepsilon}\cdot\omega_j\right)\omega_j. \qquad (15)$$

Разрешимость задачи (14)-(15) следует из общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений [3]. Рассуждая так же, как при получении априорных оценок и учитывая (13), для v_N^{ε} можно получить следующие априорные оценки, равномерные по ε:

$$\left\|v_{Nt}^{\varepsilon}\right\|^2_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))}+\int_0^T\left\|v_{Ntx}^{\varepsilon}\right\|^2 dt+$$

$$+\left\|v_{Nx}^{\varepsilon}\right\|^2_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))}\le C<\infty. \qquad (16)$$

$$\left\|v_N^{\varepsilon}\right\|^2_{L_\infty(0,T,W_2^2(\Omega))}+\frac{1}{\varepsilon}\left\|div v_{Nt}^{\varepsilon}\right\|^2_{L_2(0,T,L_2(\Omega))}+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\left\|div v_N^{\varepsilon}\right\|^2_{L_2(0,T,L_2(\Omega))}\le C<\infty. \qquad (17)$$

Из (16) и (17) по теореме вложения следует, что из последовательности v_N^{ε} можно выделить подпоследовательность, для которого имеют место соотношения

$$v_N^{\varepsilon}(t)\to v^{\varepsilon}(t) \text{ слабо в } L_2\left(0,T;W_2^2(\Omega)\right),$$

$$v_{Nt}^{\varepsilon}(t)\to v_t^{\varepsilon}(t) \text{ слабо в } L_2\left(0,T;L_2(\Omega)\right),$$

$$v_N^{\varepsilon}(t)\to v^{\varepsilon}(t) \text{ сильно в } L_2\left(0,T;W_2^1(\Omega)\right),$$

при $N\to\infty$.

Далее, переходя к пределу в интегральном тождестве (14) заметим, что $v^{\varepsilon}(t)$ - является сильным решением задачи (6)-(7). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. Пусть выполнены все условия теоремы 1. Тогда решение задачи (6)-(7) сходится к решению задачи (1)-(2) при $\varepsilon\to 0$.

Доказательство. В силу априорных оценок, равномерных по ε, следует, что

$$v^{\varepsilon}(t)\to v(t) \text{ слабо в } L_2\left(0,T;W_2^2(\Omega)\right),$$

$$v^{\varepsilon}(t)\to v(t) \text{ слабо в } L_2\left(0,T;W_2^1(\Omega)\right),$$

$$v_t^{\varepsilon}(t)\to v_t(t) \text{ слабо в } L_2\left(0,T;L_2(\Omega)\right),$$

при $\varepsilon\to 0$. Переходя к пределу в (6)-(7) при $\varepsilon\to 0$, заметим, что $v(t)$ - является решением задачи (1)-(2). Теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Осколков А.П.* Начально-краевые задачи с краевым условием проскальзывания для модифицированных уравнений Навье-Стокса // Записка научных семинаров ЛоМИ. 1994. Т. 213. С. 56-62.

2. *Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983. 318 с.

3. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1982. 152 с.

Резюме

Жетілдірілген Навье-Стокс теңдеулерінің шекаралық сырғанау шарты бар бастапқы-шеттік есебінің ε кіші параметр бойынша аппроксимациясы қарастырылады. Көмекші есептің күшті шешімінің бар болуы мен жинақталуы теоремалары дәлелденген.

Summary

In this work approximation with small parameter ε of an initial regional task with a regional condition of sliding for modified equations Navier-Stokes is examined. Theorems of existence and convergence of strong decisions of an auxiliary task are proved.

Поступила 18.03.08г.