УДК 517.946

Б. Т. ЖУМАГУЛОВ, Ш. Н. КУТТЫКОЖАЕВА, Н. А. ИСАБЕКОВА

ε-РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ ОДНОЙ МОДЕЛИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В ПЕРЕМЕННЫХ ФУНКЦИИ ТОКА И ВИХРЯ СКОРОСТЕЙ

Исследуется ε-регуляризация одной модели вязкой несжимаемой жидкости в переменных функции тока и вихря скоростей с учетом температур. Доказывается существование и сходимость обобщенного решения вспомогательной задачи. Получены равномерные априорные оценки.

Движение вязкой несжимаемой жидкости в переменных функции тока и вихря скоростей с учетом температур сводится к решению уравнения [1]:

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + \psi_y\omega_x - \psi_x\omega_y = \mu\Delta\omega + \gamma\theta_y$$

$$\omega = \Delta\psi; \quad \frac{\partial\theta}{\partial t} + \psi_y\frac{\partial\theta}{\partial x} - \psi_x\frac{\partial\theta}{\partial y} = \lambda\Delta\theta, \qquad (1)$$

$$\theta\big|_{t=0} = \theta_0(x) \qquad \omega\big|_{t=0} = \omega_0(x), \quad \left.\frac{\partial\theta}{\partial t}\right|_S = 0,$$

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial n}\right|_S = \psi\big|_S = 0, \quad t\in[0,T]. \qquad (2)$$

Здесь ε – коэффициент вязкости, Ω – область в R^3, S – граница области Ω, ψ – функция тока, f – массовая сила, $0 < \gamma = \text{const}$.

Система уравнений (1)-(2) является системой составного типа, поэтому непосредственное применение метода расщепления затруднительно. И для приближенного решения задачи (1)-(2) методом дробных шагов рассмотрим систему уравнений с малым параметром

$$\varepsilon\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} + Q_m\right) + \frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} + \psi_y^\varepsilon\omega_x^\varepsilon - \psi_x^\varepsilon\omega_y^\varepsilon =$$

$$= \Delta\omega^\varepsilon + \gamma\theta_y^\varepsilon, \; \omega^\varepsilon = \Delta\psi^\varepsilon, \qquad (3)$$

$$\theta^\varepsilon\big|_{t=0} = \theta_0(x) \qquad \psi^\varepsilon\big|_{t=0} = \psi_0(x), \quad \left.\frac{\partial\psi^\varepsilon}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi_1(x) \qquad (4)$$

$$\left.\frac{\partial\psi^\varepsilon}{\partial n}\right|_S = \psi^\varepsilon\big|_{S_0} = 0, \quad \left.\frac{\partial\theta^\varepsilon}{\partial t}\right|_S = 0, \quad t\in[0,T],$$

где $\psi_0(x) = \psi\big|_{t=0}$, $\psi_1(x) = \left.\frac{\partial\psi}{\partial t}\right|_{t=0}$ находятся из системы (1)-(2). $Q_m(x)$ - функция известная, обеспечивающая условий

$$\left.\frac{\partial^k\psi^\varepsilon}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial^k\psi}{\partial t^k}\right|_{t=0}, \quad \left.\frac{\partial^k\theta^\varepsilon}{\partial t^k}\right|_{t=0} = \left.\frac{\partial^k\theta}{\partial t^k}\right|_{t=0}. \qquad (5)$$

Дальнейшее обозначения взяты из работы [2].

Определение 1. Обобщенным решением задачи (3)-(4) называются функции $\psi^\varepsilon(x,t)$, $\theta^\varepsilon(x,t)$: $\psi^\varepsilon \in L_2(0,T,\overset{0}{W}{}_2^2(\Omega))$,

$\psi_t^\varepsilon \in L_2(0,T,L_2(\Omega))$, $\theta^\varepsilon \in L_2(0,T,\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))$, удовлетворяющие следующим интегральным тождествам

$$\varepsilon\int_0^T\Big[\left(\psi_t^\varepsilon,\Phi_t\right)_{L_2(\Omega)}+\left(\psi_y^\varepsilon\cdot\psi^\varepsilon,\Phi_x\right)_{L_2(\Omega)}-$$

$$-\left(\psi_x^\varepsilon\cdot\Delta\psi^\varepsilon,\Phi_y\right)_{L_2(\Omega)}\Big]dt-$$

$$-\mu\int_0^T\left(\Delta\psi^\varepsilon,\Delta\Phi\right)_{L_2(\Omega)}dt=\varepsilon\int_0^T\left(Q_m\Phi\right)_{L_2(\Omega)}dt-$$

$$-\gamma\int_0^T\left(\theta_y^\varepsilon,\Phi\right)_{L_2(\Omega)}dt-\varepsilon\left(\psi_1(x),\Phi(0)\right)_{L_2(\Omega)},$$

$$\varepsilon\int_0^T\left(\theta^\varepsilon,\varphi_t\right)_{L_2(\Omega)}dt+\int_0^T\left(\theta^\varepsilon\psi_y^\varepsilon\varphi_x-\theta^\varepsilon\psi_x\varphi_y\right)_{L_2(\Omega)}dt=$$

$$=\lambda\int_0^T\left(\nabla\theta^\varepsilon,\nabla\varphi\right)_{L_2(\Omega)}dt-\left(\theta_0(x),\varphi(0)\right)_{L_2(\Omega)}. \qquad (6)$$

Теорема 1. Пусть $\psi_0(x)\in W_2^2(\Omega)$, $\psi_1(x)\in W_2^1(\Omega)$, $\theta_0(x)\in L_2(\Omega)$. Тогда существует хотя бы одно обобщенное решение задачи (3)-(4) и имеет место:

$$\varepsilon\left\|\psi_t^\varepsilon\right\|_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))}+\left\|\psi^\varepsilon\right\|^2_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))}+$$

$$+\left\|\theta^\varepsilon\right\|_{L_2(0,T;\hat{W}_2^1(\Omega))}\le C<\infty.$$

и оно сходится к обобщенному решению задачи (1)-(2) при $\varepsilon\to 0$.

Доказательство. Рассмотрим эквивалентную форму (6):

$$\int_0^T\left(\theta_t^\varepsilon,\varphi\right)_\Omega dt+\lambda\int_0^T\left(\nabla\theta^\varepsilon,\nabla\varphi\right)_\Omega dt=$$

$$=\int_0^T\left(\theta^\varepsilon,\psi_y^\varepsilon\varphi_x-\psi_x^\varepsilon\varphi_y\right)_\Omega dt$$

при $\varphi=\theta^\varepsilon$:

$$\int_0^T\frac{\partial}{\partial t}\left\|\theta^\varepsilon\right\|^2 dt+\lambda\left\|\nabla\theta^\varepsilon\right\|^2_{L_2(Q)}=$$

$$=\int_0^T(\theta^\varepsilon,\psi_y^\varepsilon\theta_x^\varepsilon-\psi_x^\varepsilon\theta_y^\varepsilon)_\Omega dt.$$

Для правой части справедливо тождество:

$$\int_0^T\int_\Omega(\theta^\varepsilon,\psi_y^\varepsilon\theta_x^\varepsilon-\psi_x^\varepsilon\theta_y^\varepsilon)d\xi dt=0.$$

Тогда получим

$$\left\|\theta^\varepsilon(T,x)\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\lambda\left\|\nabla\theta^\varepsilon\right\|^2_{L_2(Q_T)}=\left\|\theta_0^\varepsilon(x)\right\|^2_{L_2(\Omega)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left\|\theta^\varepsilon(T,x)\right\|^2_{L_2(\Omega)}\le\left\|\theta_0^\varepsilon(x)\right\|^2,$$

отсюда, и так как T – произвольное число, то $\forall t\le T:\ \left\|\theta^\varepsilon(t,x)\right\|^2\le\left\|\theta_0^\varepsilon(x)\right\|^2$.

Далее легко вытекает оценка:

$$\max_{0\le t\le T}\left\|\theta^\varepsilon(t,x)\right\|^2_{L_2(\Omega)}+\lambda\left\|\nabla\theta^\varepsilon(t,x)\right\|^2_{L_2(Q_T)}\le$$

$$\le 2\left\|\theta_0^\varepsilon(x)\right\|^2_{L_2(\Omega)}<\infty. \qquad (7)$$

Теперь в интегральном тождестве возьмем $\Phi=\psi^\varepsilon(t,x)$ и получим:

$$\varepsilon\left\|\psi_t^\varepsilon\right\|^2_{L_2(Q_T)}+\frac{1}{2}\int_0^T\frac{\partial}{\partial t}\left\|\nabla\psi^\varepsilon\right\|^2dt+\mu\left\|\Delta\psi^\varepsilon\right\|^2_{L_2(Q_T)}=$$

$$=\varepsilon\int_0^T(Q_m,\psi^\varepsilon)_\Omega dt-$$

$$-\gamma\int_0^T(\theta_y^\varepsilon,\psi)_\Omega dt-\varepsilon(\psi_1(x),\psi(0))_\Omega. \qquad (8)$$

Оценивая правую часть как в [3], из (8) имеем:

$$\varepsilon\left\|\psi_t^\varepsilon\right\|^2_{L_2(Q_T)}+\frac{1}{2}\left\|\nabla\psi^\varepsilon(T,x)\right\|^2+\mu\left\|\Delta\psi^\varepsilon\right\|^2_{L_2(Q_T)}\le$$

$$\le\delta\int_0^T\left\|\nabla\psi^\varepsilon\right\|^2dt+C_1\varepsilon^2+C_2\varepsilon+C_3, \qquad (9)$$

$$\left\|\nabla\psi(T,x)\right\|^2\le\delta\int_0^T\left\|\nabla\psi(t,x)\right\|^2dt+C_1\varepsilon^2+C_2\varepsilon+C_3.$$

Далее проводя аналогичные выкладки как в [3], из (8) имеем:

$$\varepsilon\left\|\psi_t\right\|^2_{L_2(Q_T)}+\max_t\left\|\nabla\psi^\varepsilon(t,x)\right\|^2_{L_2(\Omega)}+$$

$$+\mu\left\|\Delta\psi^\varepsilon\right\|^2_{L_2(Q_T)}\le C<\infty. \qquad (10)$$

Теперь умножим (4) на $\Delta\theta$ скалярно в $L_2(\Omega)$ и оценивая некоторые из получаемых слагаемых, получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\|\nabla\theta\|^2 + \lambda\|\Delta\theta\|^2 \le C\|\Delta\psi\|^2\cdot\|\nabla\theta\|^2.$$

Отсюда по лемме Гронуолла имеем

$$\max_t\|\nabla\theta\|^2 + \|\Delta\theta\|^2_{L_2(Q_T)} \le C < \infty. \quad (11)$$

Далее нужно напомнить, что, если умножить неравенство (9) на положительное число ε и повторить дальнейшие выкладки, то легко можно получить оценку:

$$\|\varepsilon\psi_t\|^2_{L_2(Q_T)} < \infty. \quad (12)$$

Для задачи (1)-(2) нужно еще предположить, что имеет место краевое условие $\int\limits_S \frac{\partial\Delta\psi}{\partial n}dS = 0$ (что как раз не противоречит физической постановке задачи).

Далее в интегральном тождестве определения 1 возьмем $\Phi = \Delta\psi^\varepsilon(x,t)$ и проводя соответствующие выкладки, получим неравенство:

$$\varepsilon\|\nabla\psi_t\|^2_{L_2(Q_T)} + \|\Delta\psi(T,x)\|^2 + \mu\|\nabla\Delta\psi\|^2_{L_2(Q_T)} \le$$

$$\le \int\limits_0^T\|\Delta\psi\|^2dt + C_1\varepsilon + C_2.$$

Конечно, если рассматривать это неравенство при $\forall\tau \le T$, то имеем

$$\varepsilon\int\limits_0^\tau\|\nabla\psi_t\|^2dt + \|\Delta\psi(\tau,x)\|^2 + \mu\|\nabla\Delta\psi\|^2_{L_2(0,\tau,L_2(\Omega)} \le$$

$$\le \int\limits_0^\tau\|\Delta\psi\|^2dt + C_1\varepsilon + C_2. \quad (13)$$

Отсюда повторяя аналогичные операции, как и при получении оценок (10), (12) легко получим оценки:

$$\varepsilon\|\nabla\psi_t\|^2_{L_2(Q_T)} + \max_t\|\Delta\psi(t,x)\|^2_{L_2(\Omega)} +$$

$$+\|\nabla\Delta\psi\|^2_{L_2(Q_T)} \le C, \quad (14)$$

$$\|\nabla\psi_t\|^2_{L_2(Q_T)} \le C < \infty. \quad (15)$$

(15) получается умножением (13) на $1/\varepsilon$ и повторением известных выкладок.

Дальнейшее доказательство теоремы опирается на метод Галеркина. Пусть W_j – базис пространства $\overset{0}{W}{}^1_2(\Omega)\cap W_2^2(\Omega)$ ортонормированный в $L_2(\Omega)$ из задачи

$$\Delta W_j = \lambda_j W_j, \quad W_j\big|_S = \frac{\partial W_j}{\partial n}\bigg|_S = 0 \quad (16)$$

и построим последовательность приближенных решений:

$$\psi^{N,\varepsilon} = \sum_{j=1}^N \alpha_j(t)W_j \quad (17)$$

а функции $\theta^{\varepsilon,N}$ – находятся из уравнения:

$$\frac{\partial\theta^{\varepsilon,N}}{\partial t} + (\psi_N^\varepsilon)_y\frac{\partial\theta^{\varepsilon,N}}{\partial x} - (\psi^{N,\varepsilon})_x\frac{\partial\theta^{\varepsilon,N}}{\partial y} = \lambda\Delta\theta^{\varepsilon,N}.$$

(18)

Числа $\alpha_j(t)$ находятся из системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$(\varepsilon(\psi^{\varepsilon,N})_{tt} + \varepsilon Q_m + (\Delta\psi^{\varepsilon,N})_t +$$

$$+\frac{\partial\psi^{\varepsilon,N}}{\partial y}\frac{\partial\omega^{\varepsilon,N}}{\partial x} - \frac{\partial\psi^{\varepsilon,N}}{\partial x}\frac{\partial\omega^{\varepsilon,N}}{\partial y} - \mu\Delta\omega^{\varepsilon,N} -$$

$$-\gamma(\theta^{\varepsilon,N})_y, W_j)_\Omega = 0, \ \omega^{\varepsilon,N} = \Delta\psi^{\varepsilon,N}, \ j = \overline{1..N}.$$

(19)

Стандартным образом можно доказать существование решения задачи (17)-(19). Для этих решений уже известным способом можно получить следующие оценки:

$$\|\theta^{\varepsilon,N}\|^2_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))} + \|\nabla\theta^{N,\varepsilon}\|^2_{L_\infty(0,T,L_2)} + \quad (20)$$

$$+\|\Delta\psi^{N,\varepsilon}\|^2_{L_\infty(0,T,L_2(\Omega))} + \|\nabla\Delta\psi^{N,\varepsilon}\|^2_{L_2(Q_T)} \le C.$$

Эти оценки позволяют выделить подпоследовательности, для которых:

$\theta^{\varepsilon,N} \to \theta^\varepsilon$ * слабо в $L_\infty(0,T,L_2(\Omega))$,

$\theta^{N,\varepsilon} \to \theta^\varepsilon$ * слабо в $L_\infty(0,T,W_2^1(\Omega))$,

$\theta^{N,\varepsilon} \to \theta^\varepsilon$ слабо в $L_2(0,T,W_2^2(\Omega))$,

$\varepsilon\psi_t^{N,\varepsilon} \to \varepsilon\psi_t^\varepsilon$ слабо в $L_2(0,T,L_2(\Omega))$,

$$\psi_t^{N,\varepsilon} \to \psi_t^{\varepsilon} \text{ слабо в } L_2(0,T,\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)),$$

$$\psi^{N,\varepsilon} \to \psi^{\varepsilon} \text{ * слабо в } L_\infty(0,T,W_2^2(\Omega)),$$

$$\psi^{N,\varepsilon} \to \psi^{\varepsilon} \text{ сильно в } L_2(0,T,W_2^1(\Omega)).$$

Эти соотношения при $N \to \infty$ в (6) позволяют показать, что предельные функций $\psi^{\varepsilon}, \theta^{\varepsilon}$ – являются обобщенным решением задачи (3)–(4).

Далее, так как оценки (20) не зависят от малого параметра ε, то имеет место следующие соотношения при $\varepsilon \to 0$:

$$\theta^{\varepsilon} \to \theta \text{ * слабо в } L_\infty(0,T,W_2^1(\Omega)),$$

$$\theta^{\varepsilon} \to \theta \text{ слабо в } L_2(0,T,W_2^2(\Omega)),$$

$$\varepsilon\psi_t^{\varepsilon} \to 0 \text{ слабо в } L_2(0,T,L_2(\Omega)),$$

$$\psi_t^{\varepsilon} \to \psi_t \text{ слабо в } L_2(0,T,\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)),$$

$$\psi^{\varepsilon} \to \psi \text{ * слабо в } L_\infty(0,T,W_2^2(\Omega)),$$

$$\psi^{\varepsilon} \to \psi \text{ сильно в } L_2(0,T,W_4^1(\Omega)).$$

Данные соотношения позволяют, переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ в соответствующих тождествах, показать, что предельные функций ψ, θ являются обобщенным решением (1)-(2). Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Т.И.* Механика сплошной среды. В 2-х т. М.: Наука, 1973. Т. 1. 536 с.

2. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. М.: Наука, 1973. 407 с.

3. *Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н.* Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука, 1983. 318 с.

Резюме

Ток функциясы мен құйын жылдамдығы айнымалылары арқылы берілген сығылмайтын тұтқыр сұйықтықтың температураны ескергендегі e - регуляризациясы зерттелді. Жалпылама шешімнің бар болуы мен жинақталуы дәлелденген. Бірқалыпты априорлық бағалар алынған.

Summary

In this work it is investigated ε - approximation one model of a viscous incompressible liquid in variables of function of a current and a whirlwind of speeds in view of temperatures. Existence and convergence of the generalized decision of an auxiliary task is proved. Uniform aprioristic estimations are received.

Кокшетауский университет
КазНУ им. аль-Фараби

Поступила 18.03.08г.