Б. РЫСБАЙУЛЫ, А. О. ИСМАЙЛОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ОДНОРОДНОГО ГРУНТА В ПРОЦЕССЕ ПРОМЕРЗАНИЙ

(Представлена академиком НАН РК Ж. Ж. Байгунчековым)

Рассматривается задача идентификация параметров в процессе промерзаний однородного грунта. Предлагается итерационный метод, с помощью которого определяется коэффициент теплопроводности грунта. Доказывается сходимость итерационного процесса.

1. Процессы переноса тепла в талого и мерзлого зонах грунта. При кондуктивном переносе тепла поток тепла пропорционален градиенту температуры $\nabla\theta$, т.е.

$$Q = \lim_{s_1 \to s_2}\left[-\lambda\frac{\theta_1-\theta_2}{S_1-S_2}\right] = \lim_{\Delta s \to 0}\left[-\lambda\frac{\Delta\theta}{\Delta S}\right] = -\lambda\nabla\theta, \quad (1)$$

где λ - коэффициент теплопроводности, который зависит только от свойств данного тела; $S_{1,2}$ - точки, лежащие на нормали $\vec{n}$ к изотермической поверхности грунта, $\theta = \theta(x, y, z, t)$ -температура тела в момент времени t.

Уравнение (1) справедливо только для однородных сплошных тел, следовательно, оно используется для определения теплового потока в грунтовом массиве только при условии, что размеры грунта достаточно велики. Коэффициент теплопроводности входящие в (1) также представляет некоторую усредненную характеристику грунта. Поэтому величина λ определяется составом грунта, теплопроводностью отдельных его компонент (минеральный скелет, вода, лед, воздух), структурой и текстурой породы. Наибольшее влияние на λ сказывает влажность грунта, этим вопросом в свое время занимались ученые: Франчук [1]; Чудновский [2]; Kersten [3]. Чудновский и Kersten изучает влияние минерального состава грунта на коэффициент теплопроводности. Наиболее подробно исследована зависимость λ от объемного веса γ Kersten [4], Чудновский [5].

В грунтах тепло распространяется как по минеральному скелету путем кондукций, так и через поры. Причем через поры тепло переносится путем кондукцией, конвекцией и излучением. При измерении величины λ определяется суммарный поток тепла, состоящей из перечисленных выше элементарных потоков. В связи с этим коэффициент теплопроводности является по существу некоторой эффективной характеристикой, учитывающей сразу несколько различных механизмов теплопередачи.

В настоящей работе приводится способ определение коэффициента теплопроводности грунта используя температуры промерзающего грунта на поверхности земли.

1.2. Математическая модель. Для того, чтобы решить поставленную задачу, а именно, чтобы определить коэффициент теплопроводности талого, мерзлого продукта и определить изменение λ в зоне фазовых превращения грунта, необходимо решить следующую задачу [7]:

$$\gamma_0 c\frac{\partial\theta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\right), \ 0<z<H, \quad (2)$$

$$\theta\big|_{z=0} = 0, \quad \lambda\frac{\partial\theta}{\partial z} = -\lambda(\theta_1(t) - T_b(t)), \quad (3)$$

$$\theta\big|_{t=0} = \theta_0(z), \quad (4)$$

$$\left[\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]_{z=h(t)} = \gamma_0 q[\omega_x]_{z=h(t)}, \quad (5)$$

$$\left[\lambda\frac{\partial\theta}{\partial z}\right]_{z=h_1(t)} = 0. \quad (6)$$

Задача (2)-(6) решается в области $Q = (0, H)\times(0, T)$. Температура грунта θ зависит от двух переменных, z и t. Где $z \in (0, H)$, $t \in (0, T)$. Ось oz направлена вверх, начало координат находится на низменном слое грунта. Границы перехода от одной зоны в другую определяются по температурному признаку, т.е. $\theta(h(t), t) = \Theta$ граница талой и фазовой зоны; $\theta(h_1(t), t) = \Theta_1$ граница фазовой и мерзлой зоны.

Параметры, присутствующие в (2) считаются функциями от z, т.е.

$$C = C(z), \lambda = \lambda(z), \gamma_0 = \gamma_0(z).$$

В том случае, если $z \in (h(t), h_1(t))$), то

$$c(z) = \bar{c}(z) + q\frac{d\omega_H}{d\theta}, \quad \lambda(z) = \bar{\lambda}(z) + \gamma_0 q_0 \beta .$$

1.3. Алгоритм определение коэффициента теплопроводности. Для определение $\lambda(z)$, сначала задаются начальное приближение $\lambda_n(z)$ при n=0, и следующее приближение итеративно определяется по формуле

$$\lambda_{n+1}(z) = \lambda_{(z)} - \beta J'(\lambda_n(z)), \text{ n=0, 1, 2, …}$$

Задача (2)-(6) справедливо для $\lambda_n(z)$ для $\lambda_{n+1}(z)$. Соответствующие решение этой задачи для $\lambda_n(z)$ и $\lambda_{n+1}(z)$ обозначим через $\theta^n(z,t)$ и $\theta^{n+1}(z,t)$. Тогда относительно разности $\theta^{n+1}(z,t) - \theta^{n+1}(z,t) = \delta\theta(z,t)$ получается задача:

$$\gamma_0 c \frac{\partial \delta\theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\delta\lambda \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial z} + \lambda^n \frac{\partial \delta\theta}{\partial z}\right), \tag{7}$$

$$\delta\theta\big|_{z=0} = 0, \quad \lambda \frac{\partial \delta\theta}{\partial z}\bigg|_{z=H} = 0, \tag{8}$$

$$\delta\theta\big|_{t=0} = 0, \tag{9}$$

$$\left[\delta\lambda \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial z} + \lambda^n \frac{\partial \delta\theta}{\partial z}\right]_{z=h(t)} = \gamma_0 q[\omega_н]_{z=h(t)}, \tag{10}$$

$$\left[\delta\lambda \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial z} + \lambda^n \frac{\partial \delta\theta}{\partial z}\right]_{z=h_1(t)} = 0, \tag{11}$$

Здесь $\delta\lambda = \lambda_{n+1}(z) - \lambda_n(z)$.

С учетом принятых равенств из (7)-(11) выводится соотношение:

$$2\int_0^T \delta\theta\left(\theta^{n+1} - \theta_1(t)\right)dt = \int_0^T\int_0^H \delta\lambda \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi^{n+1}}{\partial z} dtdz. \tag{12}$$

Из (7)-(11) рассуждая также как в работе [8] получим сопряженную задачу:

$$\gamma_0 c \frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda \frac{\partial \psi}{\partial z}\right) = 0, \tag{13}$$

$$\psi(0,t) = 0, \quad \lambda \frac{\partial \psi}{\partial z}\bigg|_{z=H} = -2(\theta^{n+1} - \theta_1(t)), \tag{14}$$

$$\psi(z,T) = 0, \quad \left[\lambda \frac{\partial \psi}{\partial z}\right]_{z=h(t)} = \gamma_0[\omega_H],$$

$$\left[\lambda \frac{\partial \psi}{\partial z}\right]_{z=h_1(t)} = 0, \tag{15}$$

Рассмотрим функционал:

$$J(\lambda_n) = \int_0^T \left(\theta^n - \theta_1(t)\right)^2 dt .$$

Тогда

$$J(\lambda_{n+1}) - J(\lambda_n) = \int_0^T \left(\theta^{n+1} - \theta_1(t)\right)^2 dt -$$

$$-\int_0^T \left(\theta^n - \theta_1(t)\right)^2 dt = 2\int_0^T \delta\theta(\theta^{n+1} - \theta_1(t))dt -$$

$$-\int_0^T (\delta\theta)^2 dt .$$

С учетом равенство (12) последнее соотношение записывается в виде:

$$J(\lambda_{n+1}) - J(\lambda_n) =$$

$$= \int_0^T\int_0^H \delta\lambda \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi^{n+1}}{\partial z} dzdt - \int_0^T (\delta\theta)^2 dt .$$

Если

$$\delta\lambda = -\beta \int_0^T \frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi^{n+1}}{\partial z} dt,$$

то

$$J(\lambda_{n+1}) - J(\lambda_n) =$$

$$= -\int_0^H \beta \int_0^T \left(\frac{\partial \theta^{n+1}}{\partial z} \cdot \frac{\partial \psi^{n+1}}{\partial z} dt\right)^2 dz - \int_0^T (\delta\theta)^2 dt .$$

Алгоритм решения задачи.

1. Выбирается начальное приближение $\lambda_0(z)$.
2. Решается задача (2)-(6), определяются θ^{n+1} и $\frac{\partial \theta^{n+1}(z,t)}{\partial z}$. Способ решение такой задачи описано в работе [7].
3. Решается задача (7)-(11), определяется $\frac{\partial \psi^{n+1}(z,t)}{\partial z}$.

4. Следующие приближение коэффициента теплопроводности вычисляется по формуле

$$\lambda_{n+1}(z) - \lambda_n(z) = -\beta \int_0^T \frac{\partial \theta^{n+1}(z,t)}{\partial z} \frac{\partial \psi(z,t)}{\partial z} dt .$$

5. Вычисляется

$$J(\lambda_{n+1}) = \int_0^T (\theta^{n+1}(H,t) - \theta_1(t))^2 dt .$$

6. Если $\left| \dfrac{J(\lambda_{n+1}) - J(\lambda_n)}{J(\lambda_n)} \right| < \varepsilon$, то процесс вычисления завершается.

В работе доказаны следующие теоремы:

Теорема 1. Если $(\theta_0(z) \in L_2(0,H))$, $\theta_1(t)$, $T_в(t) \in W_2^1(0,T)$, то для решения задачи. (2)-(6) справедлива оценки.

$$\|\theta\|^2 + \int_0^T \left\| \sqrt{\lambda} \frac{\partial \theta}{\partial z} \right\|^2 d\tau \le \|\theta_0\|^2,$$

$$\max_{z,t} |\theta(z,t)| \le M_0 < \infty .$$

Теорема 2. Если $\theta_0(z) \in L_2(0,H)$, $\theta_1(t), T_в(t) \in W_2^1(0,T)$, $0 < C_0 \le C(\lambda) \le \overline{C}_0$ то для решения задачи (7)-(11) справедливо оценки

$$\|\psi\|^2 + \int_0^T \left\| \sqrt{\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right\|^2 d\tau \le C_7 \left(1 + \int_0^H \frac{dz}{\lambda(z)} \right).$$

Теорема 3. Если $\theta_0(x) \in W_2^1(0,H)$, $\theta_1(t), T_в(t) \in W_2^2(0,T)$, $0 < C_0 \le C(z) \le \overline{C_0} < \infty$, то для решения задач (2)-(6) справедливо оценки

$$\left\| \frac{\partial \theta}{\partial t} \right\|^2 + \int_0^T \left\| \sqrt{\lambda} \frac{\partial^2 \theta}{\partial z \partial t} \right\|^2 d\tau \le C_8 < \infty,$$

$$\max_{z,t} \left| \frac{\partial \theta}{\partial t} \right| \le \mathrm{M}_1 < \infty .$$

Теорема 4. Если $\theta_0(x) \in W_2^1(0,H)$, $\theta_1(t), T_1(t) \in W_2^2(0,T)$, $0 < C_0 \le C(z) \le \overline{C}_0 < \infty$, то для решения задачи (7)-(11) справедливо неравенство

$$\left\| \frac{\partial \psi}{\partial t} \right\|^2 + \int_0^T \left\| \sqrt{\lambda} \frac{\partial \psi}{\partial z \partial t} \right\|^2 d\tau \le C_9 \left(1 + \int_0^H \frac{dz}{\lambda(z)} \right).$$

Теорема 5. Если $\theta_0(x) \in W_2^1(0,H)$, $\theta_1(t), T_1(t) \in W_2^2(0,T)$, $0 < C_0 \le C(z) \le \overline{C}_0 < \infty$, то итерационная формула (12) сходиться и $\exists C_9, C_{10}$ такие, что справедлива оценка $0 < C_9 \le \lambda_{n+1}(z) \le C_{10} < \infty$.

Теорема 6. Если $\theta_0(x) \in W_2^1(0,H)$, $\theta_1(t), T_1(t) \in W_2^2(0,T)$, $0 < C_0 \le C(z) \le \overline{C}_0 < \infty$, то итерационная формула (13) сходиться и имеет место неравенства

$$J(\lambda_0) - C_{13}\beta n \le J(\lambda_{n+1}) \le J(\lambda_0) + C_{13}\beta n .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Франчук А.У.* Теплопроводность строительных материалов в зависимости от влажности. Стройиздат, 1941.
2. *Чудновский А.Ф.* Физика теплообмена в почве. М.: Гостехиздат, 1948.
3. *Kersten M.S.* The thermal conductivity of soils. Proceedings. 2-nd Intern, confer, on soil mechanics a. foundation engineering. V. 3. Rotterdam, 1948.
4. *Kersten M.S.* Thermal properties of soils. Frost Action in soils. A Symposium. High way Research Board Special Report 2, Minneapolis, 1949.
5. *Чудновский А.Ф.* Теплообмен в дисперсных средах. М.: Гостехиздат, 1954. 444 с.
6. *Мартынов Г.А.* Тепло- и влагоперенос в промерзающих и оттаивающих грунтах. Основы геокрилогии (мерзлотоведения). М.: 1959 / Под. ред. Н. А. Цытович. Гл. VI. С. 153-192.
7. *Рысбайулы Б., Байманкулов А.Т., Махамбетова Г.И.* Обратная задача кондуктивного распространения тепла в однородной среде // (В печати).
8. *Жумагулов Б.Т., Рысбайулы Б., Адамов А.А.* Сходимость разностной схемы для обобщенной задачи Стефана конвективного распространения влаги // Вестник НАН РК. 2007. №5. С. 30-41.

Резюме

Біртекті топырақтың тоңу процесінің параметрін идентификациялау есебі қарастырылған. Жылу өткізгіштік коэффициентін анықтайтын итерациялық тәсіл ұсынылады. Итерациалық процестің жинақтылығы дәлелденеді.

Summary

In this work considered of identification parameters heat conductivity in process of freeing. It is offered the iterative method, which half defined coefficient heat conductivity of a ground, convergence of iterative process is prove.

Поступила 18.03.08г.